连续介质力学

Continuum Mechanics

（中册）

流体力学与爆炸力学

Fluid Mechanics and Mechanics of Explosion

吕洪生　曾新吾　编著





国防科技大学出版社
长沙

目　　录

六章　流体力学基础

七章　气体动力学基础

第八章　相似律与量纲理论

九章　炸药与爆炸概论

轰波理论

第十一章　爆轰产物的飞散与爆炸作用

第六章 流体力学基础

一 流体力学基本方程

流体(fluid)包括液体(liquid)和气体(gas),研究流体宏观运动的科学称作流体力学(Fluid Mechanics),本章主要研究理想不可压流体,有关气体流动的研究放在下一章。

6.1 流体力学的重要用途·流体的性质

6.1.1 流体力学的广泛用途

作为连续介质力学的重要组成部分——流体力学是一个非常重要的学科,它在科学研究和工程技术中有着极其广泛、且举足轻重的作用和地位,可以毫不夸张地说,目前已很难找到一个科技部门,它与流体力学没有或多或少的联系,航空工程和造船工业(aviation engineering and shipbuilt industry)中的基本问题,如飞机及舰船的外形设计、操纵性、稳定性等等就是流体力学要研究的课题;在水利工程(water conservancy project)中,如大型的水利枢纽、水库、水力发电站的设计和建造、洪峰的预报、河流的泥沙问题都与流体力学紧密地联系在一起;流体力学的研究对于动力机械制造工业(dynamic machine building)也具有重要意义,如提高水力及蒸气透平(water-power turbine, steam turbine)、喷气发动机(jet turbine)、压缩机(compressor)和水泵(water pump)等动力机械的性能与正确设计,需要流体力学;现代气象学(modern meteorology)中的基本问题——天气预报也离不开流体力学;甚至在天文学(astronomy)上也有着流体力学的广阔天地,例如研究星系的螺旋结构、研究组成星云的气状物质的运动、研究气云的膨胀及其相互作用等都属于宇宙气体动力学(cosmic gasdynamics)的内容;流体力学在爆炸与冲击(explosion and shock waves)的研究中亦是十分关键,高技术武器(high-technique weapons)与常规武器(conventional weapons)的设计和效应、工程爆破和爆炸加工(engineering blasting and explosive working)等均以流体力学(气体动力学)为主要的学科基础,并且形成了以气体动力学为主体的爆炸力学(mechanics of explosion)。

近年来,由于科学技术的飞速发展,流体力学和其他学科相互渗透,形成了一系列的边缘学科(frontier science),例如电磁流体力学(electromagnetical fluid mechanics)、化学流体力学(chemical fluid mechanics)、高温气体动力学(high-temperature gasdynamics)、生物流体力学(bioactivity-fluid mechanics)和地球流体力学(earth-fluid mechanics)等等,随着科学技术的发展,与流体力学交织众多学科必将不断涌现。

6.1.2 流体的性质

流体的宏观性质主要是易流性、粘性、可压缩性和导热性。

1. *易流性*(easy-flowability)

我们知道,固体在静止时可以承受剪应力。当固体受到切向力作用时,在一般情况下

沿力作用方向将发生微小的变形，而后达到平衡状态，变形停止，但是物体本身则要承受着切向作用力。所以静止的固体，既可能存在法向应力，也可能存在切向应力。与此相反，流体在静止时，不能承受切向应力，不管切向应力多么小，只要持续地施加都能使流体发生任意的大变形——这就是易流性。正由于这种易流性，才使之流体没有一定的形状，它的形状随容器的形状而定。流体在静止时，只有法向应力，而无切向应力。

流体和固体的区别当然不是绝对的，有些物质它们的性质介乎在流体和固体之间，即具有固体和流体的双重性质，如橡胶和油漆(rubber and paint)等。以沥青(asphalt)为例，正常情况下它像固体，用锤子敲它它会破裂，放在地面它也具有一定的形状，但是在重力的作用下，它会缓慢地变形逐渐向四周摊开，故它的行为又像流体。就同一材料而言，在常温常压下它呈现固体行为，但在高温高压下却表现出流体行为。关于物质的三态行为解释如下：

物质的宏观性质与分子结构以及分子间的作用力直接相关，图 6.1 画出了未形成化学键的两个孤立分子的相互作用力 f 和它们之间距离 l 的关系，$f>0$ 表示两个分子间的作用力为斥力(repelling force)；$f<0$ 表示两分子间的作用力为引力(attraction)；l_0 为两分子间的平衡距离($l_0 \approx (3 \sim 4) \times 10^{-8}$cm)。显然，当温度较低时，分子运动不剧烈，分子间的距离与 l_0 同量阶(equal order of magnitude)，这时分子间的作用力是量子型(quantum type)的强作用力，数值很大，因此分子只能在各自的平衡位置做微小的振动，此时物质表现为固体状态，固体具有一定的形状和体积。当温度升高时，分子运动变得剧烈了，分子间距离增大，分子间作用力变为量子型和经典型混合的中等作用力(这时分子间的距离 $l \approx 10^{-7} \sim 10^{-6}$cm)。当温度达到一定程度时，分子间的作用力已不再能维持分子在固定的平衡位置附近作微小的振动，但还能维持分子不能分散远离，此时物质表现为液体状态，作为液体其分子无固定的平衡位置，因而整物体的形状不能维持，但仍然有一定的体积。当温度再升高时，分子运动的激烈程度加剧，在分子间的距离达到 $10l_0$ 左右时，分子间只有非常微弱的作用力，此时分子可以相互分散远离，分子的运动接近于自由运动，这时，物质便表现为气体状态，气体既然可自由运动，因此没有固定的形状和大小。

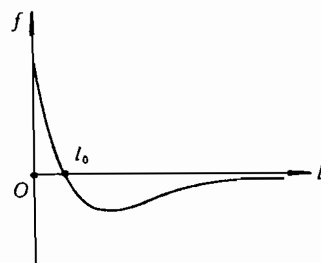


图 6.1

从上面的论述可以看出，固体中分子间的作用力较强，有固定的平衡位置，因而不仅具有一定的体积，而且具有一定的形状。当外界有力作用在固体时，它可以作微小的变形，然后承受住切应力等不再变形。而在液体和气体状态时，分子间的作用力较弱或很弱，很小的切应力都可使它们产生任意大的变形。

2. 粘性(viscosity)

流体虽然在静止时不能承受剪应力，但在运动时却对于相邻两层流体间的相对运动(即相对滑动)有抵抗作用，这种抵抗作用力——称为粘性力。流体这种抵抗两层间彼此相对滑动的性质——称为粘性。粘性应力的大小与粘性系数和速度梯度有关。

当液体的粘性很小时，且其运动的相对速度也不大时，则所产生的粘性应力比其他类型的力如惯性力(inertial force)小得多，可以忽略不计，此时，我们可以把这样的流体视作无粘性，这种无粘性的流体称作理想流体(ideal fluid)，我们实际上所遇到的最重要的流体——空气和水(air and water)其粘性都很小。十分明显，理想流体对于切向变形没有任何抗拒能力。当然考虑粘性的流体则称作粘性流体(viscous fluid)，粘性流体又分为牛顿流体(Newtonian fluid)，即粘性力与速度梯度成线性关系，和非牛顿流体(non-Newtonian fluid)，即粘性力与速度梯度成非线性关系，如血液就是为非牛顿流体。

3. 可压缩性(Compressibility)

流体在运动过程中，由于压力和温度等因素的改变，流体的体积或密度也要发生变化。就压力而言，当它增加时，流体的体积就减小而密度增加。流体的体积随压力而减小的性质——称作可压缩性。

真实的流体都是可以压缩的，它的压缩程度依赖于流体的性质以及外界的条件。液体在通常的压力和温度下，压缩性很小。例如，水在100个大气压下，容积只缩小0.5。因此，在一般情况下，液体可以近似看做不可压缩；但是如果压力极高，例如在水中爆炸，则必须将水作为可压缩的。忽略其可压缩性的流体——称作不可压缩流体(incompressible fluid)；考虑可压缩性的流体——称作可压缩性流体(compressible fluid)，我们经常所碰到的气体，如空气，它的压缩性就很大，压力增加一点点，它的体积则可能发生显著地变化，所以在一般的气体流动的研究中都把气体作为可压缩的，特别是对于爆炸气体产物的流动。

4. 导热性(thermal conductivity)

流体同固体一样，也有传热性。但气体的导热性一般比较差，尤其是对于快速脉冲过程——炸药爆炸，其爆炸产物流动一般作为绝热流动而略去热传导。

如上所述为流体的一些主要性质，至于其他性质与我们所研究的问题关系不大，故在此从略。

6.2 流体的本构关系

根据第五章的论述，对于流体介质，其本构关系应遵循(5.133)式所示的普遍函数形式，它的具体实用的形式如何，将是本节所讨论的内容。

6.2.1 具体本构函数的引出

按(5.133)式和(4.106)式，则有

$$\boldsymbol{\Sigma} = \hat{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}}(\mathbf{B}, \rho, T) \quad \text{或} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \hat{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}}(\mathbf{B}, p, T) \tag{6.1}$$

式中 ρ、p、T 为密度、压力和温度，而变形速率张量 $\mathbf{B} = \{B_{ij}\}$ 为

$$\mathbf{B} = \{B_{ij}\} \quad , \quad B_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \text{(在直角坐标系中)} \tag{6.2}$$

式(6.1)恰恰是流体粘性的体现，为了使这种关系具体化，1687年牛顿(I. Newton)做了一个简单但极为著名的实验，见图6.2，实验是这样：在两块间距为 h 的很长平行平板之间充满粘性流体，下板不动，上板以 U 速度匀速拉动，测量拉动上板所用的力。

经过测量，得出拉动上板时，在单位面积上所用的力 τ 有如下的近似关系式

$$\tau = \mu \frac{U}{h} \tag{6.3}$$

其中 μ 为粘性系数(viscosity constant),亦称作动力学粘性系数(kinetic viscosity constant)。而式中的 U/h 相当于:两板间的流体在上板拉动的带动下,其 x 向的速度 u 沿 y 向按线性分布(见图 6.2),即

$$u = u(y) = \frac{U}{h} y \tag{6.4}$$

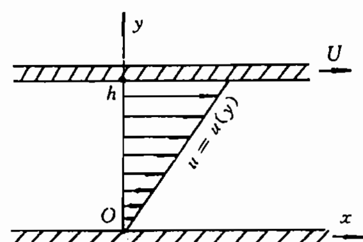


图 6.2

从而推出

$$U/h = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \tag{6.5}$$

作为普遍情形,两板间的速度并不成线性分布,而如图 6.3 所示,这时在 x 向产生的剪应力(shear)τ 由(6.3)式的形式改为

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \tag{6.6}$$

粘性系数 μ 的数值大小依赖于流体的性质,对于粘性较小的流体,μ 当然一般较小。例如,水在一个大气压下,温度为 20℃ 时,μ 为:

$$\mu \approx 0.01(\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1}) \tag{6.7}$$

在上述条件下,对于空气其 μ 为

$$\mu \approx 1.9 \times 10^{-4}(\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1}) \tag{6.8}$$

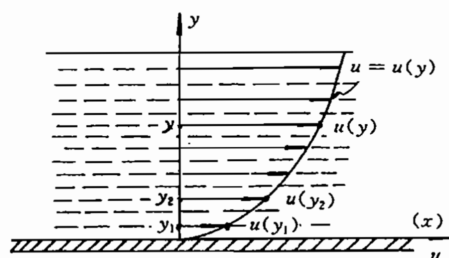


图 6.3

粘性系数 μ 对温度变化比较敏感,而压力对它影响不大。可是温度 T 对 μ 的影响对于气体和液体完全相反。对于液体,当 T 升高时,μ 减小;对于气体,当 T 升高时,μ 增大。气体粘性系数随温度变化的近似表达式很多,其中之一如下

$$\mu = 1.745 \times 10^{-4} + 5.02 \times 10^{-7} T, (\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1}, T \text{ 的单位为 ℃}) \tag{6.9}$$

对于粘性很大的流体,粘性系数可达到很高的值,它可比水的粘性系数大几千倍,如甘油在 3℃时

$$\mu = 42.20 \quad \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1} \tag{6.10}$$

在实际应用中,我们还可能碰到另一种粘性系数——运动学粘性系数 ν(kinematic viscosity constant),它定义作

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{6.11}$$

牛顿实验给出粘性应力(6.3)或(6.6)式仅适用于最简单的剪切流动,然而实际流动很复杂,要推出(6.1)式所指导下的本构关系必须将牛顿给出的规律推广,即得到适用一般情形的广义牛顿定律(generalized Newton's law)。为此,我们做如下几个基本假定:

1. 假定运动流体的应力张量在运动停止后趋于静止流体的应力张量,并把应力张量 Σ 分成两部分之和

$$\Sigma = - p_{*}\mathbf{I} + \Sigma_{*} \tag{6.12.1}$$

即

$$\sigma_{ij} = - p_{*}\delta_{ij} + \tau_{ij} \tag{6.12.2}$$

其中

$$\Sigma_{*} = \{\tau_{ij}\} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \tag{6.13.1}$$

显然,由于按§4.3的论述,在无分布力矩的情况下,应力张量是对称的:$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$,所以$\Sigma_{*}$也是对称的

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \tag{6.13.2}$$

在这里,应力偏量Σ_{*}是与粘性有关的应力张量,即同运动有关的张量,而p_{*}是个"纯人为假定的量",它与(2.119)式所定义的流体静压力p,只有在一定的假定的条件下才相等,不过在流动停止或不可压(见后面论述)情况下p_{*}与p还是相等的,即这时p_{*}为流体静压力。

2. 假定应力偏量各分量τ_{ij}只是速度梯度各分量的线性齐次函数(linear homogeneous function),即(6.6)式的推广,在直角坐标系中有

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\frac{\partial v_k}{\partial x_l} \tag{6.14}$$

其中C_{ijkl}是表征流体粘性系数的,相当于(6.6)式中的μ,但$\{C_{ijkl}\}$一般是各向异性张量(anisotropic tensor),其分量在不同方向取不同值。上式亦相当τ_{ij}作为$\frac{\partial v_k}{\partial x_l}$的函数,在$\frac{\partial v_k}{\partial x_l} = 0$处展开,并取一阶近似。

3. 假定流体是各向同性的(isotropic),各向同性的意思是指流体的粘性、热传导等性质在每个点的各个方向上都相同,即流体的性质不依赖于方向或坐标系的转换。流体中的气体都是各向同性的;大部分简单液体(如水)也是各向同性的。但含有长链状分子的悬浮液(suspension liquid)或溶液(solution)可能呈现出某种方向性,这不在我们的考虑之列。

由于介质是各向同性的,所以粘性系数张量$\{C_{ijkl}\}$也是各向同性的,对于各向同性张量,据附录6.1的(30)式则有

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{6.15}$$

其中λ和μ是常数,将(6.14)式的速度梯度按(3.41.2)式作和分解,即(在直角坐标系中)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \\ &= B_{ij} + Z_{ij} \end{aligned} \tag{6.16}$$

将以上两式代进(6.14)式则推出(参看12.10节)

$$\tau_{ij} = \lambda B_{kk}\delta_{ij} + 2\mu B_{ij} \tag{6.17}$$

把上式代进(6.12)式中给出

$$\sigma_{ij} = (-p_{*} + \lambda B_{kk})\delta_{ij} + 2\mu B_{ij} \tag{6.18}$$

引进第二粘性系数μ',定义作

$$\mu' = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{6.19}$$

利用 μ'，式(6.18)可以改写成

$$\sigma_{ij} = -p_* \delta_{ij} + 2\mu\left(B_{ij} - \frac{1}{3}B_{kk}\delta_{ij}\right) + \mu' B_{kk}\delta_{ij} \tag{6.20.1}$$

或

$$\sigma_{ij} = -p_* \delta_{ij} + 2\mu\left(B_{ij} - \frac{1}{3}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\delta_{ij}\right) + \mu' \mathrm{div}\boldsymbol{v}\delta_{ij} \tag{6.20.2}$$

其中

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = B_{kk} \tag{6.21}$$

式(6.20)便是各向同性流体的本构方程，但在一般的应用中，还须加上一定的假设。

6.2.2 斯托克斯假设

在上面所引出的本构关系中有一个量 p_*，它在一般情况下与流体的静压力 p 不等。按式(2.119)式 p 的定义，可由(6.20)式推出 p 与 p_* 的关系为

$$p = p_* - \mu' \mathrm{div}\boldsymbol{v} \tag{6.22}$$

从上式看出，当流体静止时即 $\boldsymbol{v} = 0$，亦即 $\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0$ 情形，则有

$$p = p_* \tag{6.23}$$

同样，若流体是不可压的，即 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0$，亦即 $\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0$ 情形，则亦有 $p = p_*$.

流体在静止或不可压的特殊情况，$p_* = p$. 但在一般情况上，由于 μ' 的存在，p_* 不等于流体静压力 p. 对于 μ' 的出现，曾有种种不同的微观解释，但斯托克斯(G. G. Stokes)认为“p_* 与 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}$ 有关不合理”，于是他假定

$$\mu' = 0 \tag{6.24}$$

这个假设称作**斯托克斯假设**(Stokes' hypothesis)，它在分子运动论中已得到近似证明，除了高温等极端情形之外。

在(6.24)式的假设下，我们便得到实用的流体本构方程

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\left(\mathbf{B} - \frac{1}{3}B_{kk}\mathbf{I}\right) \tag{6.25.1}$$

或

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\left(B_{ij} - \frac{1}{3}B_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{6.25.2}$$

式(6.25)和(6.20)均称作：广义牛顿定律。

6.3 流体力学方程组·动量定理·动量矩定理

6.3.1 微分形式的基本方程组

描述连续介质运动的质量守恒、动量守恒和能量守恒的(5.1)式以及(5.3)式，加上本构关系(6.25)式，再加上 $p = f(\rho, T)$ 等形式的状态方程，则构成了描述流体流动的如下形式的封闭方程组(在这里将随体微商符 D/Dt 仍写成 d/dt，因以下论述中，这样做不会产生混淆；同时为了避免同其他符号混淆，将单位质量的辐射能符号由 g 改为 g_Δ)。

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \\
&\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \rho b + \operatorname{div}\Sigma \\
&\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \Sigma : \mathbf{B} + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{gard} T) + \rho g_{\Delta} \\
&\Sigma = - p\mathbf{I} + 2\mu\left(\mathbf{B} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right) \\
&\mathbf{B} = \{B_{ij}\} \\
&B_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad \text{(在直角坐标系中)} \\
&p = f(\rho, T)
\end{aligned}\right\} \tag{6.26}
$$

如下引进**耗散函数**(dissipation function) Φ.

在(6.26)式的能量方程中 $\Sigma : \mathbf{B}$ 可化成

$$
\begin{aligned}
\Sigma : \mathbf{B} &= - p\mathbf{I} : \mathbf{B} + 2\mu\left(\mathbf{B} : \mathbf{B} - \frac{1}{3}\mathbf{I} : \mathbf{B}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right) \\
&= - p\operatorname{div}\boldsymbol{v} - \frac{2}{3}\mu(\operatorname{div}\boldsymbol{v})^2 + 2\mu\mathbf{B} : \mathbf{B} \\
&= - p\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \Phi
\end{aligned} \tag{6.27}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\Phi &= 2\mu\mathbf{B} : \mathbf{B} - \frac{2}{3}\mu(\operatorname{div}\boldsymbol{v})^2 \\
&= \frac{2\mu}{3}[3B_{ij}B_{ij} - B_{kk}^2] \\
&= \frac{2\mu}{3}[6(B_{12}^2 + B_{13}^2 + B_{23}^2) + 2B_{11}^2 + 2B_{22}^2 + 2B_{33}^2 - 2B_{11}B_{22} - 2B_{11}B_{22} - 2B_{22}B_{33}] \\
&= \frac{2\mu}{3}[6(B_{12}^2 + B_{13}^2 + B_{23}^2) + (B_{11} - B_{22})^2 + (B_{22} - B_{33})^2 + (B_{33} - B_{11})^2] \\
&\geqslant 0
\end{aligned} \tag{6.28}
$$

由上式可知耗损函数 Φ 永不为负值,它与粘性系数 μ 有关。

将(6.27)式代进(6.26)式的能量方程中则给出

$$
\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = - p\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \Phi + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \rho g_{\Delta} \tag{6.29}
$$

根据热力学第一定律和连续性方程有

$$
\left.\begin{aligned}
&T\mathrm{d}S_{*} = \mathrm{d}e + p\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right) \\
&\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{6.30}
$$

利用(6.30)式,(6.29)式可以改写(在上式中,S_{*} 为比熵):

$$
\rho T\frac{\mathrm{d}S_{*}}{\mathrm{d}t} = \Phi + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \rho g_{\Delta} \tag{6.31}
$$

将上式代替(6.26)式中的能量方程,并将(6.26)式改写,则给出

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \\
&\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \rho\boldsymbol{b} - \mathrm{grad}p + 2\mathrm{div}(\mu\mathbf{B}) - \frac{2}{3}\mathrm{grad}(\mu\mathrm{div}\boldsymbol{v}) \\
&\rho T\frac{\mathrm{d}S_*}{\mathrm{d}t} = \Phi + \mathrm{div}(\lambda\mathrm{gard}T) + \rho g_\Delta \\
&p = f(\rho,T) \\
&\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\left(\mathbf{B} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{6.32}
$$

这就是常用的流体基本方程组的另一种形式。如下考虑几种特殊情况下的流体流动方程组。

1. 粘性不可压流体

如果流体是不可压缩的(且在直角坐标系中表述),即

$$
\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{6.33}
$$

于是从连续性方程推得

$$
\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \tag{6.34}
$$

利用上式可以推出

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{B} &= \hat{e}_k\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\hat{e}_i\hat{e}_j\right\} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i\partial x_j}\hat{e}_j + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i\partial x_i}\hat{e}_j \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i\partial x_i}\hat{e}_j = \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{v}
\end{aligned} \tag{6.35}
$$

如果在(6.32)式中,还假定:$\mu = \mathrm{const}$,则推出如下形式的粘性不可压流动方程组

$$
\left.\begin{aligned}
&\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0 \\
&\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \rho\boldsymbol{b} - \mathrm{grad}p + \mu\Delta\boldsymbol{v} \\
&\rho T\frac{\mathrm{d}S_*}{\mathrm{d}t} = \Phi + \mathrm{div}(\lambda\mathrm{gard}T) + \rho g_\Delta \\
&\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{B}
\end{aligned}\right\} \tag{6.36}
$$

2. 理想不可压流体

如果流体既是不可压又是理想的,即

$$
\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0 \quad , \quad \mu = 0
$$

于是控制方程写成

$$
\left.\begin{aligned}
&\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0 \\
&\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \rho\boldsymbol{b} - \mathrm{grad}p
\end{aligned}\right\} \tag{6.37}
$$

6.3.2 微分方程的分量形式

1. 在直角坐标系中

流体力学的基本方程组的分量形式(据(6.26)和(6.31)式)为

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0\\
&\rho\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\rho b_x+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}\\
&\rho\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\rho b_y+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}\\
&\rho\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\rho b_z+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\\
&\rho T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\Phi+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\rho g_\Delta\\
&p=f(\rho,T)\\
&\sigma_{xx}=-p+2\mu\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right]\\
&\sigma_{yy}=-p+2\mu\left[\frac{\partial v_y}{\partial y}-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right]\\
&\sigma_{zz}=-p+2\mu\left[\frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right]\\
&\sigma_{xy}=\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\\
&\sigma_{yz}=\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\\
&\sigma_{zx}=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\}\qquad(6.38)
$$

其中 v_x, v_y, v_z 为速度 $\boldsymbol{v}$ 在 x、y、z 轴向的分量

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$
\begin{aligned}
\Phi=&-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2+2\mu\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2\right.\\
&\left.+\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

2. 在曲线坐标系中

根据(1.217)式、(3.74)式、(3.75)式以及§1.17中的(1.239)式等,给出

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(\rho H_2H_3v_1)}{\partial q_1}+\frac{\partial(\rho H_3H_1v_2)}{\partial q_2}+\frac{\partial(\rho H_1H_2v_3)}{\partial q_3}\right]=0\qquad(6.39.1)$$

$$
\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}+\frac{v_1v_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\frac{v_1v_3}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-\frac{v_2^2}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}-\frac{v_3^2}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right)\\
&=\rho b_1+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3\sigma_{11})+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1\sigma_{12})+\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2\sigma_{31})\right]
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\sigma_{12}}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\frac{\sigma_{13}}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-\frac{\sigma_{22}}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}-\frac{\sigma_{33}}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} \tag{6.39.2}$$

$$\rho\left(\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}+\frac{v_1v_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}+\frac{v_2v_3}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}-\frac{v_3^2}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}-\frac{v_1^2}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)$$

$$=\rho b_2+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3\sigma_{12})+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1\sigma_{22})+\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2\sigma_{23})\right]$$

$$+\frac{\sigma_{12}}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}+\frac{\sigma_{23}}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}-\frac{\sigma_{33}}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}-\frac{\sigma_{11}}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} \tag{6.39.3}$$

$$\rho\left(\frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}t}+\frac{v_3v_1}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}+\frac{v_2v_3}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}-\frac{v_1^2}{H_3H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-\frac{v_2^2}{H_3H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\right)$$

$$=\rho b_3+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3\sigma_{31})+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1\sigma_{23})+\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2\sigma_{33})\right]$$

$$+\frac{\sigma_{31}}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}+\frac{\sigma_{22}}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}-\frac{\sigma_{11}}{H_3H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-\frac{\sigma_{22}}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3} \tag{6.39.4}$$

$$\rho T\frac{\mathrm{d}S_*}{\mathrm{d}t}=\Phi+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\lambda\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\lambda\frac{\partial T}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\lambda\frac{\partial T}{\partial q_3}\right)\right]+\rho g_\Delta \tag{6.39.5}$$

$$p=f(\rho,T) \tag{6.39.6}$$

$$\sigma_{11}=-p+2\mu\left[\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1}+\frac{v_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\frac{v_3}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-\frac{1}{3}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right] \tag{6.39.7}$$

$$\sigma_{22}=-p+2\mu\left[\frac{1}{H_2}\frac{\partial v_2}{\partial q_2}+\frac{v_3}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}+\frac{v_1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}-\frac{1}{3}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right] \tag{6.39.8}$$

$$\sigma_{33}=-p+2\mu\left[\frac{1}{H_3}\frac{\partial v_3}{\partial q_3}+\frac{v_1}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}+\frac{v_2}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}-\frac{1}{3}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right] \tag{6.39.9}$$

$$\sigma_{12}=\mu\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_2}+\frac{1}{H_1}\frac{v_2}{\partial q_1}-\frac{v_1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-\frac{v_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right) \tag{6.39.10}$$

$$\sigma_{23}=\mu\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial v_2}{\partial q_3}+\frac{1}{H_2}\frac{v_3}{\partial q_2}-\frac{v_2}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}-\frac{v_3}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\right) \tag{6.39.11}$$

$$\sigma_{31}=\mu\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_3}{\partial q_1}+\frac{1}{H_3}\frac{v_1}{\partial q_3}-\frac{v_3}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}-\frac{v_1}{H_3H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\right) \tag{6.39.12}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{v_1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}+\frac{v_2}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}+\frac{v_3}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(H_2H_3v_1)}{\partial q_1}+\frac{\partial(H_3H_1v_2)}{\partial q_2}+\frac{\partial(H_1H_2v_3)}{\partial q_3}\right]$$

其中耗损函数 Φ 由(6.28)、(3.74)和(3.75)式等确定。

3. 在柱坐标系中

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0 \tag{6.40.1}$$

$$\rho\left(\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t}-\frac{v_\theta^2}{r}\right)=\rho b_r+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial(r\sigma_{zr})}{\partial z}\right]-\frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \tag{6.40.2}$$

$$\rho\left(\frac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{v_r v_\theta}{r}\right)=\rho b_\theta+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\sigma_{r\theta})}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial(r\sigma_{\theta z})}{\partial z}\right]+\frac{\sigma_{r\theta}}{r} \tag{6.40.3}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\rho b_z+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\sigma_{zr})}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial(r\sigma_{zz})}{\partial z}\right] \tag{6.40.4}$$

$$\rho T\frac{\mathrm{d}S_{\cdot}}{\mathrm{d}t}=\Phi+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\lambda}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]+\rho g_\Delta \tag{6.40.5}$$

$$p=f(\rho,T) \tag{6.40.6}$$

$$\sigma_{rr}=-p+2\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{1}{3}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right) \tag{6.40.7}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=-p+2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r}{r}-\frac{1}{3}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right) \tag{6.40.8}$$

$$\sigma_{zz}=-p+2\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{1}{3}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right) \tag{6.40.9}$$

$$\sigma_{r\theta}=\mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r}\right) \tag{6.40.10}$$

$$\sigma_{\theta z}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) \tag{6.40.11}$$

$$\sigma_{zr}=\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \tag{6.40.12}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

其中Φ由(6.28)、(3.74)和(3.75)式等确定。在这里r、θ、z与直角坐标x、y、z的关系为

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$$

4. 在球坐标系中

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\rho r^2v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho\sin\theta v_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial\varphi}=0 \tag{6.41.1}$$

$$\rho\left(\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t}-\frac{v_\theta^2+v_\varphi^2}{r}\right)=\rho b_r+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(r^2\sin\theta\sigma_{rr})}{\partial r}+\frac{\partial(r\sin\theta\sigma_{\theta r})}{\partial\theta}+\frac{\partial(r\sigma_{\varphi r})}{\partial\varphi}\right]-\frac{\sigma_{\theta\theta}+\sigma_{\varphi\varphi}}{r} \tag{6.41.2}$$

$$\begin{aligned}&\rho\left(\frac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{v_rv_\theta}{r}-\frac{v_\varphi^2\cot\theta}{r}\right)\\&=\rho b_\theta+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(r^2\sin\theta\sigma_{r\theta})}{\partial r}+\frac{\partial(r\sin\theta\sigma_{\theta\theta})}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{\partial\varphi}\right]+\frac{\sigma_{r\theta}}{r}-\frac{\sigma_{\varphi\varphi}\cot\theta}{r}\end{aligned} \tag{6.41.3}$$

$$\begin{aligned}&\rho\left(\frac{\mathrm{d}v_\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{v_rv_\varphi}{r}+\frac{v_\theta v_\varphi\cot\theta}{r}\right)\\&=\rho b_\varphi+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(r^2\sin\theta\sigma_{\varphi r})}{\partial r}+\frac{\partial(r\sin\theta\sigma_{\theta\varphi})}{\partial\theta}+\frac{\partial(r\sigma_{\varphi\varphi})}{\partial\varphi}\right]+\frac{\sigma_{\varphi r}}{r}+\frac{\sigma_{\theta\varphi}\cot\theta}{r}\end{aligned} \tag{6.41.4}$$

$$\rho T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\Phi+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\lambda\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\lambda\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)\right]+\rho g_\Delta \tag{6.41.5}$$

$$p=f(\rho,T) \tag{6.41.6}$$

$$\sigma_{rr}=-p+2\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{1}{3}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right) \tag{6.41.7}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=-p+2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r}{r}-\frac{1}{3}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right) \tag{6.41.8}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=-p+2\mu\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{v_r}{r}+\frac{v_\theta\cot\theta}{r}-\frac{1}{3}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right) \tag{6.41.9}$$

$$\sigma_{r\theta}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right) \tag{6.41.10}$$

$$\sigma_{\theta\varphi}=\mu\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}-\frac{v_\varphi\cot\theta}{r}\right) \tag{6.41.11}$$

$$\sigma_{\varphi r}=\mu\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{v_\varphi}{r}\right) \tag{6.41.12}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta v_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}$$

其中 Φ 由(6.28)、(3.74)和(3.75)式等确定。在这里 r、θ、φ 与直角坐标 x、y、z 的关系为

$$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}$$

6.3.3 积分形式的流体力学基本方程组

$$\left.\begin{aligned}
&\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V+\oint_S\rho v_n\mathrm{d}S=0\\
&\int_V\frac{\partial(\rho\boldsymbol{v})}{\partial t}\mathrm{d}V+\oint_S\rho v_n\boldsymbol{v}\mathrm{d}S=\int_V\rho\boldsymbol{b}\mathrm{d}V+\oint_S\boldsymbol{t}^{(\hat{n})}\mathrm{d}S\\
&\int_V\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{v^2}{2}\right)\right]\mathrm{d}V+\oint_S\rho v_n\left(e+\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}S\\
&=\int_V\rho\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}V+\oint_S\boldsymbol{t}^{(\hat{n})}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}S+\oint_S\lambda\frac{\partial T}{\partial n}\mathrm{d}S+\int_V\rho g_\Delta\mathrm{d}V\\
&p=f(\rho,T)\\
&\boldsymbol{t}^{(\hat{n})}=\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\\
&\frac{\partial T}{\partial n}=\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathrm{grad}T\\
&\boldsymbol{\Sigma}=-p\mathbf{I}+2\mu\left(\mathbf{B}-\frac{1}{3}\mathbf{I}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{6.42}$$

其中 $\mathbf{B}$ 的分量 B_{ij} 与 v_i 的关系，对于直角坐标系，见(3.48)式；对于曲线坐标系，见(3.74)

式和(3.75)式。

当然作用在整个体积 V 上还要满足动量矩守恒,在无分布力矩的情况下有(见(2.18)式)

$$\int_V\left[\boldsymbol{r}\times\frac{\partial(\rho\boldsymbol{v})}{\partial t}\right]\mathrm{d}V+\oint_S(\boldsymbol{r}\times\rho v_n\boldsymbol{v})\mathrm{d}S=\int_V\boldsymbol{r}\times\rho\boldsymbol{b})\mathrm{d}V+\oint_S\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{t}^{(n)}\mathrm{d}S \quad (6.43)$$

6.3.4 **动量定理和动量矩定理**

要求解出整个流场的情况,并给出问题所要求的特征量,对于大部分流体力学的问题来讲,则需要在一定的边初条件下解微分形式的流体力学基本方程组。然而对于有些重要的问题则不然,我们需要的只是流场边界或较远区域属于整体或平均的量,如计算破甲弹的射流(jets of armour piercer)和爆炸焊接(exxplosive weld)中的射流,以及流体对于在其中运动着的物体的反作用力等等。于是我们便可绕开微分方程组,而起用积分形式方程组中的动量守恒方程(即(6.42)式中的第二式)和动量矩方程(6.43)式。利用这两个方程确定某些整体性的量有时十分简捷,而且意义鲜明。

但是在(6.42)式的第二式和(6.43)式中有如下两项不好处理,它们是

$$\int_V\frac{\partial(\rho\boldsymbol{v})}{\partial t}\mathrm{d}V \quad 和 \quad \int_V\left[\boldsymbol{r}\times\frac{\partial(\rho\boldsymbol{v})}{\partial t}\right]\mathrm{d}V$$

要想求出如上积分的积分值,必须给出体积 V 中 ρ 和 $\boldsymbol{v}$ 的分布函数,然而要给分布函数 ρ 和 $\boldsymbol{v}$,必须解微分方程才能知道,鉴于这种原因,使得积分形式的动量守恒方程和动量矩方程一般不常用。

然而,当流动是定常时,(6.42)的第二式和(6.43)式变成

$$\oint_S\rho v_n\boldsymbol{v}\mathrm{d}S=\int_V\rho\boldsymbol{b}\mathrm{d}V+\oint_S\boldsymbol{t}^{(n)}\mathrm{d}S \quad (6.44.1)$$

$$\oint_S(\boldsymbol{r}\times\rho v_n\boldsymbol{v})\mathrm{d}S=\int_V\boldsymbol{r}\times\rho\boldsymbol{b})\mathrm{d}V+\oint_S\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{t}^{(n)}\mathrm{d}S \quad (6.44.2)$$

上述两个积分对于 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{t}^{(n)}$ 而言,只需要它们在流动边界 S 上的取值,而不涉及它们在流场内的分布,故可以积分;但对 ρ 而言不仅需要它在 S 上的取值,而且需要给出它在 V 内的分布,然而当 $\rho=\mathrm{const}$ 时,就没有个问题,故(6.44)式对不可压流动非常有用,所以对如上两式常加上专门称呼,把(6.44.1)式称作动量定理(theorem of momentum),把(6.44.2)式称作动量矩定理(theorem of moment of momentum),当然这种称呼实际并不全面,而一种习惯。

二 静止流体

在许多工程实践中如建造水库和造船等,以及许多水利机械如液压机、虹吸管等都涉及到静止流体作用,研究在外力作用下静止流体状态问题的学科称作流体静力学(hydrostatics),根据流体静力学理论,我们可以给出静止流体的压力分布,计算出浮在液体表面或沉在液体中物体所受的浮力及浮力矩,并研究该物体的稳定性,这在造船学方面特别重要;同时利用流体静力学还可计算出处于不同高度的静止气体(大气)的压力、密度和温度;计算出处于平衡态的气状星球的压力分布和密度分布等,即流体静力学在航空和天文中亦有重要用途。当然利用流体静力学还可以很好地解释物理学中的阿基米德原理

(Archimedes' principle)和帕斯卡定律(Pascal's law)等。

流体静力学包括液体静力学和气体静力学。

6.4 流体静力学基本方程组

6.4.1 方程组

现研究静止流体,亦即

$$\boldsymbol{v} \equiv 0$$

在这种情况下,流体力学基本方程组(6.26)式则变成(在本部分不考虑热辐射,令 $g_\Delta = 0$):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\\&\rho \boldsymbol{b} = \mathrm{grad}\, p\\&\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \mathrm{div}(\lambda \mathrm{grad} T)\\&p = f(\rho, T)\\&\boldsymbol{\Sigma} = -p\boldsymbol{I}\end{aligned}\right\} \tag{6.45}$$

1. 当流体为正压流体(barotropic fluid),即压力与温度无关只是密度的函数,即

$$p = f(\rho) \quad 或 \quad \rho = f_{\cdot}(p) \tag{6.46}$$

这种情况出现在一些特殊情形,例如

①气体的等熵流动(isentropic flow),则有

$$p = A\rho^k, \quad A = \mathrm{const}, \quad k = \mathrm{const} \tag{6.47}$$

②等温过程(isothermal process),则有

$$p = C_\Delta \rho, \quad C_\Delta = \mathrm{const} \tag{6.48.1}$$

③不可压流体且初始均匀,则有

$$\rho = \mathrm{const}, \quad p 与 T 无关 \tag{6.48.2}$$

在许多著作中都把不可压流体称作正压流体,本作者对此持有异议,因若作为正压,则 $p = f(\rho)$,由于 $\rho \equiv \mathrm{const}$,则推出 $p = \mathrm{const}$,事实并非如此。

2. 当流体为多方气体(polytropic gas),则有

$$p = \rho RT, \quad e = C_V T \tag{6.49}$$

在上式中 C_v 为定容比热(见(4.90)式),R 为气体常数。对于多方气体的静力学方程(6.45)式变成

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\\&\rho \boldsymbol{b} = \mathrm{grad}\, p\\&\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(\lambda \mathrm{grad} T)\\&p = \rho RT\end{aligned}\right\} \tag{6.50}$$

6.4.2 边界条件

1. 在不动的刚壁(rigid wall)上

①若流体为粘性流体,则在壁上

$$v = 0 \tag{6.51}$$

②若流体为理想流体,则在壁上

$$v_n = v \cdot \hat{n} = 0, \quad \hat{n}\text{ 为固壁的单位法线} \tag{6.52}$$

2. 在自由面(free surface)上

$$p = p_0 = \text{const} \tag{6.53}$$

所谓自由面就是压力恒为常数的边界曲面。

此外,如果流体是正压的,则压力和密度同温度可以分开来求。

6.5 外力须满足的条件·自由面的形状

6.5.1 外力限制条件

当流体静止时,作用在流体的外力必须满足一定的条件,换句话说,外力只有满足一定的条件,流体才能保持平衡,这个条件称作外力限制条件(restrictive conditions for external forces)。如下我们来推导它,据(6.45)式的第二式,有

$$\rho \boldsymbol{b} = \text{grad} p \tag{6.54}$$

对该式两边取旋度,则给出

$$\rho \text{rot} \boldsymbol{b} + (\text{grad} \rho) \times \boldsymbol{b} = 0 \tag{6.55}$$

将上式两边点乘以 $\boldsymbol{b}$,并考虑到 $\boldsymbol{b} \cdot (\text{grad}\rho) \times \boldsymbol{b} = 0$,于是由(6.55)式推出外力限制条件:

$$\boldsymbol{b} \cdot \text{rot} \boldsymbol{b} = 0 \tag{6.56}$$

上式就是流体静止时,外力必须满足的条件。上式展成在直角坐标系中的分量形式

$$b_x\left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}\right) + b_y\left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right) + b_z\left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right) = 0$$

如果外力是有势的(external force with potential),即有

$$\boldsymbol{b} = \text{grad}(-U) \tag{6.57}$$

其中 U 为势函数(potential function)。上式亦可写成

$$U = -\int \boldsymbol{b} \cdot \text{d}\boldsymbol{r} \tag{6.58}$$

由于外力有势则有

$$\text{rot} \boldsymbol{b} = 0$$

于是(6.56)式永恒得到满足。由此可见,当流体在有势的外力场作用下,达到静止是可能的。

在实际的问题中我们所遇到的绝大多数的外力都是有势的,如在重力场(gravity field)中。在重力场中,作用在单位质量上的质量力 $\boldsymbol{b}$ 当然为重力加速度,即有

$$\boldsymbol{b} = -g\hat{\boldsymbol{k}} = -\text{grad}(gz)$$

亦即有:

$$U = gz \tag{6.59}$$

在如上两式中 g 为重力加速度(gravitational acceleration)。

6.5.2 自由面的形状

如下只研究外力有势情形，即(见(6.57)式)：

$$\boldsymbol{b} = -\operatorname{grad}U \tag{6.60}$$

将上式代进(6.55)式，则推出

$$\operatorname{grad}\rho \times \operatorname{grad}U = 0 \tag{6.61}$$

将(6.60)式代进(6.54)的第二式中给出

$$-\rho\operatorname{grad}U = \operatorname{grad}p$$

由上式推出

$$\operatorname{grad}p \times \operatorname{grad}U = 0 \tag{6.62}$$

由(6.61)和(6.62)式看出，等势面、等密度面和等压力面的法线方向重合，或句话说，等势面、等密度面和等压力面重合(或平行)；同时，由状态方程可以推出等势面与等温面亦是重合的。

在自由面上，如图 6.4.1 中的 AB 线，在 AB 上：$p = p_0 = \text{const}$，即 AB 为等压线。由于自由面为等压面，按上面论述，它也是等势面，如果外力 $\boldsymbol{b}$ 为重力，则位势 U 为(6.59)式所示，于是在自由面 AB 上

$$U = gz = \text{const}$$

即自由面的方程为

$$z = \text{const} \tag{6.63.1}$$

由此得出结论，在重力作用下的流体在静止时，其自由面为水平面，即图 6.4.1 所示情形。

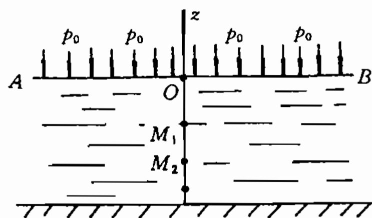


图 6.4.1

6.5.3 在运动坐标系中相对静止的不可流体的自由面

如上所研究的为在外力有势的流场中，绝对静止流体的自由面。为开阔思路、扩大眼界，现考虑在运动坐标系中相对静止的不可压流体的自由面。

设有一个盛有不可压流体的水桶，在重力场中以加速度 $\boldsymbol{a}$ 移动，流体相对桶静止，如图 6.4.2 所示，桶体始终保持竖直向上，这是一个二维问题。

现取两个坐标系，一个是空间固定坐标系 OX_2X_3，其轴向的单位矢量分别为 $\hat{\boldsymbol{I}}_2$、$\hat{\boldsymbol{I}}_3$，轴 X_3 竖直向上，在该坐标系中

$$\boldsymbol{a} = a_2\hat{\boldsymbol{I}}_2 + a_3\hat{\boldsymbol{I}}_3,\quad a_2 = \text{const},\quad a_3 = \text{const} \tag{6.63.2}$$

$$\text{体力：}\boldsymbol{b} = -g\hat{\boldsymbol{I}}_3,\quad g = \text{const}(\text{重力加速度})$$

另一个坐标系取在桶上为 Qx_2x_3，如图所示，其单位矢量亦为 $\hat{\boldsymbol{I}}_2$、$\hat{\boldsymbol{I}}_3$.

任一时刻 t 桶中任一流体质点 A，它在两个坐标系中的坐标关系为

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{L},\quad 即\quad X_i=x_i+L_i \tag{6.63.3}$$

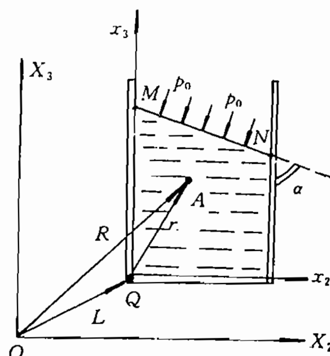


图 6.4.2

上式亦是质点 A 的轨迹，即有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t^2}$$

其中

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=0 & (因流体相对静止,\boldsymbol{r} 与 t 无关)\\ \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{a}=a_2\hat{\boldsymbol{I}}_2+a_3\hat{\boldsymbol{I}}_3\end{cases}$$

根据以上关系，可写出质点 A 的运动方程为

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\equiv\rho\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2}\equiv\rho\boldsymbol{a}=-\rho g\hat{\boldsymbol{I}}_3-\mathrm{grad}p \tag{6.63.4}$$

其中

$$\rho=\mathrm{const}(不可压)$$

$$\mathrm{grad}p=\frac{\partial p}{\partial X_i}\hat{\boldsymbol{I}}_i=\frac{\partial p}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\hat{\boldsymbol{I}}_i=\frac{\partial p}{\partial x_k}\delta_{ki}\hat{\boldsymbol{I}}_i=\frac{\partial p}{\partial x_i}\hat{\boldsymbol{I}}_i \tag{6.63.5}$$

这是由于梯度是对于固定时刻物理量随空间的变化，而在固定时刻 X_i 只随 x_i 变化而与 L_i 无关(因 t 不变，L_i 亦不变)，于是由(6.63.3)可推出

$$\frac{\partial x_k}{\partial X_i}=\delta_{ki}$$

由(6.63.4)、(6.63.5)和(6.63.2)式可以得到

$$\mathrm{grad}p=-\rho a_2\hat{\boldsymbol{I}}_2-\rho(a_3+g)\hat{\boldsymbol{I}}_3$$

将上式两边点乘以：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x_2\hat{\boldsymbol{I}}_2+\mathrm{d}x_3\hat{\boldsymbol{I}}_3$$

则推出

$$\mathrm{d}p=-\rho a_2\mathrm{d}x_2-\rho(a_3+g)\mathrm{d}x_3$$

积分后给出

$$p=-\rho a_2x_2-\rho(a_3+g)x_3+\mathrm{const} \tag{6.63.6}$$

已知在自由面上 $p=p_\Delta=\mathrm{const}$，据(6.63.6)式，则有

$$p_\Delta=-\rho a_2x_2-\rho(a_3+g)x_3+\mathrm{const}$$

从而推出

$$\rho a_2x_2+\rho(a_3+g)x_3=\mathrm{const}$$

于是得到流体自由面的斜率为：

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}x_2}=-\frac{a_2}{a_3+g} \tag{6.63.7}$$

6.6 不可压缩重流体·液体静力学规律

现考虑不可压缩静止重流体问题,此时有

$$\begin{cases}\rho = \text{const} \\ \rho \boldsymbol{b} = \text{grad} p \\ \boldsymbol{b} = -\text{grad}U = -\text{grad}(gz)\end{cases}$$

于是由上式推出

$$\text{grad}\left(\frac{p}{\rho} + U\right) = \text{grad}\left(\frac{p}{\rho} + gz\right) = 0$$

将上式两边点乘以 $\text{d}z\hat{\boldsymbol{k}}$,再积分得到

$$\frac{p}{\rho} + U = \frac{p}{\rho} + gz = \text{const} \tag{6.64}$$

如若坐标原点取法如图 6.4.1 所示,即 $z = 0$ 时,

$$p = p_0 \tag{6.65}$$

则由(6.64)式推出

$$p = p_0 - \rho gz = p_0 + \rho gh \tag{6.66}$$

其中:$h = -z$ 为流体的深度。式(6.66)便是著名的液体静力学规律。

如下举几个例子,说明液体静力学规律的应用。

1. *帕斯卡定律*(Pascal's law)

该定律认为:在不可压静止的重流体中,当作用在流体上,如作用在图 6.4.1 的自由面上的外力 p_0 改变 δp_0 时,它将立即传至流体各点,其每点上的压力 p 的增加值 δp 都等于 δp_0,即

$$\delta p = \delta p_0 \tag{6.67}$$

根据(6.66)式,这个结构很显然,不管是图 6.4.1 中的 M_1 点上,还是图 6.4.1 的 M_2 点上,还是其他点上,均增加压力值 δp_0.

水压机就是根据帕斯卡定律制成的,它能用较小的力将较大的物体举起来。图 6.5 为水压机的示意图,它实际上是个连通器。设作用在小截面 A_1 上的总压力为 F_1,则产生在液体表面上的压强(即流体力学所称谓的压力)p 为

$$p = \frac{F_1}{A_1}$$

按照帕斯卡原理,作用在大截面 A_2 上的压强亦为 p,于是对 A_2 的推力为:

$$-F_2 = pA_2 = F_1\frac{A_2}{A_1}$$

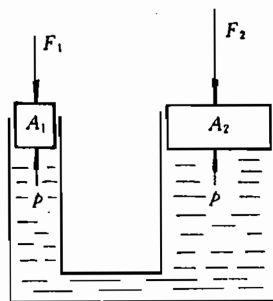


图 6.5

由此可见,A_2 上所受到的力 F_2 是 A_1 上所受到的力 F_1 的 A_2/A_1 倍,这个截面之比越大,则对 A_2 的推力也就越大,这就是水压机的工作原理。

2. *流体静力学矛盾*(hydrostatics contradiction)

图6.6表示了(a)、(b)、(c)、(d)四个容器,这四个容器的底面都是A,容器中的水位都是同样高,试问哪一个容器的底面上所受到的总压力最大?

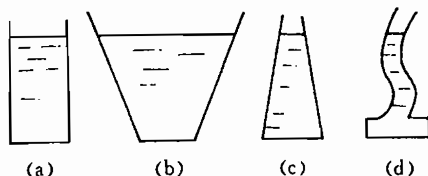


图 6.6

也许有人不加分析说,容器(b)的底面上所受到的总压力最大。因为它最大,所盛的液体最多。这个直观看来似乎很有道理的答案实际上是错误的。据(6.66)式,容器底面所受的总压力 F 为

$$F = (p_0 + \rho g h)A$$

这个 F 值只与 p_0、ρ、g、h、A 有关,而与容器的具体形式无关。现四个容器的底面积 A 相同,所盛液体的高度 h 亦相同,所以四个容器底面上所受到的总压力亦相同。——这就是著名的所谓"流体静力学矛盾"。

6.7 阿基米德定律

本节研究浸在液体的物体所受的浮力(buoyancy)和浮力矩(moment of bouyancy)。

设一个体积为 V、表面积为 S 的物体全没在密度为 ρ 的重流体中,如图 6.7 所示。

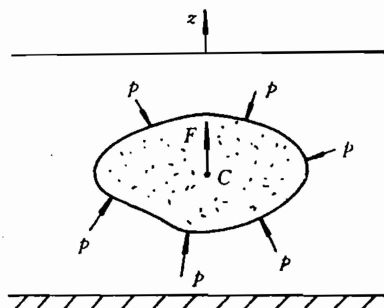


图 6.7

由于流体为不可压重流体,故有

$$\begin{cases} \rho = \text{const} \\ \boldsymbol{b} = -\,\mathrm{grad}(gz) = -\,g\hat{\boldsymbol{k}} \end{cases}$$

根据(6.45)的第二式,则有

$$\mathrm{grad}\,p = -\,\rho g\hat{\boldsymbol{k}} \qquad (6.68)$$

现求作用在物体上的总压力 $\boldsymbol{F}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \oint_S -\,p\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S \\ &= -\int_V \mathrm{grad}\,p\mathrm{d}V \\ &= \int_V \rho g\hat{\boldsymbol{k}}\mathrm{d}V \\ &= \rho g V\hat{\boldsymbol{k}} \\ &= G\hat{\boldsymbol{k}} \end{aligned} \qquad (6.69)$$

其中 G 是物体排开液体的重量

$$G = \rho g V \qquad (6.70)$$

由(6.69)式看出,作用在浸在液体中物体表面上流体压力之合力 $\boldsymbol{F}$ 指向 z 轴向上,所以这个力是浮力,而且等于物体所排开液体的重量。

如下计算作用在物体上的浮力矩 $\boldsymbol{L}$(对坐标原点的力矩):

$$
\begin{aligned}
L &= \oint_S r \times (-p\hat{n})\mathrm{d}S \\
&= \oint_S \hat{n} \times (pr)\mathrm{d}S \\
&= \int_V (\mathrm{grad}p \times r + p\mathrm{rot}r)\mathrm{d}V \\
&= \int_V \mathrm{grad}p \times r\mathrm{d}V \\
&= \int_V r\mathrm{d}V \times \rho g\hat{k} \\
&= r_c \times F
\end{aligned}
\tag{6.71}
$$

在上式中 r 为矢径，r_c 为物体所排开那块液体质心(centre of mass)，即“浮心”C 点的矢径

$$
r_c = \frac{1}{V}\int_V r\mathrm{d}V \tag{6.72}
$$

而根据理论力学中的伐里农定理(Varinon's theorem)，作用在物体上整个浮力对坐标原点的力矩，即等效(6.71)式所示的力矩，亦即(6.71)式所示的力矩又可表成

$$
L = r \times F \tag{6.73}
$$

由(6.71)式和(6.73)式推出

$$
r_c \times F = r \times F
$$

而

$$
r_c = x_c\hat{i} + y_c\hat{j} + z_c\hat{k}
$$
$$
r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}
$$

即有

$$
G(y_c\hat{i} - x_c\hat{j}) = G(y\hat{i} - x\hat{j})
$$

从而有

$$
\left.\begin{aligned} x &= x_c \\ y &= y_c \end{aligned}\right\}，(\text{而 } z \text{ 与 } z_c \text{ 之间没有限制}) \tag{6.74}
$$

从而得出结论，作用在物体表面各点上的压力对坐标原点取矩之和，等于整个浮力 F 在过“浮点”朝 z 向(浮力方向)那条直线上任一点对坐标原点取矩(即 F 可取在该线上任一点)。

从式(6.73)可以看出，当浮力 F 对过浮心那条垂线取矩(即将坐标原点取在浮力作用线上的情形)，则浮力矩 L 等于零，即作用在物体表面各处的压力对物体作用的效果可以由过浮心垂线的浮力 F 代替。

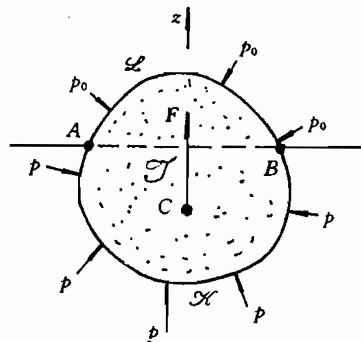


图 6.8

总结以上的分析，便得到著名的阿基米德定律(Archimedes' law)：浸泡在液体中的物体所受到的浮力等于被物体所排开液体的重量，浮力的方向是重力的反向，而且浮力的作用线

通过被物体所排开液体的重心 C。

阿基米德定律也适用沉没液体中一部分的物体，如图 6.8 所示。设整个物体的体积为 V

$$V = V_p + V_b$$

其中 V_p 为浮在液面部分 $A\mathscr{T}B\mathscr{L}A$ 的体积，V_b 为浸没液之下 $A\mathscr{K}B\mathscr{T}A$ 的体积。

现求作用在物体表面 S 上的周边压力之和，即求浮力 $\boldsymbol{F}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \oint_S -p\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S = -\oint_{A\mathscr{K}B\mathscr{L}A} p\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S \\
&= \left(-\int_{A\mathscr{K}B} p\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S - \int_{B\mathscr{T}A} p_0\hat{\boldsymbol{n}}_{\centerdot}\mathrm{d}S\right) + \left(\int_{B\mathscr{T}A} p_0\hat{\boldsymbol{n}}_{\centerdot}\mathrm{d}S - \int_{B\mathscr{L}A} p_0\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\right) \\
&= -\oint_{A\mathscr{K}B\mathscr{T}A} p\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S - \oint_{B\mathscr{L}A\mathscr{T}B} p_0\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S \\
&= -\int_{V_b} \mathrm{grad}\,p\mathrm{d}V - \int_{V_p} \mathrm{grad}\,p_0\mathrm{d}S \\
&= \rho g V_b \hat{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}$$

于是说明，浮力 $\boldsymbol{F}$ 仍等于物体所排开液体的重量，同样可以证明浮力的作用线通过物体所排开液体的重心 C，从而说明阿基米德定律对部分浮在液面之上的物体亦成立。在上式中 $\hat{\boldsymbol{n}}_{\centerdot}$ 为沿 $\overline{A\mathscr{T}B}$ 线指向 z 向，即 $\hat{\boldsymbol{n}}_{\centerdot} = \hat{\boldsymbol{k}}$，$p_0$ 为大气压力。

利用阿基米德定律可以研究浮体的平衡问题。

设物体半浮在水面，如舰船，设被物体排开的液体之重心为 C_1，而物体的重心在 C_2 点，C_1 和 C_2 一般是不重合的。

浮在水面上物体的平衡条件是：① 浮力 $\boldsymbol{F}$ 与物体的重量 $\boldsymbol{G}$ 相等；② 浮力的作用线与重力作用线重合，即这两个力的合力矩等于零。

1. 若 C_1 在 C_2 之上，见图 6.9，则浮在水面上这个物体是稳定平衡。一旦有一干扰，使物体倾斜，则会在 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 产生的力偶矩作用下，使物体扶正，见图 6.9(b)。

2. 若 C_1 在 C_2 之下，见图 6.10，则浮在水面上这个物体是不稳定平衡。一旦有一干扰，使物体倾斜，则会在 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 产生的力偶矩作用下，使物体继续倾斜，一直至物体翻转，见图 6.10(b)。

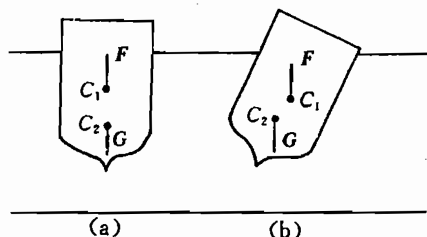


图 6.9

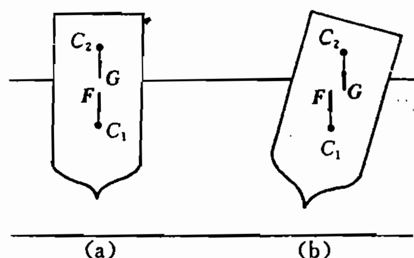


图 6.10

6.8 大气的平衡·气状星球的平衡

6.8.1 大气的平衡

大气层中的压力、密度和温度随高度的变化规律,则与不同的经纬度、季节、气候等因素有关。当我们对飞行器进行实验和计算时,所用的大气参数当然都按当时当地的大气状况作为初始数据,从而无法将这些实验结果和计算的数据进行比较和交流,为了解决这个矛盾,国际上约定了一种统一的压力、密度和温度随高度的变化规律和标准。

国际标准大气(international standard atmosphere)取海平面为基准平面 ($z=0$)。基准平面上的物理量取作

$$\left.\begin{aligned} &T_0 = 288\text{K}, \quad p_0 = 1.01234 \times 10^5\text{N/m}^2 \\ &\rho_0 = 1.225\text{kg/m}^3 = 1.225 \times 10^{-3}\text{g/cm}^3 \end{aligned}\right\} \tag{6.75}$$

高度 z 从海平面算起,在 z 从 0 到 11km 的范围,为对流层(convective layer)。在对流层,温度随高度线性地减少,以如下公式表示

$$T = T_0 - \beta z \tag{6.76}$$

其中 $T_0 = 288\text{K}$,$\beta = 0.0065\text{K/m}$,显然当 $z = 11\text{km}$ 时,$T = T_* = 216.5\text{K}$。

当:$z \geqslant 11\text{km}$ 时,为同温层(isothermal layer),在这一层温度不变

$$T = \text{const} = T_* = 216.5\text{K} \tag{6.77}$$

至于对流层和同温层的压力、密度随高度的变化,按如下方法来求。

1. 在对流层

假定大气为完全气体,其状态方程为

$$p = \rho RT, \quad p_0 = \rho_0 RT_0$$

将(6.76)式代进上式,则推出

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0} \frac{p}{1 - \dfrac{\beta}{T_0}z} \tag{6.78}$$

由于大气作为重流体,外力 $\boldsymbol{b}$ 有势,即(6.59)式成立,故有

$$\boldsymbol{b} = -g \cdot \text{grad}z \tag{6.79}$$

将如上两式代进(6.45)中的第二式,给出

$$g\text{d}z + \frac{p_0}{\rho_0}\left(1 - \frac{\beta}{T_0}z\right)\frac{\text{d}p}{p} = 0$$

将上式积分,给出

$$\frac{p_0}{\rho_0 g}\ln p - \frac{T_0}{\beta}\ln\left(1 - \frac{\beta}{T_0}z\right) = \text{const}$$

利用初始条件:$z = 0$ 时,$p = p_0$,则由上式推出压力的表达式

$$p = p_0\left(1 - \frac{\beta}{T_0}z\right)^{T_0\rho_0 g/(\beta p_0)} \tag{6.80}$$

将上式代进(6.78)式中,则给出密度的表达式

$$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{\beta}{T_0}z\right)^{\frac{T_0\rho_0 g}{\beta p_0} - 1} \tag{6.81}$$

利用(6.75)式的数据和 $\beta = 0.0065\text{K/m}$，则如上两式写成

$$p = p_0\left(1 - \frac{z}{44300}\right)^{5.256} \tag{6.82}$$

$$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{z}{44300}\right)^{4.256} \tag{6.83}$$

由以上两式(在这两式中 z 的单位为:m)可以求得 $z = 11\text{km}$ 时的压力 p_* 和密度 ρ_* 为

$$\left.\begin{aligned} p_* &= 2.25498 \times 10^4\text{N/m}^2 \\ \rho_* &= 0.3636\text{kg/m}^3 = 3.636 \times 10^{-4}\text{g/cm}^3 \end{aligned}\right\} \tag{6.84}$$

2. *在同温层*

由于在该层温度不变，则由完全气体的状态方程推出

$$\frac{p}{p_*} = \frac{\rho}{\rho_*} \tag{6.85}$$

利用上式、(6.79)式和(6.45)的第二式则给出

$$\frac{p_*}{\rho_*}\frac{\mathrm{d}p}{p} = -g\mathrm{d}z$$

将上式积分并利用 $z = 11$ 公里时，$p = p_*$，则求得

$$\frac{p}{p_*} = \frac{\rho}{\rho_*} = \exp\left(-\frac{z - 11000}{6340}\right) \tag{6.86}$$

利用(6.76)式、(6.82)式、(6.83)式和上式可以计算出不同高度，即不同 z 值处的压力、密度和温度，为了使用方便已做成图和表图，图见图 6.11，表这里从略。

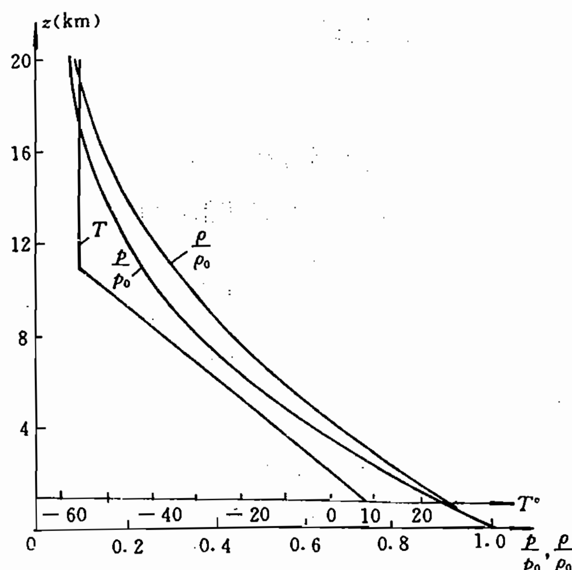


图 6.11

6.8.2 气状星球的平衡

气状星球的平衡(balance of star in gas state)，是指具有巨大质量的气体星球在自引力作用下的平衡问题。由于引力 $\boldsymbol{b}$ 有势，即存在势函数 Ψ，故有

$$b = -\operatorname{grad}\Psi = -\nabla\Psi \tag{6.87}$$

根据引力论(theory of attraction),引力势满足泊松方程(Poisson's equation)

$$\nabla^2\Psi = 4\pi\eta\rho \tag{6.88}$$

式中 η 为引力常数。假定气体是正压的且满足如下状态方程

$$p = \xi\rho^{\frac{n+1}{n}}, \quad (n \geqslant 0) \tag{6.89}$$

其中 ξ 和 n 均为常量。引进一个量 Φ

$$\Phi = \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = \xi(1+n)\rho^{\frac{1}{n}} \tag{6.90}$$

则由以上两式推出

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla\Phi \tag{6.91}$$

将(6.87)和(6.91)式代进(6.45)的第二式,给出

$$\nabla(\Psi + \Phi) = 0$$

将上式积分得到

$$\Psi + \Phi = \text{const}$$

利用上式和(6.90)或以及(6.88)式,则求得 ρ 满足的方程为

$$\nabla^2\rho^{\frac{1}{n}} = \frac{4\pi\eta}{\xi(1+n)}\rho \tag{6.92}$$

如下考虑特殊情形,假定等势为球面。而等势面、等密度面和等压面重合,因此 ρ 和 p 也是半径 r 的函数,于是(6.92)式化成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\rho^{\frac{1}{n}}\right) = -\frac{4\pi\eta}{\xi(1+n)}\rho r^2 \tag{6.93}$$

或写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{\rho}r^2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right) = -4\pi\eta r^2\rho \tag{6.94}$$

式(6.93)是非线性二阶常微分方程,不管 n 取何值都可用数值方法求解。但是在下述两个特殊情况下可以得到分析解(analytical solution)

1. 当 $n \to \infty$ 时,$\rho = \rho_0 = \text{const}$,则(6.94)式化成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right) = -4\pi\eta\rho_0^2 r^2$$

从而求得

$$p = \frac{2}{3}\pi\eta\rho_0^2(a^2 - r^2) \tag{6.95}$$

其中 a 是积分常数,可视作星球的外边界半径。

2. 当 $n = 5$ 时,可以验证(6.94)式的解为

$$p = \xi\rho^{\frac{6}{5}} = \frac{27a^3\xi^{\frac{5}{2}}}{(2\pi\eta)^{3/2}(a^2+r^2)^3} \tag{6.96}$$

其中 a 是积分常数。(6.96) 式表明,密度对所有 r 都取非零值,即气状星球无确定的外边界。但星体的总质量 m 是有限的、确定的,它等于

$$m = 4\pi\int_0^\infty \rho r^2 \mathrm{d}r = \frac{4\pi}{3a^2}\left[\frac{27a^3\xi^{\frac{3}{2}}}{(2\pi\eta)^{\frac{3}{2}}}\right]^{\frac{5}{6}}$$

从而积分常数 a 可以通过总质量 m 求得。

三　理想正压流体的重要积分·动量定理的应用

6.9　理想正压流体的重要积分

理想正压流体在有势质量力的作用下，且流动在定常和无旋(steady and irrotational)两种特殊情况下，可以将运动方程积分。这两个重要积分分别称作：伯努利积分和拉格朗日积分(Bernoulli's integral and Lagrange's integral)。

据(3.12)式，速度 $\boldsymbol{v}$ 的物质导数为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$$

根据(6.26)式的第二式和(1.184)式，在理想情况下，运动方程写成

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\frac{v^2}{2} + \mathrm{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p$$

由于流体是正压的(包括不可压)，所以存在如下一个量 Φ

$$\Phi = \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} \tag{6.97}$$

使得

$$\mathrm{grad}\Phi = \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p \tag{6.98}$$

又因流动是在重力场下，故有(见(6.57)和(6.59)式)

$$\boldsymbol{b} = \mathrm{grad}(-U),\quad U = gz \tag{6.99}$$

据以上诸式，运动方程便写成

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\left(\frac{v^2}{2} + \Phi + U\right) + \mathrm{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} = 0 \tag{6.100}$$

6.9.1　伯努利积分

如果流体除理想、正压和质量力有势外，流动还是定常的，即有

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0,\quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0$$

于是(6.100)式，化成

$$\mathrm{grad}\left(\frac{v^2}{2} + \Phi + U\right) + \mathrm{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} = 0$$

将上式两边点乘以沿流线方向的微元矢量(differetial element of vector) ds

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}s\hat{\boldsymbol{\tau}},\quad \hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\boldsymbol{v}}{v} \tag{6.101}$$

于是得到

$$\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2} + \Phi + U\right) + \mathrm{d}s\,\frac{\boldsymbol{v}}{v}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} = 0$$

即有

$$\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}+\Phi+U\right)=0 \tag{6.102}$$

上式积分，给出

$$\frac{v^2}{2}+\Phi+U=C(\psi) \tag{6.103}$$

上式便是著名的伯努利积分。$C(\psi)$ 称作伯努利常数，流线不同它亦不同，ψ 为标志不同流线的参量。注意，伯努利方程(6.103)式成立的条件是：流体理想、正压、外力有势并定常。

1. 对于不可压重流体

对于不可压重流体

$$\rho=\mathrm{const},\quad U=gz$$

再利用(6.97)式，则伯努利方程化成

$$\frac{v^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}=C(\psi) \tag{6.104}$$

显然，在上式中，当 $v=0$ 时，则成为静止流体的方程(6.64)式。式(6.104)是水力学(hydraulics)中最重要的关系式之一，在整个流体力学中也占有重要地位。

式(6.104)实质上是一个沿着一条流线上的能量守恒表达式，其左边第一项表示单位质量上的动能，第二项为势能，第三项为压力能。

2. 对于理想绝热可压缩流体——如多方气体

对于理想、绝热流体，即在(6.26)式中有

$$\lambda=0,\quad g_\Delta=0$$

于是由(6.26)的第三式以及(4.124)式(详见后面的气动动力学部分)等给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p}{\rho^k}\right)=0$$

由于现考虑的是定常情形，在定常时流线与迹线重合(见 § 3.3)，因此由上式得到

$$\frac{p}{\rho^k}=A(\psi)$$

$A(\psi)$ 为积分常数，但流线不同它亦不同。将上式代进(6.97)式中积分，给出

$$\Phi=\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}$$

将上式代进(6.103)式中，给出

$$\frac{v^2}{2}+U+\frac{k}{k+1}\frac{p}{\rho}=C(\psi) \tag{6.105}$$

上式就是在定常情况下，理想绝热可压缩流体的伯努利方程。

在上式，若忽略质量外力，则给出在气体动力学中常用的伯努利方程

$$\frac{v^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}=C(\psi) \tag{6.106}$$

6.9.2 拉格朗日积分

如下考虑这样一种流动：它除了无旋和不要求定常外，其余那些条件基本与伯努利方程成立的条件(即理想、正压、外力有势的条件)相同(除定常外)。

由于流动无旋，即有

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = 0 \tag{6.107.1}$$

而据(1.167)式，有

$$\oint_L \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

从而存在势函数 φ(即无旋便有势)，使之

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\varphi \tag{6.107.2}$$

将(6.107.1)式和(6.107.2)式代进(6.100)式中，给出

$$\frac{\partial(\mathrm{grad}\varphi)}{\partial t} + \mathrm{grad}\left(\frac{v^2}{2} + \Phi + U\right) = 0 \tag{6.108}$$

由于梯度是对空间坐标的导数，而 $\frac{\partial}{\partial t}$ 是时间求偏导。因为时间和空间坐标是相互独立的变量，因此微分虽可以变换，即有

$$\frac{\partial(\mathrm{grad}\varphi)}{\partial t} = \mathrm{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

利用上式，可把(6.108)式改写成

$$\mathrm{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \Phi + U\right) = 0$$

将该式积分，得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \Phi + U = f(t) \tag{6.109}$$

上式称作拉格朗日积分。其中 $f(t)$ 是 t 的任意函数，它由边界条件确定。对于某一固定时刻而言，$f(t)$ 在整个流场中取同一个值，这与伯努利积分只有在同一条流线上才取同一数值的情况显然不一样。

1. 对于不可压重流体

在这种情况下，(6.109)式写成

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = f(t) \tag{6.110}$$

2. 对于理想绝热可压缩流体

对于理想绝热可压缩流体(如多方气体)，(6.109)式写成

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} + U = f(t) \tag{6.111}$$

6.9.3 伯努利——拉格朗日积分

如果流体是理想的、正压的、质量力有势，流体的流动还是定常且无旋的，则(6.109)式变成

$$\frac{v^2}{2} + \Phi + U = f(t) = \mathrm{const} = C_\Delta \tag{6.112}$$

上式则称作伯努利—拉格朗日积分。其中 C_Δ 在流场中的不同点、不同时刻均取同一个值，即它为永恒常数。C_Δ 有别于沿不同流线取不同值的伯努利方程中的 $C(\psi)$，也有别于不同时刻取不同值的拉格朗日方程中的 $f(t)$。

1. 对于不可压重流体

在这种情形下，(6.112)式写成

$$\frac{v^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}=C_\Delta \tag{6.113}$$

2. 对于理想绝热可压缩流体——如多方气体

在这种情形下,(6.112)式写成

$$\frac{v^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}+U=C_\Delta \tag{6.114}$$

若略去体外力,上式表成

$$\frac{v^2}{2}+\frac{kp}{(k-1)\rho}=C_\Delta \tag{6.115}$$

6.10 动量定理的应用

利用动量定理可以解决许多不可压流体的问题,其中重要的实例之一是解射流问题,如两股射流对撞,或一股射流斜入射到刚性板上,如图 6.12 所示,我们可以计算生成射流的大小和射流对刚板的冲击力。

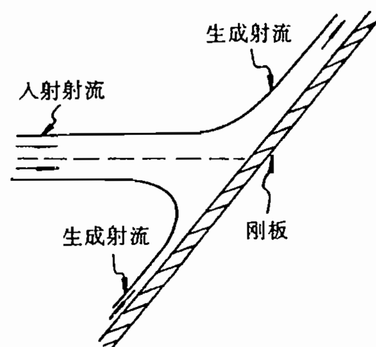


图 6.12 液体射流冲击刚板

本节不是研究一股液体射流喷射到刚板上的问题,而是研究两块金属平板的高速碰撞产生射流问题——即相当研究聚能射流武器药型罩的压垮碰撞或爆炸焊接中复板与基板的碰撞问题。作为聚能射流武器,它的基本构造原理如图 6.13 所示,其中的关键是将炸药做成一个凹形槽,在槽之上再加上一个金属制成的罩——称作药型罩,如图所示。当然作为聚能装药,亦有一种只把炸药做成凹形,但不加药型罩的情况。

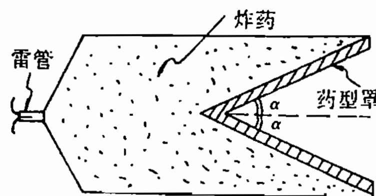


图 6.13 聚能装药

对于加有药型罩的聚能装药,炸药起爆后爆轰产物推压药型罩向轴线收聚,被压垮的药型罩在轴线发生碰撞,于是产生了金属射流并形成杵(即罩已被完全压合的部分)。现在研究碰撞射流的速度、厚度与质量(指单位长度单位宽度上射流的质量)。

由于作用在金属罩上的爆轰压力很大(10^9~10^{10}Pa),所以忽略罩的强度而把它作为理想不可压缩流体来处理。聚能装药的金属罩的压垮、碰撞与产生射流过程如图 6.14 所示,其中 α 为锥形罩的初始半锥角,β 为被压垮的罩壳在轴线上相撞时的半锥角,该角亦称作**碰撞角**,或称**压合角**,其他如图中所标明的。

对于图 6.14 所示的那种旋转对称的锥形罩研究起来比较麻烦。为了方便,同时也是为了研究爆炸压接和爆炸焊接中的碰撞射流,我们研究能够很好地近似罩产生射流的情况——平面二维夹板罩(或称楔形罩)的压垮、碰撞和产生射流的过程,见图 6.15 所示。

设：①罩板为等厚度、无限长，爆轰波沿罩板表面以恒速 D 传播；②当爆轰波每扫过板的一处，该处的板微元（简称板元）立即获得恒速 v_p，且板在该点平直地旋转一个角度 δ（其中 δ 亦称作压垮角），而 v_p 垂直于角 δ 的平分线；③罩板在变形时不伸长，$\overline{AB}=\overline{AO}$。

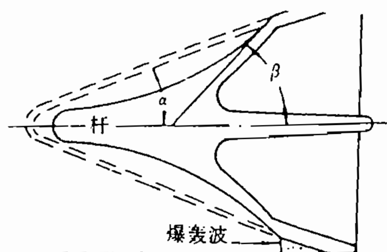


图 6.14　变形过程中的药型罩

如上所述的第二点假设，实际上并不是个假定，在第一点的假设的前提下可以精确地推出它，而且 v_p 与 D 和 δ 之间满足

$$v_p = 2D\sin\frac{\delta}{2} \qquad (6.116)$$

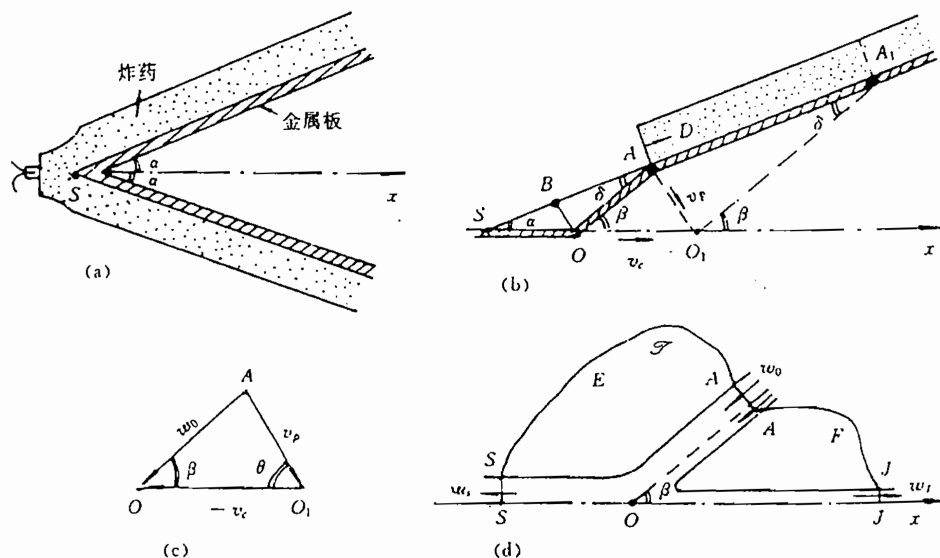


图 6.15　夹板罩及其压垮、变形等的示意图

上式称作泰勒公式（Taylor's formula），关于该公式的证明可以参看§11.12。

按上述假定，碰撞点 O 将以常速 v_c 沿轴线 x 移动。为方便，将坐标原点取在运动的碰撞点 O 上，在此动坐标系中看，整个运动为二维定常的，压垮的罩板相当以 w_0 的速度冲向碰撞点 O。关于 w_0、v_p、v_c 三者间的关系，见图 6.15(c)所示，其中

$$\begin{cases}\beta = \alpha + \delta \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} - \left(\beta - \dfrac{\delta}{2}\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}w_0 = v_p\dfrac{\cos\left(\beta - \dfrac{\delta}{2}\right)}{\sin\beta} \\ v_c = v_p\dfrac{\cos\dfrac{\delta}{2}}{\sin\beta}\end{cases}$$

现在动坐标系中只研究对称轴线 x 的上一半的碰撞情况，见图 6.15(d)。根据不压流体的伯努利方程(不考虑重力)

$$\frac{w_0^2}{2}+\frac{p_A}{\rho_0}=\frac{w_J^2}{2}+\frac{p_J}{\rho_0}=\frac{w_S^2}{2}+\frac{p_S}{\rho_0}$$

因 $\overline{AA}$ 面、$\overline{JJ}$ 面、$\overline{SS}$ 面均远离碰撞点 O，故在这些面上的压力相等，即

$$p_A=p_J=p_S \tag{6.117}$$

从而得到

$$w_0=w_J=w_S \tag{6.118}$$

再在图 6.15(d)所示的环线 $\mathscr{T}$ 上应用质量守恒和动量守恒，其中 $\mathscr{T}$ 线：

$$\mathscr{T}=\mathscr{T}_1+\overline{JS},\quad \mathscr{T}_1=\overline{JJ}+\widehat{JFA}+\overline{AA}+\widehat{AES}+\overline{SS}$$

$\mathscr{T}_1$ 线为离碰撞点 O 无限远的曲线弧，因而在 $\mathscr{T}_1$ 上压力 $p\approx p_0=\text{const}$($p_0$ 为大气压)，而在 $\widehat{JFA}$ 线和 $\widehat{AES}$ 线处没有气体流动，$v_n=0$；在 $\overline{SJ}$ 线上流体沿它流动，$v_n=0$。再设罩板厚度 $\overline{AA}=a_0$、密度为 ρ_0、杵的厚度 $\overline{SS}=a_S$、射流的厚度 $\overline{JJ}=a_J$.

对 $\mathscr{T}$ 线围成的区域运用质量守恒，则有

$$\begin{aligned}0\equiv\oint_{\mathscr{T}}\rho_0v_n\mathrm{d}l&=\int_{\overline{JJ}}\rho_0v_n\mathrm{d}l+\int_{\overline{AA}}\rho_0v_n\mathrm{d}l+\int_{\overline{SS}}\rho_0v_n\mathrm{d}l\\&=\rho_0w_Ja_J-\rho_0w_0a_0+\rho_0w_Sa_S\end{aligned} \tag{6.119}$$

对 $\mathscr{T}$ 线围成的区域运用动量守恒，则有

$$\oint_{\mathscr{T}}-p\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}l=\oint_{\mathscr{T}}\rho_0v_n\boldsymbol{v}\mathrm{d}l \tag{6.120}$$

而

$$\begin{aligned}\oint_{\mathscr{T}}p\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}l&=\int_{\mathscr{T}_1}p\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}l+\int_{\overline{SJ}}(p\hat{\boldsymbol{n}})\mathrm{d}l=\int_{\mathscr{T}_1}p_0\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}l+\int_{\overline{SJ}}(p\hat{\boldsymbol{n}})\mathrm{d}l\\&=\oint_{\mathscr{T}}p_0\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}l+\int_{\overline{SJ}}(p-p_0)\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}l\\&=\int_{\overline{SJ}}(p-p_0)\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}l=-\hat{\boldsymbol{j}}\int_{\overline{SJ}}(p-p_0)\mathrm{d}l=\Sigma\hat{\boldsymbol{j}}\end{aligned} \tag{6.121}$$

$\Sigma=-\int_{\overline{SJ}}(p-p_0)\mathrm{d}l$ 为作用在轴线上(或刚壁上)的总压力。上式中 $\hat{\boldsymbol{j}}$ 为板的单位法线，而 $\boldsymbol{i}$ 为板向(x 向)的单位矢量，见图。

$$\begin{aligned}\oint_{\mathscr{T}}\rho_0v_n\boldsymbol{v}\mathrm{d}l&=\int_{\overline{JJ}}\rho_0v_n\boldsymbol{v}\mathrm{d}l+\int_{\overline{AA}}\rho_0v_n\boldsymbol{v}\mathrm{d}l+\int_{\overline{SS}}\rho_0v_n\boldsymbol{v}\mathrm{d}l\\&=\rho_0w_J^2a_J\hat{\boldsymbol{i}}-\rho_0w_0(-w_0\cos\beta\hat{\boldsymbol{i}}-w_0\sin\beta\hat{\boldsymbol{j}})a_0-\rho_0w_S^2a_S\hat{\boldsymbol{i}}\end{aligned} \tag{6.122}$$

将(6.121)式和(6.122)式代进(6.120)式中，并比较 $\hat{\boldsymbol{i}}$ 向和 $\hat{\boldsymbol{j}}$ 向分量则给出

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{i}}\text{ 向：}\quad \rho_0w_J^2a_J+\rho_0w_0^2a_0\cos\beta-\rho_0w_S^2a_S=0\\ \hat{\boldsymbol{j}}\text{ 向：}\quad -\Sigma=a_0\rho_0w_0^2a_0\sin\beta\end{cases} \tag{6.123}$$

如果假定冲向 O 点的压垮罩在 O 点附近仍“保持原截面”，则冲击在图 6.15(d)所示的 x 轴线(刚壁)上的面积 S_0 和平均压强 $\bar{p}$ 分别为

$$S_0=\frac{a_0}{\sin\beta}$$

$$\bar{p} = -\frac{\Sigma}{S_0} = \rho_0 w_0^2 \sin^2\beta = \rho_0 v_p^2 \cos^2\left(\beta - \frac{\delta}{2}\right)$$

由式(6.119)、(6.123)和(6.118)则推出

$$\begin{cases} a_J - a_0 + a_S = 0 \\ a_J + a_0\cos\beta - a_S = 0 \end{cases}$$

从而求得碰撞射流的厚度和杵的厚度分别为

$$a_J = \frac{1}{2}a_0(1-\cos\beta) \tag{6.124}$$

$$a_S = \frac{1}{2}a_0(1+\cos\beta) \tag{6.125}$$

单位长度单位宽度上的射流与杵的质量为

$$m_J = \frac{1}{2}a_0\rho_0(1-\cos\beta) = \frac{1}{2}m_0(1-\cos\beta) \tag{6.126}$$

$$m_S = \frac{1}{2}a_0\rho_0(1+\cos\beta) = \frac{1}{2}m_0(1+\cos\beta) \tag{6.127}$$

其中　$m_0 = \rho_0 a_0$ 为单位长度单位宽度上的罩板质量

注意，如上所求得的 a_J、a_S、m_J、m_S 均对于图 6.15(a)所示的对称夹角的一半，即**相当一块平板斜碰撞到以轴线 x 为刚壁的情形，也就是爆炸焊接中复板撞击不动的"刚性"基板的情况**。如果研究的是图 6.15(a)所示的整个夹板，则厚度与质量均应乘以 2，则 a_J、a_S、m_J、m_S 为

$$\left.\begin{aligned} a_J &= a_0(1-\cos\beta) \\ a_S &= a_0(1+\cos\beta) \\ m_J &= m_0(1-\cos\beta) \\ m_S &= m_0(1+\cos\beta) \end{aligned}\right\} \tag{6.128}$$

式(6.118)所给出的射流速度值 w_J 和杵速度值 w_S 均在动坐标系下，将它们换算成不动坐标系中有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_J &= \boldsymbol{w}_J + \boldsymbol{v}_c = w_0\hat{\boldsymbol{i}} + v_c\hat{\boldsymbol{i}} \\ &= v_p\left[\cos\left(\beta - \frac{\delta}{2}\right) + \cos\frac{\delta}{2}\right] \Big/ \sin\beta\hat{\boldsymbol{i}} \\ &= v_p \frac{\cos\left(\beta - \frac{\delta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}\hat{\boldsymbol{i}} = v_p\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\hat{\boldsymbol{i}} \end{aligned} \tag{6.129}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_s &= \boldsymbol{w}_s + \boldsymbol{v}_c = -w_0\hat{\boldsymbol{i}} + v_c\hat{\boldsymbol{i}} \\ &= v_p\left[\cos\frac{\delta}{2} - \cos\left(\beta - \frac{\delta}{2}\right)\right] \Big/ \sin\beta\hat{\boldsymbol{i}} \\ &= v_p\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2}\right)}{\cos\frac{\beta}{2}}\hat{\boldsymbol{i}} \end{aligned}$$

$$= v_p \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} \hat{i} \tag{6.130}$$

如上给出了成一定角度的对称平板碰撞所产生射流的厚度和速度，它对于圆锥形的药型罩所产生的射流，亦能很好地近似使用。当然，把如上的结果用大面积平板的爆炸焊接是最恰当的，在大面积平板焊接时，基本采取平行法，即 $\alpha \approx 0$。

在 $\alpha = 0$ 时，利用(6.116)和(6.129)式，可以推出

$$v_J = 2D \quad , \quad v_S = 0$$

最后指出，如上描述金属板碰撞所产生的射流公式，若用来描述两股"真正的不可压流体"碰撞所产生的射流，当然更合适。

四　理想不可压流体的平面无旋定常流动

在工程实践中和武器设计中，我们会碰到大量的像水绕高大的桥墩流动、作低亚音速(速度一般小于 100m/s)飞行的机翼绕流(见图 6.16)、大面积平板爆炸焊接(见图 6.17，

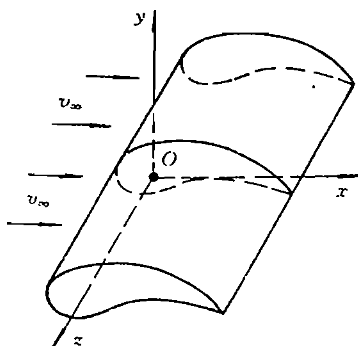


图 6.16

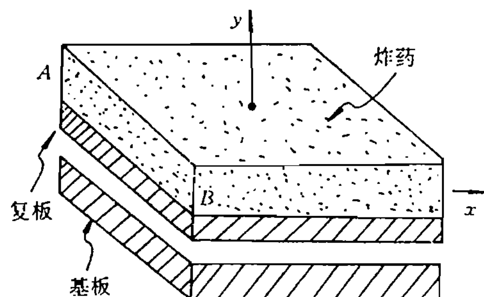


图 6.17

其中 AB 为起爆端)在碰撞点附近的"流动"情况(在远区，如求所产生的射流大小，可使用动量定理解决)，以及射流穿甲板过程等等，这些问题均可采用：理想、不可压、平面、定常、无旋流动模型来解决，亦即这种流动模型可以很好地描述液体绕流、低速气体绕流和射流问题。

作为这种模型，则有

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\rho} = 0(\text{或} \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0) \quad , \quad \mu = 0 \\
&\boldsymbol{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \quad , \quad v_z = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0 \\
&\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{6.131}$$

6.11 速度势函数和流函数

1. 速度势函数(velocity potential function)

由于现在要研究的流动是无旋的，所以存在这样一个函数——速度势函数 φ，它与速度的关系为

$$\boldsymbol{v} = \text{grad}\varphi \tag{6.132}$$

这样的 φ，当然满足 $\text{rot}\boldsymbol{v} = 0$。现从(6.132)式来求 φ，为此将该式两边点乘以 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，给出

$$\mathrm{d}\varphi = \text{grad}\varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{6.133}$$

将上式从 P_0 点积分，求 P 点的 φ 为

$$\varphi = \varphi(P) = \varphi(P_0) + \int_{P_0}^{P} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{6.134}$$

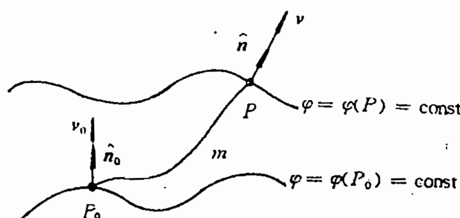


图 6.18

速度势函数具有下列性质：

(1) 速度势函数可允许相差一个任意常数，而不影响流体的流动描述。

(2) $\varphi = \varphi(x, y) = \text{const}$ 是等势线，它的法线方向和速度矢量的方向重合，见图 6.18。

(3) 沿曲线 $\overset{\frown}{P_0 m P}$ 的速度环量(velocity circulation) Γ 等于 P 点上的 φ 值与 P_0 点上的 φ_0 值之差，即

$$\Gamma = \int_{P_0}^{P} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{P_0}^{P} (v_x \mathrm{d}x + v_y \mathrm{d}y) = \varphi(P) - \varphi(P_0) = \varphi - \varphi_0 \tag{6.135}$$

(4) 如果所研究的区域是单连通区(simple connection domain)，如图 6.19(a)所示。在这样的区，沿任一条封闭回线(loop) $\mathscr{D}$ 的环量为零

$$\Gamma = \oint_{\mathscr{D}} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

从而说明积分与路线无关，只与起点 P_0 及终点 P 有关，因此由(6.133)式所求得的 φ 是单值的，所以在单连通区 φ 是单值的。

如果所考虑的区域是双连通区(dual connection domain)，如图 6.19(b)所示，在这样的区域 φ 可能是多值的，例如沿图 6.19(b) 中的 $\mathscr{D}$ 线积分，其环量 Γ 不为零

$$\Gamma = \oint_{\mathscr{D}} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = n\Gamma_0 \neq 0$$

其中 Γ_0 为绕环线 $\mathscr{D}$ 一圈的环量，n 为绕 $\mathscr{D}$ 的圈数。

△关于连通问题

如果在区域中任何两点都可用区域内一条连续曲线连接，这样的区域就称作连通区；如果区域内任一条封闭曲线可以不出边界地连续地收缩到一点，则称此连通区为单连通区；如果在区域还有内边界(如图 6.19(b))，则任一条封闭曲线，如 $\mathscr{D}$，就不能不越过边界(内边界)连续地收缩成一点，这样的区域称为多连通区，粗略地讲，如果区域内有一个内边界，则该区域称作双连通区。

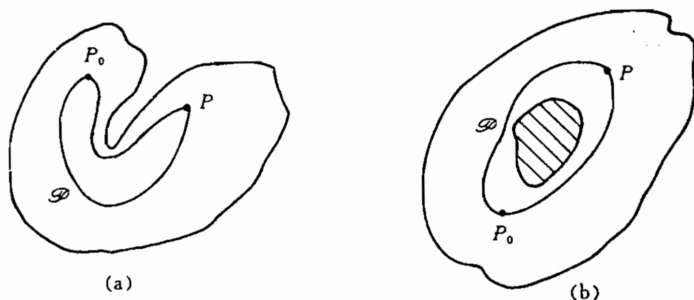


图 6.19

由上分析得知，在单连通区内由(6.133)式求 φ 时积分与路线无关，如(6.134)式；在双连通区由(6.133)式求得的 φ 则是多值的，φ 表成

$$\varphi(P)=\varphi(P_0)+n\Gamma_0 \tag{6.136}$$

由于我们所研究的流动，除了无旋外，还是平面不可压的，因而据(6.132)式有：

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\quad,\quad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{6.137}$$

据(6.131)式和上式，得到

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{6.138}$$

即 φ 为调和函数(harmonic function)，满足如上的拉普拉斯方程(Laplace equation)。

2. 流函数(stream function)

对于平面不可压流动，可以引进一个在流体力学中占有重要地位的新函数——流函数 ψ，它是根据连续性方程

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

引出的，ψ 与速度分量的关系为

$$\left.\begin{aligned}v_x&=\frac{\partial\psi}{\partial y}\\ v_y&=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{6.139}$$

利用上式可以求 ψ，即

$$\begin{aligned}\psi(P)&=\psi(P_0)+\int_{P_0}^{P}\mathrm{d}\psi\\ &=\psi(P_0)+\int_{P_0}^{P}\frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\psi}{\partial y}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= \psi(P_0) + \int_{P_0}^{P} - v_y \mathrm{d}x + v_x \mathrm{d}y$$

流函数具有下列性质：

(1) ψ 可以差一个任意常数，而不影响流动的运动描述。

(2) $\psi = \psi(x,y) = \text{const}$ 是流线，亦即它的切线方向与速度方向重合，见图 6.20。

对如上结论，证明如下。在平面流动中流线的方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y}$$

或写成

$$- v_y \mathrm{d}x + v_x \mathrm{d}y = 0 \tag{6.140}$$

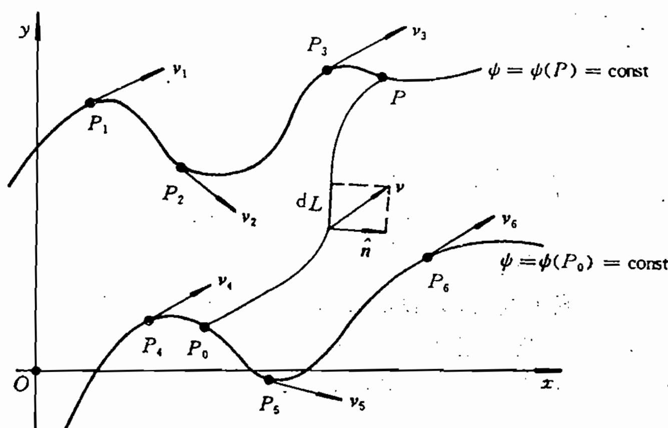


图 6.20

将(6.137)式代进(6.140)式中，给出

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\mathrm{d}y = 0$$

即

$$\mathrm{d}\psi = 0$$

积分后给出

$$\psi = \psi(x,y) = \text{const} \tag{6.141}$$

从(6.141)式的得出，清楚说明 $\psi = \text{const}$ 的曲线就是流线，常数不同的解对应着不同流线。由于函数 ψ 与流线之间有这样的关系，故称 ψ 为流函数。

3. 通过图 6.20 所示的曲线 $\widehat{P_0P}$ 的流量 Q 等于 P 点的流函数与 P_0 点的流函数之差，即

$$Q = \psi(P) - \psi(P_0) \tag{6.142}$$

证明如下。根据流量的定义

$$Q = \int_{\widehat{P_0P}} v_n \mathrm{d}L = \int_{\widehat{P_0P}} \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}L = \int_{\widehat{P_0P}} [v_x \cos(\hat{\boldsymbol{n}},x) + v_y \cos(\hat{\boldsymbol{n}},y)] \mathrm{d}L \tag{6.143}$$

由于(参见图 6.20)

$$\left.\begin{aligned} \cos(\hat{n},x)\cdot \mathrm{d}L &= \mathrm{d}y \\ \cos(\hat{n},y)\cdot \mathrm{d}L &= -\mathrm{d}x \end{aligned}\right\} \tag{6.144}$$

将上式代进(6.143)式中，给出

$$Q=\int_{\widehat{P_0P}}(-v_y\mathrm{d}x+v_x\mathrm{d}y)=\int_{\widehat{P_0P}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\psi}{\partial y}\mathrm{d}y\right)$$

$$=\int_{\widehat{P_0P}}\mathrm{d}\psi=\int_{P_0}^{P}\mathrm{d}\psi=\psi(P)-\psi(P_0)$$

即(6.142)式证毕。

4. 在单连通区若不存在源汇(source and sink)，则沿任一回线 L 有

$$Q=\oint_L v_n\mathrm{d}L=0$$

从而推出：流函数 ψ 是单值函数。若单连通区域内有源汇，或者我们在双连通区考虑问题，则一般情况下

$$Q=\oint_L v_n\mathrm{d}L\neq 0$$

由此推出，流函数 ψ 一般是多值的，且各值之间的关系为

$$\psi(P)=\psi(P_0)+nQ \tag{6.145}$$

其中 n 为绕封闭曲线的圈数。

上面我们在导出流函数时，只假定流体是不可压的，流动是平面的，此外没有加其他任何限制，因此我们所引出的流函数也适用于粘性流体、有旋流动和不定常情形。

流函数的引出，在数学上带来了某些简化，因为我们可以用一个函数 ψ 代替速度的两个分量(v_x 和 v_y)，从而减少未知函数的个数。鉴于这种原因，流函数在流体力学中得到了广泛的使用。

由于现所研究的流动是平面无旋的，据(6.131)式有

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0 \tag{6.146}$$

将(6.139)式代进上式，给出

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \tag{6.147}$$

从而看出 ψ 也是调和函数，与 φ 一样它也满足拉普拉斯方程。

6.12 复位势和复速度

根据(6.137)式和(6.139)式，可以推出

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{6.148}$$

该式称作哥西—黎曼条件(Cauchy-Riemann condition)，它把 φ 和 ψ 联系起来。如果 φ 和 ψ 中有一个已知，则可从上式求得另一个。从上式很容易证明流线和等势线正交，这是由于

$$\mathrm{grad}\varphi\cdot\mathrm{grad}\psi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0$$

上式表明等势线 $\varphi=\mathrm{const}$ 和流线 $\psi=\mathrm{const}$ 正交。

现造一个复变函数(complex function) w

$$w(z)=\varphi(z)+i\psi(z)=\varphi+i\psi \tag{6.149}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &z=x+iy \quad (\text{复数 complex number})\\ &i=\sqrt{-1}=e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (\text{虚数 imaginary number})\end{aligned}\right\} \tag{6.150}$$

w 的实部(real part)是速度势函数 φ，它的虚部(imaginary part)是流函数 ψ，由于 φ 和 ψ 之间存在着哥西—黎曼条件(6.148)式，因此根据复变函数理论，可推出 w 是 Z 的解析函数(analytic function)。式(6.149)所表示的 w 称作**复位势**(complex potential function)。

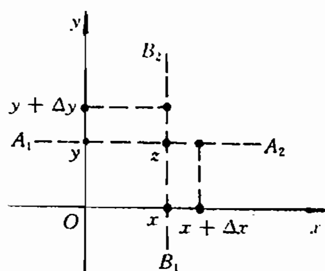


图 6.21

△关于 $w=w(z)$ 必须满足(6.148)式的问题。

由于 w 是 z 的解析函数，所以在复数平面上，见图 6.21，求 w 在一点 z 的 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$ 时，沿哪个方向取极限结果均应相同，例如：

沿 $\overline{A_1A_2}$ 线求 w 在 z 点的导数，这时

$$\Delta z=\Delta x$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{w(z+\Delta z)-w(z)}{\Delta z}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{w(z+\Delta x)-w(z)}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[\varphi(z+\Delta x)-\varphi(z)]+i[\psi(z+\Delta x)-\psi(z)]}{\Delta x}\\ &=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}\end{aligned} \tag{6.151}$$

沿 $\overline{B_1B_2}$ 线求 w 在 z 点的导数，这时

$$\Delta z=i\Delta y$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{w(z+\Delta z)-w(z)}{\Delta z}\\ &=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{w(z+i\Delta y)-w(z)}{i\Delta y}\\ &=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{[\varphi(z+i\Delta y)-\varphi(z)]+i[\psi(z+i\Delta y)-\psi(z)]}{i\Delta y}\\ &=\frac{\partial\psi}{\partial y}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\end{aligned} \tag{6.152}$$

由于(6.151)式和(6.152)式，给出的 w 的导数必须相等，从而推出哥西—黎曼条件(6.148)式。

在引进复位势后，则可确定它与复速度的关系，复速度(complex velocity)定义作

$$\tilde{v} = v_x + iv_y = ve^{i\theta} \tag{6.153}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 \\ \theta &= \mathrm{tg}^{-1}\frac{v_y}{v_x} \end{aligned}\right\} \tag{6.154}$$

θ 称作复速度的幅角(argument)

共轭复速度(conjugate complex velocity) $\bar{v}$，定义作

$$\bar{v} = \bar{\tilde{v}} = v_x - iv_y = ve^{-i\theta} \tag{6.155}$$

w 与 $\bar{v}$ 的关系，根据式(6.151)和(6.152)为

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_x - iv_y = \bar{v} \tag{6.156}$$

即复位势 w 的导数为共轭复速度。根据速度的物理实际，它是单值的，因此复位势的导数亦是单值的，即 w 与 $\bar{v}$ 之间可以互求，若 $\bar{v}$ 已知，据上式有

$$w = w(z) = w(z_0) + \int_{z_0}^{z} \bar{v}\mathrm{d}z \tag{6.157}$$

如上所论的复位势具有以下性质：

(1) $w = w(z)$ 可以差任一常数，而不影响流动的描述。

(2) $w(z) = \text{const}$，则等价于 $\varphi = \text{const}$，$\psi = \text{const}$，它们分别表示等势线和流线，而且这两族线相互正交。

(3) w 的导数与环量 Γ 和流量 Q 之间满足

$$\oint_L \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z = \oint_L \mathrm{d}w = \oint_L \mathrm{d}\varphi + i\oint_L \mathrm{d}\psi = \Gamma + iQ \tag{6.158.1}$$

亦即

$$\oint_L \bar{v}\mathrm{d}z = \Gamma + iQ \tag{6.158.2}$$

上式说明共轭复速度沿封闭回线 L 的积分，其实部为沿该封闭曲线的速度环量，而虚部为通过该封闭曲线的流量。

(4) 在无源(即 $Q = 0$) 无涡(即 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = 0$ 或 $\Gamma = 0$) 的单连通区域内，$w(z)$ 是单值的，即它表成(6.157) 式的求法。在双连通区域内或者在有源有旋的 单连通区域内，$w(z)$ 一般是多值函数。

6.13 基本流动

下面我们利用复变函数方法(method of complex function)来解决理想不可压流体的平面无旋流动。复变函数方法本身又分成两种方法：奇点法和保角映射法(methods of the singular point and keeping-angle projection)。

理想不可压流体的平面无旋流动，同具有单值导数的解析函数之间存在着对应关系。

对于任何一个理想不可压流体的平面无旋流动，都存在着对应的速度势函数 φ 和流函数 ψ，也就是说有一个复位势 $w = w(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$ 与之对应。如下将研究这样的解析函数与流动的关系。

关于奇点法。奇点法的基本精神是：首先研究某些简单但具有基本意义的解析函数以及它们所对应的基本流动，然后把这些基本的解析函数以各种方式叠加起来，根据解析函数的性质，解析函数之和仍为解析函数，从而我们便得到许多新的解析函数。根据上述的对应关系，这些新的解析函数将分别表示新的各种平面无旋流动。

利用这些新得到的解析函数及复合流动可以解决下面两类问题。第一类称为正问题，所谓正问题——就是给定物体，再求该物体绕流的复位势；第二类称作反问题——这就是给出复位势，反过来研究该位势可表示什么样的平面无旋流动。然而，利用奇点法解决正问题，原则上虽不存在问题，但实际上做起来相当困难，所以我们多用奇点灶来解反问题，只须把某些基本流动叠加起来，然后研究并确定其复合解析函数代表什么平面无旋流动即可。这种方法的最大优点在于它十分简便，而且也确实可以利用它得到许多有用的平面无旋流动，但因这种方法实际上是凑合的，不能解决所有实际问题，故有局限性。

综上所述可以看出，奇点法包含两个主要步骤：第一，基本解析函数和基本流动的研究；第二，基本流动的叠加。如下先研究基本流动。

6.13.1 **均匀直线流**(constant straight flow)

均匀直线流，或称均匀流(constant flow)，是指在流场中各点处的速度矢量完全相同且不随时间变化的一种流动。如下的解析函数 w 可以描述这种流动

$$w = az \quad , \quad a = a_1 + ia_2 \tag{6.159}$$

其中 a_1 和 a_2 为常实数(constant real mumbers)。上式与(6.149)式联立，给出

$$\varphi + i\psi = (a_1 + ia_2)(x + iy)$$

即有

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= a_1x - a_2y \\ \psi &= a_2x + a_1y\end{aligned}\right\} \tag{6.160}$$

在上式中当 $\varphi = \text{const}$ 时，它为倾斜夹角为 $\arctan\dfrac{a_1}{a_2}$ 的等位势线，常数取值不同对应的等势直线亦不同；$\psi = \text{const}$ 则为倾斜夹角为 $\arctan\left(-\dfrac{a_2}{a_1}\right)$ 的流线，常数不同则对应不同的直流线。流线和等势线当然正交，如图 6.22 所示。

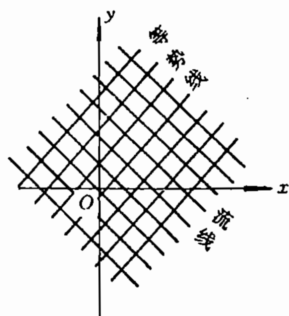


图 6.22

由式(6.159)可以求得共轭复速度

$$\bar{v} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = a \tag{6.161}$$

由此可见，速度处处为常数。

由流线的形状及速度分布可以确定，线性函数 $w = az$ 代表其共轭复速度为 a 的均匀直线流动。

如果均匀流在无穷远处的速度为

$$v_{\infty} = (v_{x\infty}, v_{y\infty})$$

则

$$a = \bar{v}_{\infty} = v_{x\infty} - iv_{y\infty}$$

于是(6.159)式可以表成

$$w = \bar{v}_{\infty} z \tag{6.162}$$

6.13.2 **点源和点汇**(point source and point sink)

如下对数函数(logarithmic function)可以描述点源或点汇流动

$$w = a\ln z \quad , \quad a = \text{const}(\text{为实数}) \tag{6.163}$$

而 z 可以表成

$$\left.\begin{aligned} z &= x + iy = re^{i\theta} \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= tg^{-1} y/x \end{aligned}\right\} \tag{6.164}$$

于是从(6.149)、(6.163)和(6.164)式得到

$$\varphi = a\ln r \quad , \quad \psi = a\theta \tag{6.165}$$

流线：$\psi = a\theta = \text{const}$(即 $\theta = \text{const}$) 是从坐标原点发出的射线族；而等势线：$\varphi = a\ln r = \text{const}$(即 $r = \text{const}$) 是以原点为心的圆族。当然这两族曲线是正交的，见图 6.23。

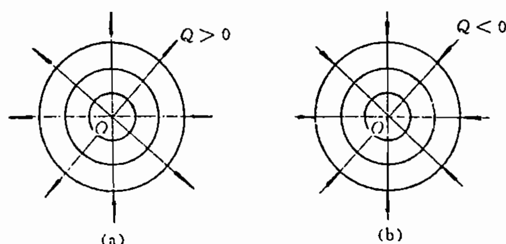


图 6.23

现在我们来求通过围绕原点 O 的任意封闭曲线 L 的流量 Q，据(6.158)和(6.163)式以及留数定理(residual theorem)，则有

$$\Gamma + iQ = \oint_L \frac{dw}{dz} dz = \oint_L \frac{a}{z} dz = 2\pi i a$$

从而推出

$$\Gamma = 0 \quad , \quad Q = 2\pi a \tag{6.166}$$

上式表明，通过围绕 O 点的任意封闭回线 L 的流量 $Q = 2\pi a$，由此可见，单位时间内从原点 O 有体积为 $2\pi a$ 的流体流出(或流入)。

为了讨论流体的流出流入，利用(6.166)式将(6.163)式改写成

$$w = \frac{Q}{2\pi} \ln z \tag{6.167}$$

从上式求出共轭复速度 $\bar{v}$ 为

$$\bar{v} = \frac{dw}{dz} = \frac{Q}{2\pi z} = \frac{Q}{2\pi r} e^{-i\theta} \tag{6.168}$$

由此得到复速度 $\tilde{v}$

$$\tilde{v} = \bar{\bar{v}} = \frac{Q}{2\pi r}e^{i\theta} \tag{6.169}$$

该式表明，当 $Q>0$ 时，速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 同向，流体由原点向外流出；当 $Q<0$ 时，速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 反向，流体由外向原点流入。此外，对于上述两种情况，其速度方向与所在点幅角 θ 相同，而速度的大小为

$$|\tilde{v}| = \left|\frac{Q}{2\pi r}\right|$$

当 $r=0$ 时，$|\tilde{v}| \to \infty$. 随 r 的增加，$|\tilde{v}|$ 以 $1/r$ 的阶次逐渐减小，在无穷远处则趋于零。

通过上述讨论，做出如下结论：

当 $Q>0$ 时，(6.167) 式给出的复位势 w 代表**点源**，流量为 Q，见图 6.23(a)；

当 $Q<0$ 时，(6.167) 式给出的复位势 w 代表**点汇**，流量为 Q，见图 6.23(b)；

如果如上所研的点源点汇不是取在原点，而在 $z=z_0$ 处，其复位势表成

$$w = w(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln(z-z_0) \tag{6.170}$$

6.13.3　点涡(point vortex)

如下对数函数描述点涡流动

$$w = ib\ln z \quad , \quad b = \text{const}(\text{为实数}) \tag{6.171}$$

再根据(6.149)式，便从上式得到

$$\varphi = -b\theta \quad , \quad \psi = b\ln r \tag{6.172}$$

流线为 $\psi = b\ln r = \text{const}$，即 $r=\text{const}$，它们是以 O 点为心的圆族；等势线 $\varphi = -b\theta = \text{const}$，即 $\theta = \text{const}$，它们是以 O 点为出发点的射线族，见图 6.24。

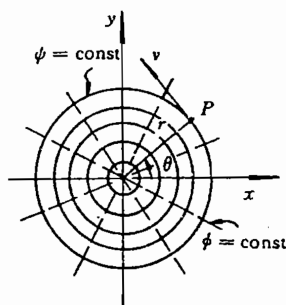


图 6.24

现求围绕 O 点的任意封闭回线 L 上的速度环量 Γ，据(6.158)式和(6.171)式以及留数定理，则有

$$\Gamma + iQ = \oint_L \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z = \oint_L \frac{ib}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i(ib) = -2\pi b$$

从而推出

$$\Gamma = -2\pi b \quad , \quad Q = 0 \tag{6.173}$$

上式表明，在原点 O 处有一强度为 Γ 的点涡。

利用上式，将(6.171)式和(6.172)式的 φ 改写成

$$w = w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z \tag{6.174}$$

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \tag{6.175}$$

由上式求得

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0 \\ v_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned}\right\} \tag{6.176}$$

由此看出，速度是沿以 O 点为心的圆周方向。当 $\Gamma>0$ 时，$v_\theta>0$ 点涡运动是逆时针旋转；当 $\Gamma<0$ 时，$v_\theta<0$，点涡运动是顺时针方向旋转。其速度的大小为 $|\Gamma/(2\pi r)|$，它在原点处为无穷大，随 r 增大，速度大小以 $1/r$ 的阶次逐渐减小，到无穷远处则趋于为零。

通过以上分析可以确定，(6.174) 式描述在原点有一强度为 Γ 的点涡。

如果点涡不在坐标原点而在 $z=z_0$ 处，则复位势为

$$w=w(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z-z_0) \tag{6.177}$$

6.13.4 **偶极子源**(doublet flow)

如下形式的倒数函数(reciprocal function)代表偶极子流动。

$$w=w(z)=C/z \tag{6.178}$$

其中 C 为复常数。

如下证明上式为何代表偶极子流动。

设在坐标原点 O 有一个点汇，在 z_0 点有一个点源，其强度(流量)均为 Q，图 6.25 画出了这种情况。其中 z_0 可表成

$$z_0=le^{i\beta} \tag{6.179}$$

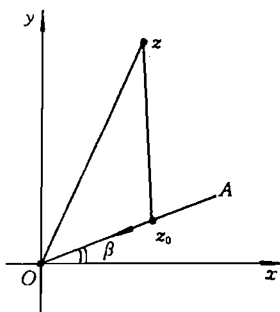


图 6.25

上述这一点源、一点汇在复平面上任一点 z 处所造成的影响，即所构成的 z 点的复位势，等于单个点汇和单个点源之复位势相加，于是据(6.167)和(6.170)式，有

$$w=w(z)=-\frac{Q}{2\pi}\ln z+\frac{Q}{2\pi}\ln(z-z_0)$$

设 z_0 为沿 $\overline{AO}$ 线趋于 O 点的动点，并令：$z_0=-\Delta z$，同时考虑到(6.179)式，则可把上式改写成

$$w=w(z)=\frac{Q}{2\pi}\cdot\Delta z\,\frac{\ln(z+\Delta z)-\ln z}{\Delta z}=-\frac{Ql}{2\pi}e^{i\beta}\,\frac{\ln(z+\Delta z)-\ln z}{\Delta z} \tag{6.180}$$

令 z_0 沿 $\overline{AO}$ 线趋于 O 点时，上式右边各“因式”均有极限，即有

$$\lim_{\substack{z_0\to 0\\(l\to 0)}}Q=\infty\quad,\quad\lim_{\substack{z_0\to 0\\(l\to 0)}}(Ql)=m(\text{它为有限的确定值}) \tag{6.181}$$

而

$$\lim_{\substack{z_0\to 0\\(\Delta z\to 0)}}\frac{\ln(z+\Delta z)-\ln z}{\Delta z}=\frac{1}{z}$$

再令

$$M=me^{i\beta}$$

利用上述诸式，则推出 z_0 沿 $\overline{AO}$ 线趋于 O 点的情况下的复位势

$$w=w(z)=-\frac{me^{i\beta}}{2\pi}\frac{1}{z}=-\frac{M}{2\pi}\frac{1}{z} \tag{6.182}$$

满足(6.181)式条件的一对无限邻近的点源和点汇称为偶极子(doublet)，其中的 m 称为偶极子的矩。由此可见，倒数函数 C/z 代表偶极子产生的流动，其中的 $C=-M/(2\pi)$，见(6.178)式和(6.182)式。

现在研究(6.182)式表示的复位势的流线、等势线及速度之分布。为了方便起见,令 $\beta = \pi$,即偶极子轴线为负 x 轴向,于是(6.182)式表成如下形式

$$w = w(z) = \frac{m}{2\pi}\frac{1}{z} \tag{6.183}$$

依据(6.149)式,由上式得到

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{m}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\\ \psi &= -\frac{m}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\end{aligned}\right\} \tag{6.184}$$

流线 $\psi = \text{const}$,即 $x^2+y^2+cy=0$,代表其圆心在 y 轴上而且均过原点的圆族;等势线 $\varphi = \text{const}$,即 $x^2+y^2-cx=0$,代表其圆心在 x 轴上而且均过原点的圆族。这两个圆族当然是正交的,见图 6.26。

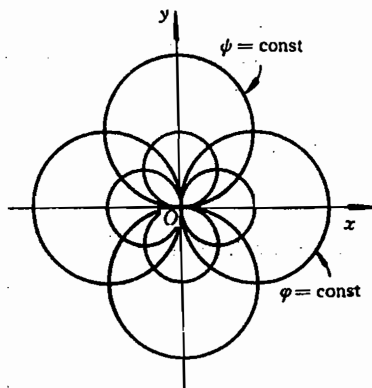


图 6.26

由(6.183)式,可以求得共轭复速度

$$\bar{v} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = -\frac{m}{2\pi}\frac{1}{z^2} = -\frac{m}{2\pi r^2}e^{-2i\theta}$$

其速度大小 $|\bar{v}| = \left|\frac{m}{2\pi r^2}\right|$,随 r 增加而减小,当 $r\to\infty$ 时 $|\bar{v}|\to 0$。

按(6.158)式和上式,并利用留数定理,则有

$$\Gamma + iQ = \oint_L \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \oint_L -\frac{m}{2\pi}\frac{1}{z^2}\mathrm{d}z = 0$$

由此得到

$$\Gamma = 0 \quad , \quad Q = 0 \tag{6.185}$$

从而说明,沿着环绕 O 点的任一条封闭回线 L,其速度环量为零,流量亦为零。这是当然的,因为 L 内无涡,故沿 L 的环量为零;同时,自点源流出的流体全部流入点汇,因此沿 L 的流量亦为零。

如果偶极子不在坐标原点 O 而在 z_0 点,则复位势为

$$w = w(z) = -\frac{M}{2\pi}\frac{1}{z-z_0} \tag{6.186}$$

6.13.5 **绕任意拐角流动**(flow around arbitrary corner)

如下幂次函数(power function)能够描述任意角度的直壁拐角流动

$$w = w(z) = Az^n \tag{6.187}$$

其中 A 与 n 皆为常实数。在上式中利用:$z = re^{i\theta}$,则得到

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= Ar^n\cos n\theta\\ \psi &= Ar^n\sin n\theta\end{aligned}\right\} \tag{6.188}$$

由上式得出零流线为

$$\theta = 0 \quad 和 \quad \theta = \pi/n \tag{6.189}$$

这两条自原点发出的射线，它们构成夹角为 π/n 的角形区域，其中 $n=1$、$n>1$、$n<1$ 分别是夹角为 π、小于 π、大于 π 的角形区域。图 6.27 表示出了六个不同 n 取值的区域，不难看出 n 应大于 1/2，否则会得到大于 2π 的区域(见(6.189)式)，这显然是不可能的。为了使读者了解在角形区内产生的是什么样的流体运动，我们在图 6.27 中画出了流动图案供读者参考。

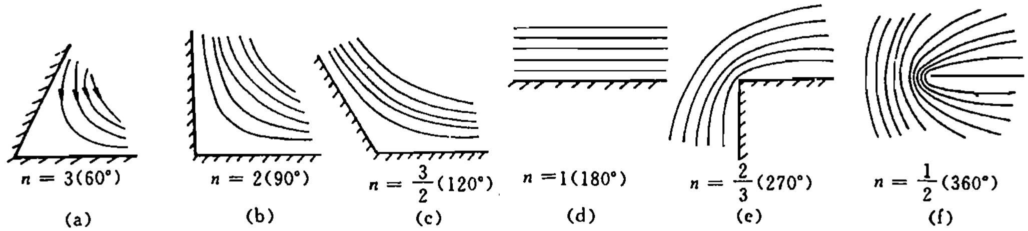


图 6.27

根据(6.188)式，我们可以求得径向速度 v_r 和角向速度 v_θ

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} = nAr^{n-1}\cos n\theta \\ v_\theta &= \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = -nAr^{n-1}\sin n\theta \end{aligned}\right\} \tag{6.190}$$

显然，当 $\theta=0$ 时

$$v_r = nAr^{n-1} \quad , \quad v_\theta = 0$$

当 $\theta=\pi/n$ 时

$$v_r = -nAr^{n-1} \quad , \quad v_\theta = 0$$

于是，当 $A>0$ 时，流动方向如图 6.27(a) 中的箭头所示。根据流线图形及流动可以确定 $w=Az^n$ 代表的是绕 π/n 角的流动。当 $n>1$ 时得到的是绕小于 π 角的流动；当 $1/2\leqslant n<1$ 时，得到的是绕大于 π 角的流动。

如下，考察在角点处的速度大小。由(6.190)式得到速度 v

$$v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}=n|A|r^{n-1} \tag{6.191}$$

当 $r\to 0$ 时有

$$v=\begin{cases} 0, & n>1 \\ |A|, & n=1 \\ \infty, & n<1 \end{cases} \tag{6.192}$$

上式清楚地说明，角点处的流速在 $n>1$ 和 $n<1$ 时具有截然不同的特性，小于 π 角的绕流在角点处的流速为零；大于 π 角的绕流在角点处的流速趋于无穷大，根据伯努利方程可推出在该处的压力趋于负无穷，等于 π 角的直线流动介乎两者之间，此时在角点处的速度取有限值。

由(6.191)式我们可以看出，当 $n>1$，$r\to\infty$ 时 $v\to\infty$，远方的流体沿某边线以无穷大的速度流来，然后沿另一条边线以无穷大的速度流去。这样的流动在实际上当然是不可

能存在的。绕角流之所以具有普遍性是因为角点附近的流动反映了物体绕流问题中角点附近的流场,因此可以用它来分析被绕流物体之角点附近的流动特性。

6.14 圆柱的有环量与无环量的绕流

基本流动的主要功效体现在它们的联合应用上。圆柱定常绕流问题是平面绕流问题中最简单的,也是在实际问题中经常遇到的。例如,气流绕过粗大的高压电线的流动,水绕圆形桥墩的流动。此外,圆柱绕流问题在二维机翼理论中具有根本的重要性,因为利用它可以解决任意翼型绕流问题。由于理论和实际的重要性,所以我们对圆柱绕流问题进行研究。这种绕流分为有环量和无环量两种情况。

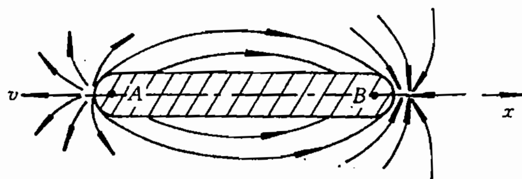


图 6.28

6.14.1 圆柱的无环量绕流

我们将基本流动按一定物理考虑进行叠加。为了解这种绕流问题需要用哪些基本解来叠加,先从物理直观分析,现考虑图 6.28 所示的细长体,它以 v 速度朝 x 的负向运动,在物体的前端 A 附近流体不断地受挤压,而在尾后 B 点附近被物体"让出来"的空间其流体又汇合起来,如图所示。这样的物体在流体中的运动就类似于前端有个点源、后端有个点汇的情形,这个运动是物体在静止的流体中运动,运动是不定常的。如果将坐标系取在物体上,则变成物体静止,而流体从 $x=-\infty$ 处以 $v=v_\infty$ 速度流向细长体,所以描述整个流动应是平行流再加上源和汇。现在让细长体的前缘的曲率中心 A 逐渐靠近后缘的曲率中心 B,当两个中心重合时物体则变成一个圆柱体,这时前端的点源和后端的点汇也应重合在一起变成偶极子(注意偶极子的轴线方向恰好同来流方向相反,因此我们预计:这个圆柱定常绕流应由如下两个基本流动叠加起来描述,这两个基本流动是:

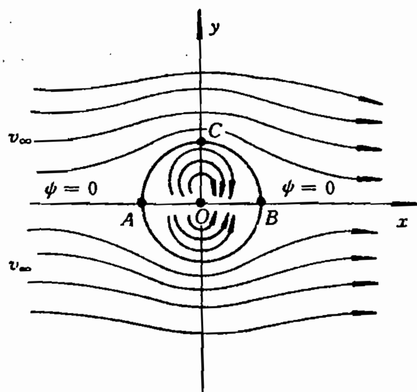


图 6.29

①速度为 v_∞(实数)的平行流;

② 矩为 m、轴线方向与来流相反的偶极子。

取这样的坐标系:原点 O 处放一个偶极子,Ox 轴沿均匀平行流方向,如图 6.29 所示。于是根据(6.183)式和(6.162)式(注意这时 $\bar{v}_\infty=v_\infty$),则给出复位势

$$w = w(z) = v_\infty z + \frac{m}{2\pi}\frac{1}{z} \tag{6.193}$$

为了确定该复位势是否能描述我们的圆柱绕流，我们做以下研究。由上式的实部和虚部给出

$$\varphi = v_\infty x + \frac{m}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\psi = v_\infty y - \frac{m}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

当 ψ 等于常数便是一条流线，即

$$v_\infty y - \frac{m}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = \text{const}$$

它是一族由三次方程所表示的曲线，其中零流线，即 $\psi = 0$，为

$$\left(v_\infty - \frac{m}{2\pi}\frac{1}{x^2+y^2}\right)y = 0$$

由该方程推出如下两个方程

$$y = 0 \tag{6.194}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{m}{2\pi v_\infty} = R^2 \tag{6.195}$$

式(6.194)为 x 轴，而式(6.195)为半径 $R = \sqrt{m/(2\pi v_\infty)}$ 的圆周线，我们把这个圆想象成一个物体的截面(这条零流线用物体截面代替，对流动毫无影响，因为物体本身就是一条流线)。由此可见，平行流和偶极子的叠加后，在圆内是偶极子流动，在圆外则等于柱体绕流，从而证实我们的预先估计是正确的。

如果已知来流速度 v_∞ 和圆柱半径 R，则可由下式确定偶极矩 m

$$m = 2\pi v_\infty R^2 \tag{6.196}$$

将上式代进(6.193)式中则给出绕这个圆柱体流动的复位势

$$w = w(z) = v_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right) \quad , \quad |z| \geqslant R \tag{6.197}$$

如下确定圆柱体上的速度分布、压力分布。对上式求导便给共轭速度

$$\bar{v} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = v_\infty\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right)$$

在圆周 $z = Re^{i\theta}$ 上 $\bar{v}$ 为

$$\begin{aligned}\bar{v} &= v_\infty(1 - e^{-2i\theta}) = (2v_\infty\sin\theta)ie^{-i\theta} \\ &= (-2v_\infty\sin\theta)(-i)e^{-i\theta} = -2v_\infty\sin\theta e^{-i(\theta+\frac{\pi}{2})}\end{aligned}$$

从上式便可求复速度 $\bar{v}$，从而得到在圆柱上的速度矢量 $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{v} = -2v_\infty\sin\theta\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right] = -2v_\infty\sin\theta\hat{\theta}_0$$

即沿圆柱体只有角向速度 v_θ(这是当然的，在上式中 $\hat{\theta}_0$ 为角向单位矢量)

$$v_\theta = -2v_\infty\sin\theta \tag{6.198}$$

从上看出，沿圆柱体速度按正弦分布，并且速度 $v = |v_\theta| = 2v_\infty|\sin\theta|$ 分别对 x 轴和 y 轴

对称。由于沿圆柱表面的速度值 v 已知，因此可以利用伯努利方程

$$p=\frac{\rho v^2}{2}=p_\infty+\frac{\rho v_\infty^2}{2} \tag{6.199}$$

求得沿柱体表面的压力 p，由于 v 的对称性，所以 p 亦是对 x 轴和 y 轴对称，——从而推出作用在柱体的合外力等于零，即圆柱不受垂直气流方向的升力(lift)，也不受迎着气流方向的阻力(resistance)，不存在升力与实际情况符合，但不存在阻力却与实际不符，这就是著名的达朗贝尔洋谬(d'Alembert's paradox)。之所以出现这种荒谬，是由于没有考虑粘性对圆柱体所产生的摩擦阻力，以及由于边界层(boundary layer)的分离所产生的压差阻力。

虽然上述的位势函数描述的圆柱绕流问题的结果，在压力和阻力等都和实际相差较大，然而它毕竟为分析粘性流动提供了必要的数据和资料，同时它也是描述真实流动的基础，再加上它在机翼理论的基础作用，所以它在绕流问题仍然具有基本的重要性。例如把上述理论稍加修正，便可更好地描述实际问题。

6.14.2 圆柱的有环量绕流

如上的复位势描述圆柱绕流之所以与实际不符，是由于没考虑流体的粘性等，特别是在物体的表面上，为了验证这一事实，我们可在风洞(wind tunnel)做一个如图 6.30 所示的实验，一个半径为 R 的圆柱筒在电机带动下可绕 oz 轴旋转，ox 方向为风洞风吹的方向，oz 轴固定在可沿 y 向滑轨自由移动的小车上。按如下步骤实验：

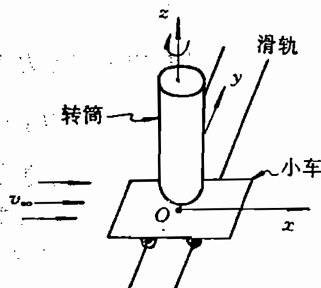


图 6.30

① 只开动电机让圆筒转动，但不吹风，这时不论转动角速度 ω 指向 z 向或背着 z 向，小车都不动；

② 电机关闭，风洞吹风，这时小车也不动；

③ 风洞吹风、开关打开圆筒转动，这时可以观察到：当 ω 指向 z 向时，小车向"$-y$ 向"运动；当 ω 指向"$-z$ 向"时，小车朝 y 向运动。而且圆筒转动越快、风速越大，则小车运动得也越快。这就提出一个问题：推动小车的 y 向作用力(升力)是如何产生的?它与风速和转速有何关系?

为了回答这些问题，我们分析上面的实验。圆筒在空气中旋转，由于粘性的缘故，带动周围的空气跟着运动(如果空气无粘性则不会如此)，紧贴着筒面的气体随筒一块转，但离筒面越远，气体的转速越小，——这样的流动可用圆心处有一个强度为 Γ 的点涡来模拟，因被转筒带动旋转的气体基本限于筒面附近，只要离开筒面，气体仍可视作理想流体。——于是成了有环量的理想流体绕圆柱绕流问题。

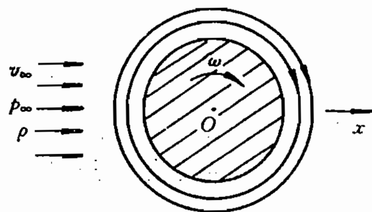


图 6.31

基于如上分析，我们可以把在均匀平行流中以常速($\omega=\text{const}$)旋转的圆筒绕流问题抽象成图 6.31 所示的模型，即圆柱无环量绕流模型加上圆心处强度为 $-\Gamma$ 的点涡(其中

$\Gamma > 0$)，因此可试采用如下复位势描述

$$w = w(z) = v_{\infty} z + v_{\infty} \frac{R^2}{z} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \tag{6.200}$$

这就是圆柱有环量绕流问题的数学描述。

上式的确能描述图 6.31 所示的模型，因为该式右边第三项表示的是点涡流动，其流线全是圆周线，且在无穷远处速度趋于零，所以它并没有破坏头两项表示的从无穷远处以 v_{∞} 速度的均匀来流绕圆柱无环量流动，而加上这第三项后只改变了沿任一条绕原点的封闭回线的速度环量不再为零而等于 Γ。

从式(6.200) 可以求得在圆柱 $r = R$ 上的速度分布为

$$v_{\theta} = -2v_{\infty}\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \tag{6.201}$$

显然，它与(6.198)式不同，不再以 x 轴对称。根据伯努利方程可求得沿圆柱上的压力

$$p = \text{const} - \frac{\rho v^2}{2} = \text{const} - \frac{\rho}{2}\left(2v_{\infty}\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2$$

圆柱所受的合力 $\boldsymbol{F}$ 为

$$\boldsymbol{F} = \oint_L - p\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}L$$

于是得到升力即 $\boldsymbol{F}$ 的 y 向分力 F_y

$$F_y = -\oint_L p\cos(\boldsymbol{n}, y)\mathrm{d}L = \rho v_{\infty}\Gamma \tag{6.202}$$

上式给出了升力与环量之间的关系，即升力的大小精确地与环量 Γ 成正比，同时亦与来流速度 v_{∞} 和流体密度 ρ 成正比。要确定升力的方向，只要由来流速度方向逆环量方向旋转 $\pi/2$ 即为升力方向。这个关系式称作儒科夫斯基(H. E. Жуковский)定理，它在绕流问题中具有普遍意义，它不仅对圆柱是正确的，而且对于有尖后缘的任意翼型亦完全适用。

6.15 保角变换·任意物体绕流问题·环量的确定

本节考虑其包面为 L 的任意形状物体，在无穷远处流速为 v_{∞} 的均匀平行流场 D 中做不脱体绕流(即流体紧围绕物体表面流动)，我们要找出一个描述这种流动的解析函数——复位势 $w = w(z)$，它在 $D + L$ 上连续，且满足：

$$\left.\begin{aligned} &\text{① 在 } L \text{ 上：} \mathrm{Im}w(z) = \psi = \text{const} \\ &\text{② 在无穷远处：} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \bar{v}_{\infty} \end{aligned}\right\} \tag{6.203}$$

为了解决这种绕流问题，我们将采用保角映射方法(method of keeping-angle projection)

6.15.1 保角变换的概念(concept of keeping-angle transformation)

在均匀平行来流的流场中，对于像圆柱形状的那样物体绕流问题很好处理，而对于任意形状的物体要直接给出描述流动的复位势就难了。为此，我们需要作个变换，将 z 平面变成一个很容易写出其流动复位势的 ζ 平面，即要找出一个适当的解析函数 ζ：

$$\zeta = \zeta(z) = \xi(z) + i\eta(z) = \xi + i\eta \tag{6.204}$$

其中 ξ 和 η 都 z 的实数函数。如上函数将 z 平面上的一个区域 D 变成 ζ 平面上一个区域 $\mathscr{D}$，

即 z 平面上任一个点 z_0 变成 ζ 平面上一个点 $\zeta_0=\zeta(z_0)$，z 平面上的一条曲线变成 ζ 平面上的一条曲线，如 L_1 变成 $\mathscr{L}_1$、L_2 变成 $\mathscr{L}_2$，见图 6.32。

我们姑且不讨论这种变换函数的具体形式，而研究这种解析函数所具有的特性。按定义，$\zeta=\zeta(z)$ 在 z_0 点的导数为

$$\zeta_0=\zeta'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{\zeta(z)-\zeta(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\zeta}{\Delta z} \tag{6.205}$$

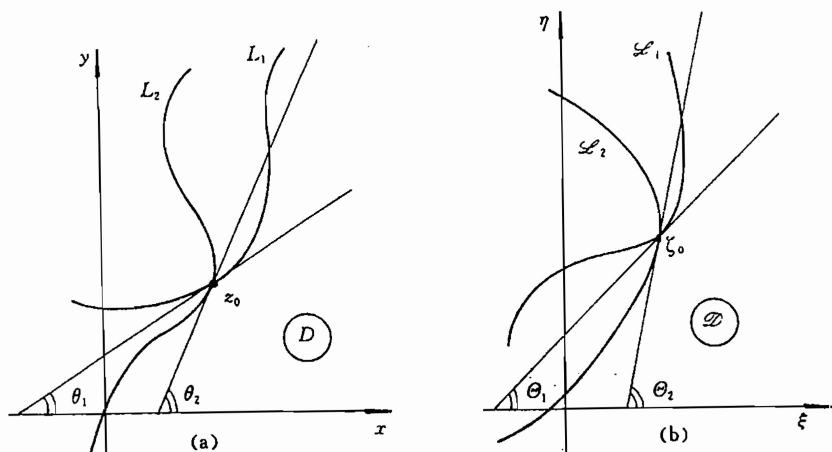


图 6.32

将上式中的 Δz 和 $\Delta\zeta$ 改写如下：

$$\Delta z=(x-x_0)+i(y-y_0)=\Delta x+i\Delta y=\Delta re^{i\theta} \tag{6.206}$$

其中

$$\begin{cases}\Delta r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \quad (\text{实数})\\ \theta=\text{tg}^{-1}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\text{实数})\end{cases}$$

而

$$\Delta\zeta=(\xi-\xi_0)+i(\eta-\eta_0)=\Delta\xi+i\Delta\eta=\Delta Re^{i\Theta} \tag{6.207}$$

其中

$$\begin{cases}\Delta R=\sqrt{(\Delta\xi)^2+(\Delta\eta)^2} \quad (\text{实数})\\ \Theta=\text{tg}^{-1}\dfrac{\Delta\eta}{\Delta\xi} \quad (\text{实数})\end{cases}$$

将(6.205)和(6.207)式代进(6.205)式中，则给出

$$\zeta_0=\lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{\Delta R}{\Delta r}e^{i(\Theta-\theta)}\right] \tag{6.208}$$

将 ζ_0 写成指数形式

$$\zeta_0=\zeta'(z_0)=R_0^*e^{i\omega_0} \tag{6.209}$$

按照解析函数的性质，ζ_0 只与 z_0 值有关，而与求导的路线无关，故实数 R_0^* 和 ω_0 只与 z_0 值有关。由如上两式得出

$$\zeta_0 = R_0^* e^{i\omega} = \left(\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta r}\right) \cdot \left(\lim_{\Delta z \to 0} e^{i(\Theta - \theta)}\right) \tag{6.210}$$

如果在求 $\zeta(z)$ 在 z_0 点的导数 ζ_0 时，Δz 是沿着图 6.32(a) 中 L_1 线趋于零，从而 $\Delta\zeta$ 是沿图 6.32(b) 中 $\mathscr{L}_1$ 线趋于零，于是由上式推出（"arg"符号表示取复数的幅角）

$$\arg\zeta_0 = \omega_0 = \lim_{\Delta z \to 0}(\Theta - \theta) = \Theta_1 - \theta_1$$

同理，若在(6.205)式中，Δz 沿 L_2 线趋于零，从而 $\Delta\zeta$ 沿 $\mathscr{L}_2$ 线趋于零，于是从(6.210)式推出

$$\arg\zeta_0 = \omega_0 = \lim_{\Delta z \to 0}(\Theta - \theta) = \Theta_2 - \theta_2$$

这样，由以上两式便得到

$$\theta_2 - \theta_1 = \Theta_2 - \Theta_1 \tag{6.211}$$

上式表明，过 z_0 点任意两条曲线的夹角 $(\theta_2 - \theta_1)$ 等于在 ζ 平面上过其对应点 ζ_0 处的那两条对应曲线的夹角 $\Theta_2 - \Theta_1$，这就是**保角变换**的含意。

从以上分析还可以看出，如果 $z = z_0$ 是奇点，即

$$\zeta_0 = \zeta'(z_0) = 0 \quad 或 \quad \zeta_0 = \zeta'(z_0) = \infty$$

显然变换则不保角，因为这时 $\arg\zeta_0$ 是个不确定值，当然也就推不出(6.211)式。

6.15.2 解决任意物体绕流的方法

按(6.203)式的要求，对于在均匀来流 v_∞ 中边界线为 L 的任意物体的绕流，若直接写出其描述流动的复位势 $w(z)$ 是困难的，然而对于圆柱体绕流的复位势很容易给出（见上节）。因此我们要做一个变换，将 z 平面变换成 ζ 平面，即要找出一个解析函数 $\zeta = \zeta(z)$，使得 z 平面上的区域 D 变成 ζ 平面上的区域 $\mathscr{D}$；原物体的边界 L 变成 ζ 平面上半径为 R 的圆线 $\mathscr{L}$.

设 $\zeta = \zeta(z)$ 是单值解析函数，其反函数为：$z = z(\zeta)$，它将半径为 R 的圆线 $\mathscr{L}$ 外的区域 $\mathscr{D}$ 单值变换到 L 外的区域 D，并满足：

$$\left.\begin{array}{l} ①\infty \text{ 点对应 } \infty \text{ 点} \\ ②\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\right)_\infty = k,\ (k\text{ 是个正实数}) \end{array}\right\} \tag{6.212}$$

根据如上的要求，函数 $\zeta = \zeta(z)$ 将 z 平面上的无穷远点变成 ζ 平面上的无穷远点；同时 z 与 ζ 之间在无穷远点成线性变换且比例系数 k 为正实数，所以在 z 平面上无穷远处的实轴 x 变成 ζ 平面上的无穷远处的实轴 ξ. 若在 z 平面上无穷远点的均匀来流 v_∞ 与 x 轴的夹角为 α. 按**保角性**，v_∞ 变成 ζ 平面上的来流，在无穷远点它与 ξ 轴的夹角亦为 α（当然 v_∞ 的大小要改变）。根据(6.203) 和(6.212) 式在 ζ 平面上无穷远点的均匀来流的大小为 kv_∞.

现在我们可以写出在 ζ 平面绕圆柱流动的复位势 $\mathscr{W}(\zeta)$，参见(6.200)式，则有

$$\mathscr{W}(\zeta) = k\bar{v}_\infty\zeta + \frac{k\bar{v}_\infty R^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta \tag{6.213}$$

将它转换到 z 平面上，则为

$$w(z) = k\bar{v}_\infty\zeta(z) + \frac{k\bar{v}_\infty R^2}{\zeta(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta(z) \tag{6.214}$$

上式便是我们所要求的在无穷远点为均匀来流 v_∞(沿任意方向)的任意物体绕流的复位势。至于 $\zeta=\zeta(z)$ 具体为何种函数形式。要根据绕流体的外形而定。z 平面与 ζ 平面的对应形式如图 6.33 所示。

若来流沿实轴方向,即 $\alpha=0$,则在(6.213)和(6.214)式中的共轭复速度 $\bar{v}_\infty$ 可以写成 v_∞,复速度 $\bar{\bar{v}}_\infty$ 可以写成 v_∞,其中 v_∞ 为正实数。

如下证明(6.214)式正是我们所要求的复位势,即要证明:

①$w=w(z)$ 在 $D+L$ 上连续、在 D 中解析

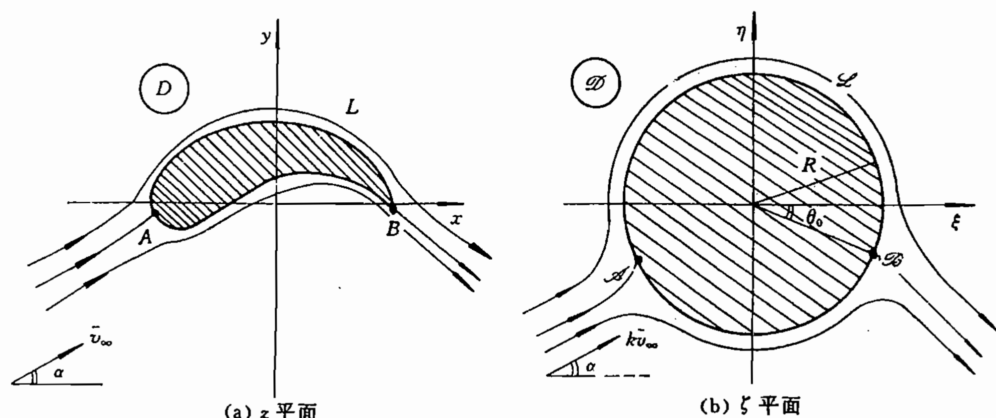


图 6.33

因为 $\mathscr{W}(\zeta)$ 在 $\mathscr{D}+\mathscr{L}$ 上连续且在 $\mathscr{D}$ 中解析,而 $\zeta=\zeta(z)$ 是在 $D+L$ 上连续且在区域 D 中解析。所以根据复合函数的性质,$w=w(z)=\mathscr{W}(\zeta(z))$ 在 $D+L$ 上也是连续的且在 D 中解析。

②$w=w(z)=\varphi+i\psi$,其虚部 $\psi=\psi(z)$ 在 L 上为常数

由于 $w(z)=\varphi+i\psi$、$\mathscr{W}(\zeta)=\Phi+i\Psi$,而 $w(z)=\mathscr{W}(\zeta(z))=\mathscr{W}(\zeta)$,所以推出在 ζ 平面和 z 平面的对应点上有

$$\varphi=\Phi \quad , \quad \psi=\Phi$$

若 Ψ 在 $\mathscr{L}$ 曲线上 $\Psi=\text{const}$,则在 $\mathscr{L}$ 的对应曲线 L 上亦有

$$\psi=\psi(z)=\Psi(\zeta(z))=\Psi(\zeta)=\text{const}$$

③在无穷远处 $\dfrac{dw}{dz}=\bar{v}_\infty$

由于 $w=w(z)$ 是作为 $\zeta=\zeta(z)$ 的复合函数,因此有

$$\frac{dw}{dz}=\frac{d\mathscr{W}}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz}$$

当然在无穷远处亦有

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_\infty=\left(\frac{d\mathscr{W}}{d\zeta}\right)_\infty\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_\infty$$

据(6.213)和(6.212)式,则有

$$\left(\frac{d\mathscr{W}}{d\zeta}\right)_\infty=k\bar{v}_\infty \quad \text{和} \quad \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_\infty=k^{-1}$$

于是则有

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)_{\infty} = \bar{v}_{\infty}$$

从而(6.214)式得到证明。

根据(6.214)式所给出的复位势，任意外形为 L 的物体不脱体绕流问题，均归结为寻求 L 之外的 D 区域和圆 $\mathscr{L}$ 之外的区域 $\mathscr{D}$ 中保角映射函数的问题。只要求出这个函数 $\zeta = \zeta(z)$，将它代进(6.214) 式中便求得复位势 $w = w(z)$.

然而对于任意形状的曲线 L，要给出 $\zeta = \zeta(z)$ 的函数形式是困难的。在实际应用中往往是解反问题，先给出 $\zeta = \zeta(z)$ 的各种形式，然后看它们对应何种形状的曲线 L，在这些曲线中选择一种作为一个绕流体的外形，如作为机翼的剖面(wing profile)。到此为止似乎任意剖面体的绕流问题已全部解决，实质不然，因在(6.214) 式中还有一个环量 Γ 未定，Γ 的确定又是一个难题。

6.15.3 环量的确定

在理想流体的范畴内，不脱体的绕流环量 Γ 是无法求得，除非抛弃理想流体模型，然而这又会产生一系列新问题，比较困难。为了解决环量的确定，必须在理想流体模型的基础上再做一个合理的补充假设。

对于不脱体的绕流体，一般有两个驻点(stationary point)，如图 6.33 所示，其中 A 和 $\mathscr{A}$ 是前缘(foredge)驻点、B 和 $\mathscr{B}$ 是后缘(back edge)驻点，至少在绕流体上存在一个驻点。如绕流物体是个具有尖锐后缘的翼型(wing type)，其后缘驻点在机翼的尖后缘上，因为根据实际观察，绕物体的流体沿尖尾两边平滑地流出，流体不会绕物体表面从尖尾的一边流到另一边，若如此会造成在尖尾处速度无穷，这在物理上是不可能的。所以，后缘点是个驻点，不管如何在机翼的尖后缘处速度都有限的确定的。

根据上述事实，儒科夫斯基在 1909 年提出了确定环量的补充条件，该条件在数学上表成

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)_{z=z_B} = \mathrm{const} \neq \infty \tag{6.215}$$

其中 z_B 为 B 点对应的 z 值，亦即 B 点的坐标。利用这个条件(假设) 便可确定环量 Γ。

参照图 6.33，在 z 平面上的后缘点 B 对应着 ζ 平面上的 $\mathscr{B}$ 点。由于变换关系已经确定，即 $\zeta = \zeta(z)$ 或等价的 $z = z(\zeta)$ 已经给出，于是由 B 点的 z 值 z_B 便可确定 B 点的 ζ 值 ζ_B，从而可确定 ζ_B 的幅角 θ_0:

$$\theta_0 = \arg\zeta_B = \arg(\zeta(z_B)) \tag{6.216}$$

比较图 6.33(a)和(b)看出，解析函数 $z = z(\zeta)$ 把 ζ 平面变成 z 平面，在点 $\mathscr{B}$ 变换成 B 点时，不保角，因为曲线 $\mathscr{L}$ 在 $\mathscr{B}$ 点的夹角为 π，而在曲线 L 的 B 点处该曲线的夹角为：$2\pi - \theta_*$，显然：$\pi \neq 2\pi - \theta_*$(其中 θ_* 为机翼尖后缘的夹角)。由于 $z = z(\zeta)$ 在 $\mathscr{B}$ 点不保角，所以该函数在 $\mathscr{B}$ 点必须满足

$$\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_B} = 0 \tag{6.217}$$

而在 ζ 平面的 $\mathscr{B}$ 点的共轭复速度与在 z 平面的 B 的共轭复速度存在如下关系

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{W}}{\mathrm{d}\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_B}=\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)_{z=z_B}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_B}$$

于是由上式和(6.215)及(6.217)式推出

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{W}}{\mathrm{d}\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_B}=0 \tag{6.218}$$

也就是说 $\mathscr{B}$ 点是个驻点。当然这个结果，若假定机翼尖后缘的对应点 $\mathscr{B}$ 是驻点，便可直接得到它。

对(6.213)式求导并取在 $\mathscr{B}$ 点上

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{W}}{\mathrm{d}\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_B}=k\bar{v}_\infty-\frac{k\tilde{v}_\infty R^2}{\zeta_B^2}+\frac{\Gamma}{2\pi i\zeta_B}\\&\zeta_B=Re^{i\theta_0}\\&\bar{v}_\infty=v_\infty e^{-i\alpha}\\&\tilde{v}_\infty=v_\infty e^{i\alpha}\end{aligned}\right\} \tag{6.219}$$

由上式和(6.218)式得到

$$kv_\infty e^{-i\alpha}-kv_\infty e^{i(\alpha-2\theta_0)}+\frac{\Gamma}{2\pi R}e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\theta_0\right)}=0$$

从而推出

$$\Gamma=-4\pi Rkv_\infty\sin(\alpha-\theta_0) \tag{6.220}$$

在上式中 a、k、v_∞ 是已知的，一旦 $\zeta=\zeta(z)$ 给出，则 R 和 θ_0 亦是确定的，所以绕流的环量 Γ 则被完全确定了。

到此为止，任意剖面在均匀来流中的不脱体绕流的数学描述全部完成，式(6.214)便是所要求的复位势。该式在解决机翼绕流问题中起重要作用。

6.16 施瓦兹—克利斯托弗变换

在上一节我们利用保角变换的方法，解决了任意形状物体的绕流问题。其做法是寻求满足边界条件和无穷远点条件的复位势 $w(z)$，然而并不是直接得到它，而是通过解析变换间接地求出。

对于射流流动或条带区内流动的描述，其典型的做法是采用施瓦兹—克利斯托弗变换(Schwartz-Christoffel transformation)，即多角变换。利用该变换，可以将一个平面中的多角形内区域转变成另一个平面中的半个平面区。

6.16.1 变换公式

设在 Z 平面上有一个多角区域 D，它共有 n 个边，其内角分别为 α_1、α_2、…、α_n，见图6.34(a)。通过如下变换公式(transformation formula)，即施瓦兹—克利斯托弗变换，可将该区域 D 变成 ζ 平面上的半个平面区域 $\mathscr{D}$，变换公式为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}=k(\zeta-\zeta_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(\zeta-\zeta_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}\cdots(\zeta-\zeta_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} \tag{6.221.1}$$

或写成积分形式

$$z=k\int(\zeta-\zeta_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(\zeta-\zeta_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}\cdots(\zeta-\zeta_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}\mathrm{d}\zeta+C_0 \tag{6.221.2}$$

其中ζ_1、ζ_2、…、ζ_n为z平面上多角形各顶点在ζ平面上实轴ξ上的对应点，见图6.34(b)，即有

$$\zeta_1=\xi_1,\zeta_2=\xi_2,\cdots,\zeta_j=\xi_j,\cdots,\zeta_n=\xi_n$$

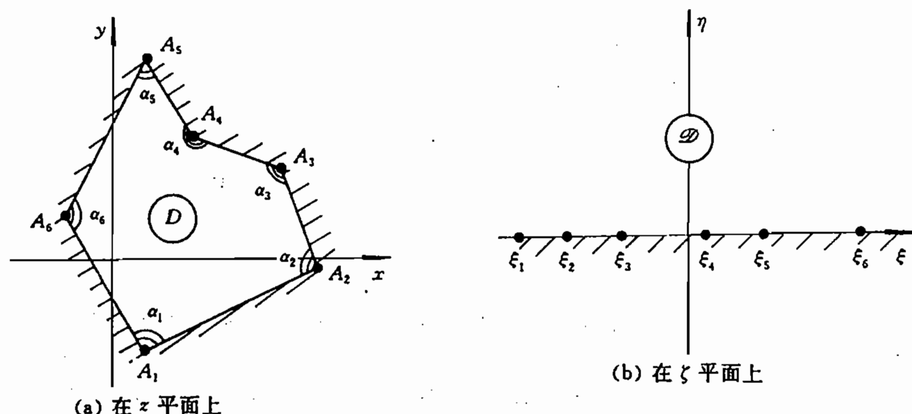
如果在变换公式(6.221)中有一个ζ_j即ξ_j为无穷，亦即$\zeta_j=\xi_j=\pm\infty$，则该值所对应的(6.221)式中的那个因子项将去掉，即视该因子项为1，亦即

$$(\zeta-\zeta_j)^{\frac{\alpha_j}{\pi}-1}=(\zeta\pm\infty)^{\frac{\alpha_j}{\pi}-1}=1 \tag{6.222}$$

式(6.221)中的k和C_0为两个复数常数，多角形的内角α_1、α_2、…、α_n满足

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_j+\cdots+\alpha_n=(n-2)\pi \tag{6.223}$$

关于公式(6.221)的详情，请参看复变函数专著，证明从略。



(a) 在z平面上　　(b) 在ζ平面上

图6.34

△注意，在z平面到ζ平面的变换中，即在$\zeta=\zeta(z)$或者$z=z(\zeta)$中，亦即在(6.221.2)中，即在：

$$\begin{aligned} z=z(\zeta)&=k\int(\zeta-\zeta_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(\zeta-\zeta_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}\cdots(\zeta-\zeta_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}\mathrm{d}\zeta+C_0 \\ &=f(\zeta,\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n,k,C_0) \end{aligned} \tag{6.224.1}$$

中现有复参数ζ_1、ζ_2、…、ζ_j、…、ζ_n、k、C_0(而α_1、α_2、…、α_j、…、α_n不能作为参数，因多边形给出后，它们是完全确定的值)，共$n+2$个复数，它们不能随意指定。

要确定$z=z(\zeta)$的具体函数形式，必须给出这$n+2$个参数。这些参数的确定只能根据z平面上已给出的多边形的角点A_1、A_2、…、A_j、…、A_n的坐标z_1、z_2、…、z_j、…、z_n值以及它们与所对应的假定点ζ_1、ζ_2、…、ζ_j、…、ζ_n的关系来定，即根据

$$\left.\begin{aligned} z_1&=z(\zeta_1)=f(\zeta_1,\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n,k,C_0) \\ z_2&=z(\zeta_2)=f(\zeta_2,\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n,k,C_0) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_j&=z(\zeta_j)=f(\zeta_j,\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n,k,C_0) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n&=z(\zeta_n)=f(\zeta_n,\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n,k,C_0) \end{aligned}\right\} \tag{6.224.2}$$

共 n 个关系式，可待定的复参数却为 $n+2$ 个，所以还需要两个定参数的补充关系式。

原则上，这两个补充关系式可以任意指定，即给予了我们一定的自由度，如我们可以任意指定 k 和 C_0，或者 k 和 ζ_j，或者 C_0 和 ζ_j，或者 ζ_j 和 ζ_{j+1} 的数值。一旦给定一对这样的数值，便可根据(6.224.2)式确定全部参数，然后将这些参数代进(6.224.1)式中便确定出 $z = z(\zeta) = f(\zeta)$ 的具体函数形式。然而，问题并未解决，因在 $z = f(\zeta)$ 未求得之前，(6.224.2)式是不存在的，尽管已指定两个参数，其余的 n 个仍不能确定，当然就求不出 $\zeta = f(\zeta)$。

所以在实际应用中(如在下面将要研究的例子中)，往往不是指定一对 ζ_j 和 ζ_{j+1}，而是指定全部的 ζ_1、ζ_2、…、ζ_n 的值(当然，这要结合实际情况和描述方便，而酌情处理)，将它们代进(6.224.1)式中，便给出含有未定参数 k 和 C_0 的函数 $\zeta = f(\zeta)$ 来，然后再利用(6.224.2)式确定出 k 和 C_0。并验证 ζ_1、ζ_2、…、ζ_n 是否全部满足(6.224.2)式。否则所确定的函数 $\zeta = f(\zeta)$ 是无意义的。

在运用施瓦兹—克利斯托弗变换公式时，要注意边界和区域的对应关系。例如，按逆时针顺序编号的角点 A_1、A_2、…、A_j、…、A_n 变换到 ζ 平面上 ξ 轴上对应点 ξ_1、ξ_2、…、ξ_j、…、ξ_n 的位置顺序是自左向右排定。所考虑的区域在按如上所说的顺序沿边界前进时，它们始终在边界的左边。

6.16.2 **对半无限条带区的变换**

作为施瓦兹—克利斯托弗变换应用之一：将图 6.35(a)所示的宽为 h 的半无限条带区变换成图 6.35(b)所示的上半个平面。

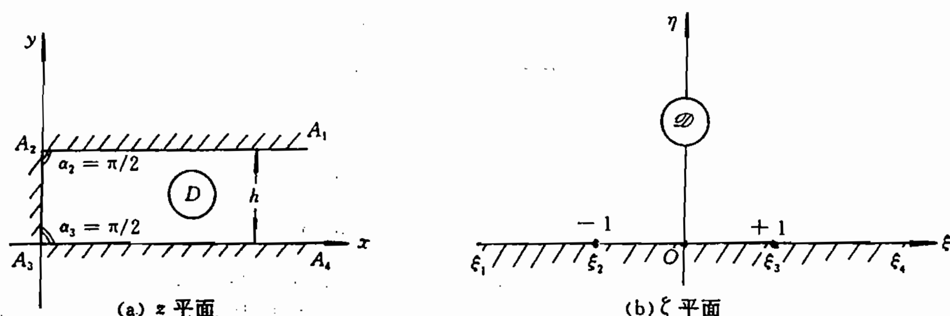


图 6.35

图中所示的各点坐标为：点 A_1 为 $(+\infty, h)$，点 A_2 为 $(0, h)$，点 A_3 为 $(0,0)$，点 A_4 为 $(+\infty, 0)$。设上述这些点在 ζ 平面上的对应点的坐标：$\xi_1 = -\infty$，$\xi_2 = -1$，$\xi_3 = 1$，$\xi_4 = +\infty$。根据图示的角和各对应点的坐标，再考虑到(6.222)式，则由(6.221.1)式给出这种变换的微分式为

$$\frac{dz}{d\zeta} = k(\zeta+1)^{-\frac{1}{2}}(\zeta-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{k}{\sqrt{\zeta^2-1}}$$

积分后给出

$$z = k\cosh^{-1}\zeta + C_0 = k\ln(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}) + C_0 \tag{6.225}$$

在上式中的复常数 k 和 C_0，可利用对应点的关系来确定：

① 当　$z = ih$　时(A_2 点)，则 $\zeta = \xi_2 = -1$，将这两个值代进一上式，有

$$ih = k\ln(-1) + C_0 = ik\pi + C_0$$

②当 $z = 0$　时(A_3 点)，则 $\zeta = \xi_3 = 1$，将它们代进(6.225)式中，有

$$0 = k\ln(1) + C_0 = C_0$$

将如上两式联立，则推出

$$C_0 = 0 \quad , \quad k = h/\pi$$

于是(6.225)式确定为

$$\left.\begin{array}{l} z = \dfrac{h}{\pi}\cosh^{-1}\zeta = \dfrac{h}{\pi}\ln(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \\ \text{或} \\ \zeta = \cosh\dfrac{\pi z}{h} \end{array}\right\} \tag{6.226}$$

可以验证该解满足所假定的对应关系，即满足(6.224.2)式。

6.16.3　对于无限长条带区的变换

作为施瓦兹—克利斯托弗变换的应用之二：将图 6.36(a)所示的宽为 h 的无限长条带区变换成图 6.36(b)所示的上半个平面。

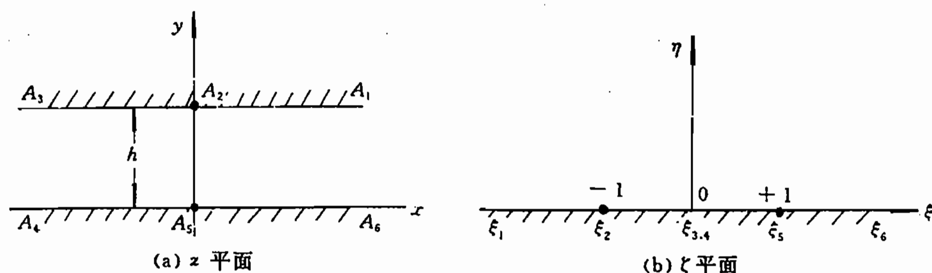


图 6.36

将 z 平面上这个条带区视作五边形，其中无穷远点 A_3 和 A_4 在 $x = -\infty$ 处"重合"，即这两个点视作"一个点"，多边形在此处的夹角 $\alpha_{34} = 0$，点 A_3 和 A_4 变成 ζ 平面上一个点 O，即 $\xi_{34} = 0$。其余各点的对应关系是：无穷远点 A_1(多边形在此夹角 $\alpha_1 = \pi$)变成 ζ 平面上的 $\xi_1 = -\infty$，点 A_2(夹角 $\alpha_2 = \pi$)变成 $\xi_2 = -1$，点 A_5(夹角 $\alpha_5 = \pi$)变成 $\xi_5 = 1$，点 A_6(夹角 $\alpha_6 = 0$) 变成 $\xi_6 = +\infty$。

根据各点的夹角与对应关系，再考虑到(6.222)式，则由(6.221.1)式得到

$$\frac{dz}{d\zeta} = k(\zeta + 1)^0(\zeta - 0)^{-1}(\zeta - 1)^0 = k\zeta^{-1}$$

积分后得到

$$z = k\ln\zeta + C_0 \tag{6.227}$$

上式中的常数 k 和 C_0，可利用点对应的关系来确定：

① 当　$z = ih$　时(点 A_2)，则 $\zeta = \xi_2 = -1$，将它们代进(6.227)中，给出

$$ih = k\ln(-1) + C_0 = ik\pi + C_0$$

②当 $z=0$ 时(点 A_5),则 $\zeta=\xi_5=1$,将它们代进(6.227)中,给出

$$0=k\ln(1)+C_0=C_0$$

利用如上二式,则确定出(6.227)式为

$$\left.\begin{aligned} z&=\frac{h}{\pi}\ln\zeta \\ \zeta&=e^{\frac{\pi z}{h}} \end{aligned}\right\} \tag{6.228}$$

或

对于如上所考虑的条带区,仍视作五边形,但把无穷远点 A_1 和 A_6 视重合,并将它变换 ζ 平面上的 O 点,A_2 点变成 $\xi=1$,A_3 点变成 $\xi=+\infty$,A_4 点变成 $\xi=-\infty$,A_5 点变成 $\xi=-1$,这时由(6.221)式给出变换关系为

$$\left.\begin{aligned} z&=-\frac{h}{\pi}\ln\zeta+ih \\ \zeta&=-e^{\frac{2\pi}{h}} \end{aligned}\right\} \tag{6.229}$$

或

可以验证该式满足(6.224.2)式。

6.16.4 条带区流动的描述

1. 在图 6.37(a)所示的宽为 h(即$\overline{A_2A_5}=h$)的条带区中,在坐标原点 A_5 有一个点源,其流量为 Q,写出该流动的复位势。

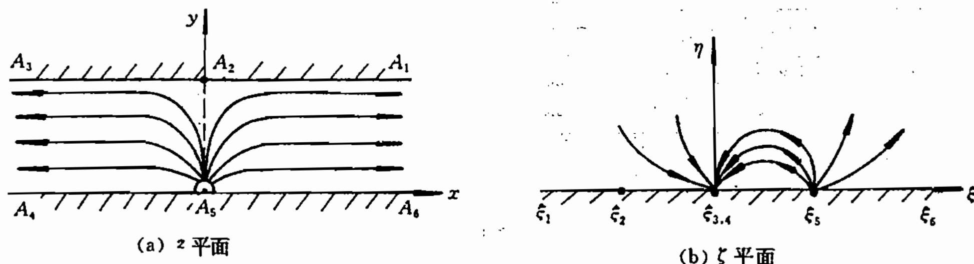


图 6.37

显然,对该流动,要在 z 平面上写出流动的复位势是困难的,因此采用变换将该条带区变成 ζ 平面上的上半平面,其变换的对应关系如同图 6.36 所示,从而有式(6.228)所示的变换式:

$$\zeta=e^{\frac{\pi z}{h}} \tag{6.230}$$

该变换将流线 $\overline{A_5A_6}$(即流函数 $\psi_{56}=\text{const}$) 和流线$\overline{A_5A_4}$(即 $\psi_{54}=\text{const}$) 分别变成流线$\overline{\xi_5\xi_6}$(即流函数 $\psi_{56}=\text{const}$) 和流线$\overline{\xi_5\xi_4}$(即 $\psi_{54}=\text{const}$),而根据(6.214.1)式和(6.142)式,有

$$Q=|\psi_{56}-\psi_{54}|=|\Psi_{56}-\Psi_{54}|$$

即 z 平面上点源 A_5 的强度等于 ζ 平面点源 ξ_5 的强度。流进 A_3A_4 的汇强度为源强的一半,即为$\frac{1}{2}Q$,当然它变成 ζ 平面的"点汇"ξ_{34} 的强度亦为$\frac{1}{2}Q$. 已知 $\xi_5=1$、$\xi_{34}=0$,根据(6.163)式可以在 ζ 上半平面上写出流动的复位势

$$\mathscr{W}=\mathscr{W}(\zeta)=\frac{Q}{\pi}\ln(\zeta-1)-\frac{Q}{2\pi}\ln\zeta$$
$$=\frac{Q}{\pi}\ln\frac{\zeta-1}{\zeta^{\frac{1}{2}}}=\frac{Q}{2\pi}\ln(\zeta^{\frac{1}{2}}-\zeta^{-\frac{1}{2}})$$

将(6.230)式代进上式，则给出在 z 平面上流动的复位势

$$w=w(z)=\frac{Q}{\pi}\ln\left(e^{\frac{\pi z}{2h}}-e^{-\frac{\pi z}{2h}}\right)$$
$$=\frac{Q}{\pi}\ln\left[\sinh\left(\frac{\pi z}{2h}\right)\right]+\frac{Q}{\pi}\ln 2 \tag{6.231}$$

在上式中常数项可以略去，因复位势差个常数无影响。

对于如图 6.37(a)所示的流动，由于以 $\overline{A_2A_5}$ 线对称，可以只取一半成为如图 6.35(a)所示的情况，这时处于 A_5 的点源强度只取图 6.37(a)的一半，同样可以给出如上所示的流动复位势。

2. 有一初速为 v_∞ 的均匀流流入图 6.38(a)所示的变截面管中，求其流动的复位势。

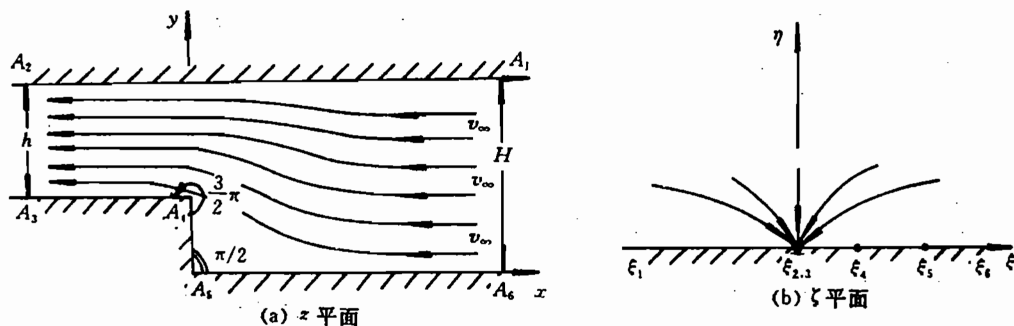


图 6.38

将图 6.38(a)所示的条带区视为五边形。设无穷远点 A_2 和 A_3 在无穷远处重合，其夹角 $\alpha_{23}=0$，点 A_2 和 A_3 变成 ζ 平面上的坐标原点 $\xi_{23}=0$。其余各点的对应关系设为：无穷远点 A_1(坐标为 $z_1=+\infty+iH$) 变成 $\xi_1=-\infty$，点 A_4(坐标为 $z_4=i(H-h)$、夹角为 $\frac{3}{2}\pi$) 变成 $\xi_4=1$，点 A_5(坐标为 $z_5=0$，夹角为 $\frac{1}{2}\pi$) 变成 $\xi_5=a$(它为待定参数)，无穷远点 A_6(坐标为 $z_6=+\infty$) 变成 $\xi_6=+\infty$。

在如上所指定的 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 所对应的 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$ 诸值中，其实只能任意指定两个，即 ζ_j 和 ζ_{j+1}，其余的 ζ 值均属假定(因此假定 $\xi_5=a$ 为未定值，则不奇怪了)。同时还要考虑到 ζ_j 和 ζ_{j+1} 的取值不同，函数 $z=z(\zeta)$ 即 $\zeta=\zeta(z)$ 的具体形式就不同，$\zeta=\zeta(z)$ 的不同，则 $w=w(z)=\mathscr{W}(\zeta(z))$ 的具体形式也就不同，即 $w=w(z)$ 的形式要受 $\zeta=\zeta(z)$ 的形式制约。

鉴于上述情况，因此在有些实用中，先给出 $z=z(\zeta)$ 即 $\zeta=\zeta(z)$ 的半确定形式(即在该关系式中有些参数未定)，然后再结合由 $\zeta=\zeta(z)$ 给出的半确形式的 $w=w(z)$ 所满足

的条件(具体讲,是$\frac{dw}{dz}$所满足的条件),反推 $z = z(\zeta)$ 的最终确定形式。之所以这样做,是为了得到合于要求的 $w = w(z)$ 形式,而避免在定解中的某些麻烦。

按照所假定的 A_1、A_2、…、A_n 与 ζ_1、ζ_2、…、ζ_n 的对应关系,再考虑到式(6.222),则由(6.221.1)式得到

$$\frac{dz}{d\zeta} = k(\zeta - a)^{-\frac{1}{2}}(\zeta - 1)^{\frac{1}{2}}\zeta^{-1} = \frac{k\sqrt{\zeta - 1}}{\zeta\sqrt{\zeta - a}} \tag{6.232}$$

如下,将按上述理由,先不对上式积分,而是借半确定形式的上式,给出半确定的 $w = w(z)$,从而确定出 k 和 a,然后再积分上式,给出进一步确定的 $z = z(\zeta)$,再通过 z 平面与 ζ 平面的对应关系,给出最终确定形式的 $z = z(\zeta)$,进而获得完全确定的 $w = w(z)$。

按照 z 平面到 ζ 平面的对应关系,以及 z 平面上流量 $Q = v_\infty H$ 流入 A_2、A_3 的"汇",变成 ζ 平面上 $\xi_{23} = 0$ 的点汇,根据(6.163)式可写出 ζ 上半平面上点汇的流动位势

$$\mathscr{W} = \mathscr{W}(\zeta) = -\frac{v_\infty H}{\pi}\ln\zeta \tag{6.233}$$

由(6.232)和(6.233)式,可以得到 z 平面上的共轭复速度 $\bar{v}$

$$\bar{v} = \frac{dw}{dz} = \frac{d\mathscr{W}}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz} = -\frac{v_\infty H}{k\pi}\sqrt{\frac{\zeta - a}{\zeta - 1}} \tag{6.234}$$

现根据 z 平面上流动的速度来确定参数 a 和 k. 在 A_6 点,即:

当 $\zeta = \xi_6 = +\infty$ 时,$\bar{v} = -v_\infty$, 于是由(6.234)式得到

$$k = \frac{H}{\pi}$$

在 A_2 点,即:

当 $\zeta = \xi_{23} = 0$ 时,$\bar{v} = -v_\infty H/h$, 由(6.234)式并结合上式得到

$$a = \frac{H^2}{h^2}$$

将所求得的 k 值和 a 值代进(6.232)式中,给出

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{H}{\pi}\frac{1}{\zeta}\sqrt{\frac{\zeta - 1}{\zeta - \left(\frac{H}{h}\right)^2}} \tag{6.235}$$

为了简化积分和书写简单,引进参量 b 和参变量 t, 其中

$$\left.\begin{aligned} & b = \sqrt{a} = \frac{H}{h} \\ & t^2 = \frac{\zeta - b^2}{\zeta - 1} \quad \text{或写成} \quad \zeta = \frac{b^2 - t^2}{1 - t^2} \end{aligned}\right\} \tag{6.236}$$

利用如上两个量,可将(6.235)式写成

$$dz = \frac{H}{\pi}\left(\frac{2}{1 - t^2} - \frac{2}{b^2 - t^2}\right)dt$$

积分后,给出

$$z = \frac{H}{\pi}\left(\ln\frac{1 + t}{1 - t} - \frac{1}{b}\ln\frac{b + t}{b - t}\right) + C_0 \tag{6.237}$$

现来确定积分常数 C_0，已知在 z 平面上的 A_5 点上 $z_5=0$，而 A_5 点在 ζ 平面上的对应点 $\zeta=\xi_5=a=H^2/h^2=b^2$，将该值代进(6.236)式中以及(6.237)式中，便得到

$$t=0 \quad ,\text{从而 } C_0=0$$

于是由(6.237)式，给出确定的 $z=z(\zeta)$，即

$$\left.\begin{aligned} z&=\frac{H}{\pi}\left(\ln\frac{1+t}{1-t}-\frac{1}{b}\ln\frac{b+t}{b-t}\right)\\ t^2&=\frac{\zeta-b^2}{\zeta-1}\quad,\quad b=H/h \end{aligned}\right\} \tag{6.238}$$

将(6.236)式中的 ζ 代进(6.233)式中，给出

$$w=-\frac{v_\infty H}{h}\ln\frac{b^2-t^2}{1-t^2}$$

即有

$$t^2=\frac{\exp\left(-\dfrac{\pi w}{v_\infty H}\right)-b^2}{\exp\left(-\dfrac{\pi w}{v_\infty H}\right)-1}$$

将上式代进(6.238)式中，则给出隐式形式(implicit form)的复位势 $w=w(z)$，亦即复位势的反函数

$$z=\frac{H}{\pi}\ln\frac{1+\left[\dfrac{\exp\left(-\dfrac{\pi w}{v_\infty H}\right)-\left(\dfrac{H}{h}\right)^2}{\exp\left(-\dfrac{\pi w}{v_\infty H}\right)-1}\right]^{\frac{1}{2}}}{1-\left[\dfrac{\exp\left(-\dfrac{\pi w}{v_\infty H}\right)-\left(\dfrac{H}{h}\right)^2}{\exp\left(-\dfrac{\pi w}{v_\infty H}\right)-1}\right]^{\frac{1}{2}}}-\frac{h}{\pi}\ln\frac{\dfrac{H}{h}+\left[\dfrac{\exp\left(-\dfrac{\pi w}{v_\infty H}\right)-\left(\dfrac{H}{h}\right)^2}{\exp\left(-\dfrac{\pi w}{v_\infty H}\right)-1}\right]^{\frac{1}{2}}}{\dfrac{H}{h}-\left[\dfrac{\exp\left(-\dfrac{\pi w}{v_\infty H}\right)-\left(\dfrac{H}{h}\right)^2}{\exp\left(-\dfrac{\pi w}{v_\infty H}\right)-1}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

6.17 自由射流流动

在理想不可压流体的定常流动中有一条流线 $\overset{\frown}{B_1B_2}$ 将流动分成两个区：⊕ 和 ⊖，这两个区中的流体可以相同亦可不同，如图 6.39 所示。在流线的两侧，当然要满足压力 p 相等、速度 v 的法向分量 v_n 相等(为零)，即

$$p_+=p_- \quad , \quad v_n^+=v_n^-=0 \tag{6.239}$$

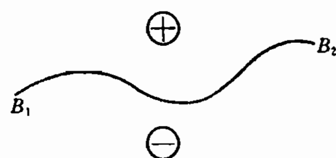


图 6.39

在上式中附标"+和－"分别表示物理量在⊕区和⊖区的取值。显然，在流线两侧速度的切向分量可以不同，若其切向速度分量不连续，则该流线又称作接触间断线(contact discontinuity curve)。当然，作为流线速度只有切向分量。

6.17.1 自由流线

所谓自由面，是指在其上压力不变或恒为零的界面，在二维流动中，则为一条曲线，这

条曲线可称为自由线(free line)。如果自由线是一条流线,则称为自由流线(free stream line)。但是在如下我们所称的自由流线与此说法又有不同,它还要附加两个条件:①略去重力;②该流线有一侧的流体是静止的(如 $v_{+}=0$)或为真空。对于这样的流线,它具有如下性质:

(1) 沿自由流线,流函数 $\psi=\mathrm{const}$.这是当然的,因其他流线亦具有这种性质。

(2) 沿自由流线,压力 $p=\mathrm{const}$.因它为自由线,压力当然不变,故它亦是等压线。

(3) 沿自由流线,速度值 $v=\mathrm{const}$,即它也是等速线。这一性质是根据在略去重力情况下的伯努利方程(6.104)或(6.106)式得出的。

6.17.2 **射流流动的复位势 w 平面**

图 6.40(a)给出了以自由流线 $\overset{\frown}{B_{11}B_{12}}$ 和 $\overset{\frown}{B_{21}B_{22}}$ 为边界的自由射流,在 $\overset{\frown}{B_{11}B_{12}}$ 上流函数 $\psi=\psi_1=\mathrm{const}$、速度 $v=v_1=\mathrm{const}$;在 $\overset{\frown}{B_{21}B_{22}}$ 上 $\psi=\psi_2=\mathrm{const}$、$v=v_2=\mathrm{const}$。描述该射流的复位势 w 为

$$w=w(z)=\varphi(z)+i\psi(z)=\varphi+i\psi$$

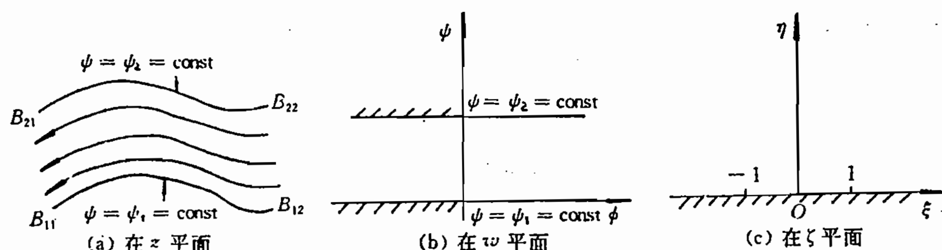


图 6.40

它将 z 平面变成 w 平面,z 平面上的射流区变成了以 $\psi=\psi_1=\mathrm{const}$ 和 $\psi=\psi_2=\mathrm{const}$ 为边界的无限长平行条带区,见图 6.40(b),然后再通过施瓦兹—克利斯托弗变换将条带区变成 ζ 平面上的上半平面,见图 6.40(c),从而可实现自由射流流动的描述。射流的流量,亦即条带区的宽度 Q 为

$$Q=\psi_2-\psi_1$$

按如上从物理平面即 z 平面 → w 平面 → ζ 平面的三步变换,似乎描自由射流的复位势 $w=w(z)$ 可以解决。实质不然,例如从 w 平面变成 ζ 平面,点的对应按图 6.36 所示(现将图 6.36(a) 的 z 平面视作 w 平面),于是按 6.16.3 段的办法,则推出(见(6.228)式)

$$w=\frac{Q}{\pi}\ln\zeta \tag{6.240}$$

然而,该式什么也没解决,因为 ζ 与 z 的关系未知,所以 $w=w(z)$ 函数仍是未知的。故必须再做补充工作。

6.17.3 **亥姆霍兹变换**

由于只进行 z 平面变换到 w 平面的变换不能解决问题,必须寻如同从 z 平面到 w 平面那样变换的补充变换。德国科学家亥姆霍兹巧妙地解决了这一难题,他给出了被后人称之为亥姆霍兹变换(Helmholtz's transformation),亦有人称为儒科夫斯基变换,该变换为

$$\gamma = \theta + i\Lambda \quad , \quad \Lambda = \ln \frac{v}{v_\infty} \tag{6.241.1}$$

或写成

$$e^{-i\gamma} = \frac{1}{v_\infty}\frac{dw}{dz} = \frac{v}{v_\infty}e^{-i\theta} \tag{6.241.2}$$

其中

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dz} = \bar{v} = ve^{-i\theta} \text{ 为共轭复速度} \\ \theta \text{ 为速度矢量的幅角}, v \text{ 为速度值} \\ v_\infty = \text{const 为速度参量} \end{cases}$$

该变换将物理平面上的流动变成 γ 平面，γ 平面称为对数平面，复数 γ 的实轴为 θ、虚轴为 $\Lambda = \ln(v/v_\infty)$。这个变换能像从 z 平面到 w 平面那样把射流流动的物理平面(如图 6.40(a)）变成 γ 平面的条带区，见图 6.41。图 6.40(a) 与图 6.41 的对应关系：沿流线 $\widehat{B_{21}B_{22}}$，速度值 $v = v_2 = \text{const}$、复速度 $\bar{v} = v_2e^{i\theta}$ 变换到 γ 平面为 $\overline{A_1A_2A_3}$ 线，在其上

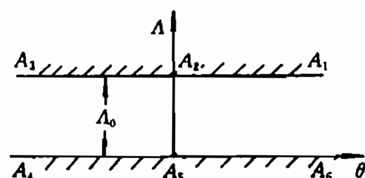


图 6.41

$$\begin{cases} \gamma = \theta + i\Lambda_0 \\ \Lambda_0 = \ln(v_2/v_\infty) \end{cases}$$

沿流线 $\widehat{B_{11}B_{12}}$，速度值 $v = v_1 = v_\infty = \text{const}$、复速度 $\bar{v} = v_1e^{i\theta}$，变换到 γ 平面为 $\overline{A_6A_5A_4}$ 线，在其上

$$\gamma = \theta + i\ln\frac{v_1}{v_\infty} = \theta$$

现利用施瓦兹—克利斯托弗变换将图 6.41 所示的条带区变成图 6.36(b)所示的 ζ 上半平面，其对应关系全同图 6.36(a)与(b)那样，按照 6.16.3 段那样做法，可给出 γ 平面与 ζ 平面的变换关系为(见式(6.228)式)

$$\gamma = \frac{\Lambda_0}{\pi}\ln\zeta \tag{6.242}$$

如果把图 6.40(b)所示的 w 平面直接变换到 ζ 平面，则有(6.240)式成立，将该式与上式联系起来，则推出

$$\gamma = \frac{\Lambda_0}{Q}w \tag{6.243}$$

将上式代进(6.241.2)式中，给出

$$\frac{1}{v_\infty}\frac{dw}{dz} = \exp\left(-\frac{i\Lambda_0 w}{Q}\right) \tag{6.244}$$

1. 如果沿图 6.40(a)所示的流线 $\widehat{B_{21}B_{22}}$ 速度 $v = v_2 = v_\infty$，则推出 $\Lambda_0 = 0$，于是由上式推得

$$\frac{dw}{dz} = v_\infty$$

将上式积分并略写常数，给出

$$w = v_\infty z$$

上式说明，当自由射流的两条边界上速度值 $v_1 = v_2 (= v_\infty)$ 时，自由射流为均直流。

2. 如果沿图 6.40(a)的 $\widehat{B_{21}B_{22}}$ 流线 $v = v_2 \neq v_\infty$. 将(6.244)式积分，设积分常数为 z_0，则有

$$z - z_0 = \frac{Q}{i\Lambda_0 v_\infty}\exp\left(i\frac{\Lambda_0 w}{Q}\right)$$

而

$$w = \varphi + i\psi$$

于是得到

$$z - z_0 = \frac{Q}{i\Lambda_0 v_\infty}\exp\left(i\frac{\Lambda_0 \varphi}{Q}\right)\cdot\exp\left(-\frac{\Lambda_0 \psi}{Q}\right)$$

从而有

$$\left.\begin{aligned} \arg(z - z_0) &= \frac{\Lambda_0 \varphi}{Q} - \frac{\pi}{2} \\ |z - z_0| &= \frac{Q}{\Lambda_0 v_\infty}\exp\left(-\frac{\Lambda_0 \psi}{Q}\right) \end{aligned}\right\} \tag{6.245}$$

上式表明，当自由射流的两条边界上速度值 $v_2 \neq v_1 = v_\infty$ 时，流线呈圆形，因当 $\psi = \text{const}$ 时，$|z - z_0| = \text{const}$，它是以 z_0 为中心的圆，其半径为

$$r = \frac{Q}{\Lambda_0 v_\infty}\exp\left(-\frac{\Lambda_0 \psi}{Q}\right)$$

当然射流的两条边界(在边界上 $\psi = \text{const}$) 也是圆，设其半径分别为 r_1 和 r_2，将两条边界上的 ψ_1 和 r_1、ψ_2 和 r_2 代进上式中，则推出

$$\frac{r_1}{r_2} = e^{\Lambda_0} = e^{\ln\frac{v_2}{v_\infty}} = \frac{v_2}{v_\infty} = \frac{v_2}{v_1}$$

由此看出，当两个自由边界流速不同时，这两条流线上的速度值与流线的曲率半径成反比。

根据以上分析可以做出结论：对于以自由流动为边界的理想流体、略去重力的不可压平面射流而言，其流线或者为平行直线或者为同心圆。

6.18 自由射流斜入射到刚壁上的流动

在射流武器的药型罩压垮过程和在爆炸焊接的复板与基板的高速碰撞中，若在随碰撞点运动的坐标系看，则就相当于两股高速射流斜碰撞，或一股射流斜冲撞刚壁，见§6.10 中的图 6.14 和图 6.15。

如下只考虑图 6.15(d)所示那样，二维自由射流斜冲撞刚壁情形。

关于上述射流的描述，对于远离碰撞点处的流动在§6.10 中已经解决。在入射和生成射流的远区各截面上(见图 6.42(a))的各速度值 v_∞、v_1 和 v_2 相等(参见(6.118)式)，即有

$$v_\infty = v_1 = v_2 > 0 \tag{6.246}$$

在远区，入射射流的厚度 h_∞ 和生成射流的厚度 h_1、h_2 之间的关系为(见(6.124)和(6.125)式)

$$\left.\begin{aligned} h_2 &= \frac{1}{2}h_\infty(1-\cos\theta_\infty) \\ h_1 &= \frac{1}{2}h_\infty(1+\cos\theta_\infty) \end{aligned}\right\},h_\infty = h_1 + h_2 \tag{6.247}$$

其中 θ_∞ 为入射射流与 x 轴的夹角。

然而，对碰撞点 C 附近的流动，则不能按 §6.10 的办法解决，必须另辟蹊径，这正是本节要研究的内容。该流动为二维平面自由射流斜撞刚壁。

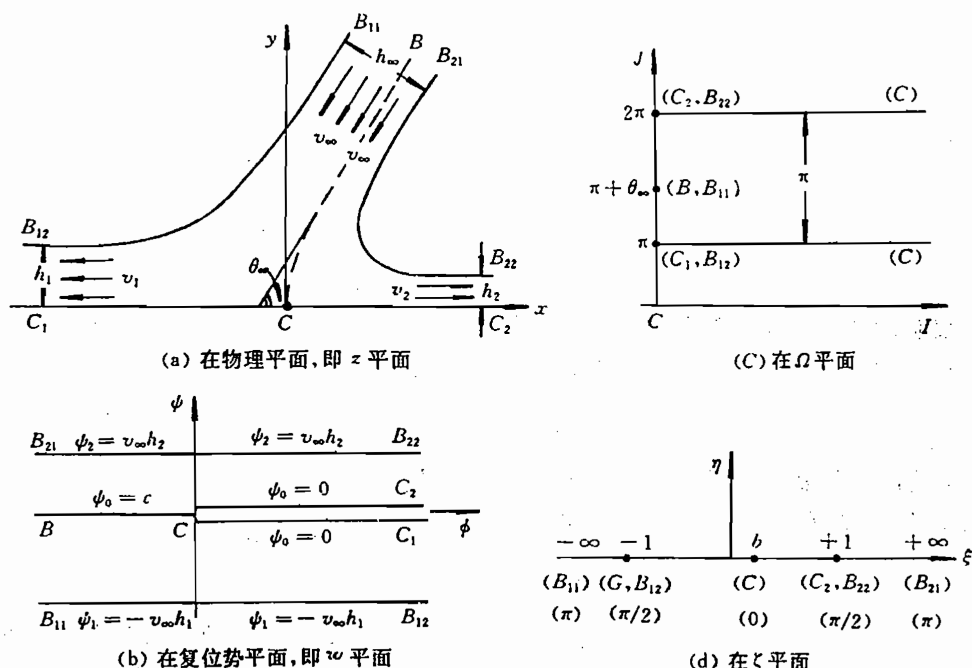


图 6.42

6.18.1 在复位势平面的流动对应区

由于为自由射流，所以射流的两条边界 $\widehat{B_{11}B_{12}}$ 和 $\widehat{B_{21}B_{22}}$ 均为流线，见图 6.42(a)，图示的 $\widehat{BC}$、$\widehat{CC_1}$、$\widehat{CC_2}$ 亦为流线。设 $\widehat{BC}$、$\widehat{CC_1}$、$\widehat{CC_2}$ 构成的为零流线，沿该线的流函数

$$\psi = \psi_0 = 0$$

在 $\widehat{B_{21}B_{22}}$ 上流函数

$$\psi = \psi_2 = v_\infty h_2$$

在 $\widehat{B_{11}B_{12}}$ 上流函数

$$\psi = \psi_1 = -v_\infty h_1$$

复位势　$w = w(z) = \varphi + i\psi$ 将图 6.42(a) 所示的流动区变成图 6.42(b) 所示的条带区。并取 z 平面的坐标原点处(即在 C 点)

$$\varphi = \varphi_0 = 0$$

于是 z 平面的坐标原点对应着 w 平面的坐标原点 C，现求沿流线 $\widehat{CB}$ 上的势函数 φ

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^l \mathrm{d}\varphi = \int_0^l \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_0^l v \mathrm{d}l \quad (\boldsymbol{v} 与 \mathrm{d}\boldsymbol{l} 反向)$$

因为 $\varphi_0 = 0, \mathrm{d}l > 0, v > 0, l > 0$

所以 $\varphi \leqslant 0$,当 $l \to +\infty$ 时,$\varphi \to -\infty$

沿流线 $\overset{\frown}{CC_1}$ 的 φ:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^l \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_0^l v \mathrm{d}l \quad (\boldsymbol{v} 与 \mathrm{d}\boldsymbol{l} 同向)$$

所以 $\varphi \geqslant 0$,当 $l \to +\infty$ 时,$\varphi \to +\infty$

同理可推出沿流线 $\overset{\frown}{CC_2}$ 的 φ:

$$\varphi \geqslant 0, 当 l \to +\infty 时, \varphi \to +\infty$$

所以 z 平面上的零流线$\overset{\frown}{CB}$对应着 w 平面上的负 φ 轴,而零流线$\overline{C_1CC_2}$则相当于它以 C 点“对折”放在 φ 的正轴上,见图 6.42(b)。

同理可证,沿流线$\overset{\frown}{B_{11}B_{12}}$和$\overset{\frown}{B_{21}B_{22}}$其 φ 的取值范围亦同上述流线,即

$$+\infty > \varphi > -\infty$$

由上分析得出,z 平面上的流动区对应到 w 平面为无限长的条带区。

6.18.2 进行亥姆霍兹变换

同上一节解决完全自由射流流动一样,亦需要作亥姆霍兹变换,但变换的函数形式与上节不同,该函数为

$$\Omega = I + iJ = \ln \frac{v_\infty}{v} + i\theta = \ln \frac{v_\infty}{\bar{v}} \tag{6.248}$$

其中

$$\bar{v} = ve^{-i\theta} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} \quad , \quad 0 \leqslant v \leqslant v_\infty \tag{6.249}$$

函数 Ω 将图 6.42(a)所示的物理平面变成图 6.42(c)所示的平面,其对应关系为:

在 z 平面的 B, B_{11} 处

$$\bar{v} = v_\infty e^{-i(\pi+\theta_\infty)} \to \Omega = \ln \frac{v_\infty}{\bar{v}} = i(\pi + \theta_\infty)$$

在 z 平面的 B_{12}, C_1 处

$$\bar{v} = -v_\infty = v_\infty e^{-i\pi} \to \Omega = \ln \frac{v_\infty}{\bar{v}} = i\pi$$

在 z 平面的 B_{22}, C_2 处

$$\bar{v} = v_\infty = v_\infty e^{-2\pi i} \to \Omega = \ln \frac{v_\infty}{\bar{v}} = 2\pi i$$

沿 z 平面的边界$\overset{\frown}{B_{21}B_{12}}$

$$\bar{v} = v_\infty e^{-i\theta} \to \Omega = i\theta \quad , \pi + \theta_\infty \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

沿 z 平面的边界$\overset{\frown}{B_{11}B_{12}}$

$$\bar{v} = v_\infty e^{-i\theta} \to \Omega = i\theta \quad , \pi + \theta_\infty \geqslant \theta \geqslant \pi$$

沿 $\overline{CC_2}$ 线

$$\bar{v} = v = ve^{-2\pi i} \quad , \quad 0 \leqslant v \leqslant v_\infty$$

$$\to \Omega = \ln\frac{v_\infty}{v} + 2\pi i \quad , \quad 0 \leqslant \ln\frac{v_\infty}{v} = I < +\infty$$

沿 $\overline{CC_1}$ 线

$$\bar{v} = -v = ve^{-i\pi} \quad , \quad 0 \leqslant v \leqslant v_\infty$$

$$\to \Omega = \ln\frac{v_\infty}{v} + \pi i \quad , \quad 0 \leqslant \ln\frac{v_\infty}{v} = I < +\infty$$

总之，该变换将物理平面上的射流流动区变成 Ω 平面上半无限的平行条带区，如图 6.42(c)所示。

6.18.3 将 Ω 平面变成 ζ 平面

利用施瓦兹—克利斯托弗变换，将 Ω 平面的条带区变成图 6.42(d)所示的 ζ 上半平面，其对应的关系如图 6.42(d)中所标，b 为待定常数。变换关系为

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\zeta} = k(\zeta+1)^{-\frac{1}{2}}(\zeta-b)^{-1}(\zeta-1)^{-\frac{1}{2}}$$

积分后推出

$$\Omega = \frac{k}{\sqrt{b^2-1}}\left\{\ln\frac{(1-b\zeta)+\sqrt{(1-b^2)(1-\zeta^2)}}{(\zeta-b)}\right\} + C_0 \tag{6.250}$$

如下确定常数 k、b、C_0。

1. 确定 C_0

在 Ω 平面的点(C_2, B_{22})处：$\Omega = 2\pi i$，它对应 ζ 平面的 $\zeta = \xi = 1$. 将它们代进(6.250)式中，推出

$$C_0 = 2\pi i \tag{6.251}$$

2. 确定 k

沿 Ω 平面的$\overset{\frown}{C_2C}$ 线，$\Omega_2 = I_2 + 2\pi i$；沿$\overset{\frown}{C_1C}$ 线，$\Omega_1 = I_1 + \pi i$. 设 Ω_1 和 Ω_2 作为动点趋于 C 时，变化同步，即设 $I_1 = I_2 = I_C$，即有

$$\Omega_1 = I_C + \pi i \quad , \quad \Omega_2 = I_C + 2\pi i \tag{6.252}$$

当 $I_C \to +\infty$ 时，动点 $\Omega_1 \to C$，则在 ζ 平面上它对应的动点 ζ_1 沿 ξ 轴 $\to \xi_1 = b$，即有

$$\zeta_1 = \xi_1 = b - \varepsilon_1, \varepsilon_1 > 0, \text{且} \lim_{I_C\to\infty}\zeta_1 = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\zeta_1 = b \tag{6.253}$$

当 $I_C \to +\infty$ 时，动点 $\Omega_2 \to C$，则在 ζ 平面上它对应的动点 ζ_2 沿 ξ 轴 $\to \xi_2 = b$，即有

$$\zeta_2 = \xi_2 = b + \varepsilon_2, \varepsilon_2 > 0, \text{且} \lim_{I_C\to\infty}\zeta_2 = \lim_{\varepsilon_2\to 0}\zeta_2 = b \tag{6.254}$$

将(6.252)、(6.253)、(6.254)式代进(6.250)式中，并相减，则给出

$$\Omega_2 - \Omega_1 = \frac{k}{\sqrt{b^2-1}}\left\{\ln\frac{(1-b\xi_2)+\sqrt{(1-b^2)(1-\xi_2^2)}}{(\xi_2-b)} - \ln\frac{(1-b\xi_1)+\sqrt{(1-b^2)(1-\xi_1^2)}}{(\xi_1-b)}\right\}$$

则有

$$\lim_{I_C\to\infty}(\Omega_2-\Omega_1) = \lim_{I_C\to\infty}(\pi i)$$

$$= \lim_{\substack{\epsilon_1 \to 0 \\ \epsilon_2 \to 0}} \left\{ \ln \frac{[(1 - b\xi_2) + \sqrt{(1-b^2)(1-\xi_2^2)}](\xi_1 - b)}{(\xi_2 - b)[(1 - b\xi_1) + \sqrt{(1-b^2)(1-\xi_2^2)}]} \right\} \cdot \frac{k}{\sqrt{b^2 - 1}}$$

设在上式中当 $\epsilon_1 \to 0$ 时，$\epsilon_2 = \epsilon_1 + O(\epsilon_1^2)$，则由上式推出

$$\pi i = \frac{k}{\sqrt{b^2 - 1}} \ln(-1) = \frac{k}{\sqrt{b^2 - 1}} \pi i$$

从而得到

$$k = \sqrt{b^2 - 1} \tag{6.255}$$

3. *确定 b*

如上虽给出 k，但其中的 b 仍未知，需要确定。在 Ω 平面的 (B, B_{11}) 处，$\Omega = i(\pi + \theta_\infty)$；在 ζ 平面上它对应 $\zeta = \xi = -\infty$. 将这些对应值代进(6.250)中并利用(6.251)和(6.255)式，则给出

$$(\pi + \theta_\infty) i = \lim_{\xi \to -\infty} \left\{ \ln \frac{(1 - b\xi) + \sqrt{(1-b^2)(1-\xi^2)}}{\xi - b} + 2\pi i \right\}$$

则推出

$$e^{-i(\pi - \theta_\infty)} = -b - i\sqrt{1 - b^2}, \quad b < 1$$

从而有

$$b = \cos\theta_\infty \tag{6.256}$$

再利用(6.247)式，则给出

$$b = \frac{h_1 - h_2}{h_\infty}, \quad h_\infty = h_1 + h_2 \tag{6.257}$$

4. *确定的 Ω 与 ζ 间的关系式*

由(6.250)、(6.251)、(6.255)、(6.256)式得到

$$\Omega = \ln \frac{1 - \zeta\cos\theta_\infty) + \sin\theta_\infty \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta - \cos\theta_\infty} + 2\pi i \tag{6.258}$$

将上代进(6.248)式中，给出

$$\bar{v} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{v_\infty(\zeta - \cos\theta_\infty)}{(1 - \zeta\cos\theta_\infty) + \sin\theta_\infty \sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{6.259}$$

6.18.4 将 w 平面变成 ζ 平面

利用施瓦兹—克利斯托弗变换，再将图 6.42(b)所示的条带区亦变成图 6.42(d)所示的 ζ 上半平面，对应的点仍如该图所示，但角点的夹角与图 6.42(c)所示不同，具体对关系如下表

w 平面多边形的顶点	B_{11}	C_1, B_{12}	C	C_2, B_{22}	B_{21}
w 平面多边形顶点夹角	0	0	2π	0	π
在 ζ 平面 ξ 轴上的对应值	$-\infty$	-1	b	$+1$	$+\infty$

按照表中所列的对应关系，可以写出 w 与 ζ 之间的变换关系为

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}=k(\zeta-b)^{\frac{2\pi}{\pi}-1}(\zeta-1)^{-1}(\zeta+1)^{-1}$$

$$=k\frac{\zeta-b}{\zeta^2-1} \tag{6.260.1}$$

积分后给出

$$w=\frac{k}{2}\left[b\ln\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)+\ln(1-\zeta^2)\right]+C_0$$

$$=\frac{k}{2}[(b+1)\ln(1+\zeta)-(b-1)\ln(1-\zeta)]+C_0,(\text{当 }|\zeta|<1) \tag{6.260.2}$$

$$w=\frac{k}{2}\left[b\ln\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right)+\ln(\zeta^2-1)\right]+C_0$$

$$=\frac{k}{2}[(b+1)\ln(\zeta+1)-(b-1)\ln(\zeta-1)]+C_0,(\text{当 }|\zeta|>1) \tag{6.260.3}$$

根据点之间的对应关系可以确定(详细推演从略,可参见文献[4]):

$$\left.\begin{aligned}b&=\frac{h_1-h_2}{h_1+h_2}=\frac{h_1-h_2}{h_\infty}\quad(\text{同(6.257)式})\\k&=-\frac{h_1+h_2}{\pi}v_\infty=-\frac{h_\infty}{\pi}v_\infty\end{aligned}\right\} \tag{6.261}$$

至于 C_0,同样可以给出,在此略写。将(6.261)式代(6.260.1)式中,则"完全"确定了 $w=w(\zeta)$ 的函数关系。由以上诸可以得到

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}=-\frac{h_\infty v_\infty}{\pi}\cdot\frac{\zeta-b}{\zeta^2-1}=-\frac{h_\infty v_\infty}{\pi}\cdot\frac{\zeta-\cos\theta_\infty}{\zeta^2-1} \tag{6.262}$$

6.18.5 关于物理平面(即 z 平面)上速度和压力的确定

上述工作的目的,是要求得 $\bar{v}$ 作为 z 的函数,即 $\bar{v}=\bar{v}(z)$,而

$$\bar{v}=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z} \tag{6.263}$$

$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}$ 作为 ζ 的函数已求得,见(6.262)式,但 $\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}$ 未知,需确定它。根据(6.259)和(6.262)式,可以推出这种关系为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}=\frac{h_\infty}{\pi}\frac{1}{1-\zeta^2}[1-\zeta\cos\theta_\infty+\sin\theta_\infty\sqrt{1-\zeta^2}]$$

由(6.259)式可知,当 $\zeta=\cos\theta_\infty$ 时,$\bar{v}=0$ 即为驻点,$\bar{v}=0$ 正好对应物理平面的 C 点,即对应 $z=0$,于是上式积分可以表成

$$\int_0^z\mathrm{d}z=\int_{\cos\theta_\infty}^{\zeta}\frac{h_\infty}{\pi}\frac{1}{1-\zeta^2}(1-\zeta\cos\theta_\infty+\sin\theta_\infty\cdot\sqrt{1-\zeta^2})\mathrm{d}\zeta \tag{6.264}$$

上式积分分为两种情况:

1. 当 $|\zeta|>1$ 时,由上推得

$$z=\frac{h_\infty}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{2}(1+\cos\theta_\infty)\ln(\zeta+1)-\frac{1}{2}(1-\cos\theta_\infty)\ln(\zeta-1)+\sin\theta_\infty\arcsin\zeta\right]\right.$$

$$-\left[\frac{1}{2}(1+\cos\theta_\infty)\ln(\cos\theta_\infty+1)-\frac{1}{2}(1-\cos\theta_\infty)\ln(\cos\theta_\infty-1)\right.$$

$$\left.\left.+\sin\theta_\infty\arcsin(\cos\theta_\infty)\right]\right\} \tag{6.265.1}$$

2. 当 $|\zeta|<1$ 时，由(6.264)式推得

$$z=\frac{h_\infty}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{2}(1+\cos\theta_\infty)\ln(1+\zeta)-\frac{1}{2}(1-\cos\theta_\infty)\ln(1-\zeta)+\sin\theta_\infty\arcsin\zeta\right]\right.$$

$$-\left[\frac{1}{2}(1+\cos\theta_\infty)\ln(1+\cos\theta_\infty)-\frac{1}{2}(1-\cos\theta_\infty)\ln(1-\cos\theta_\infty)\right.$$

$$\left.\left.+\sin\theta_\infty\arcsin(\cos\theta_\infty)\right]\right\} \tag{6.265.2}$$

根据(6.255)式，可以求 $\zeta=\zeta(z)$，将它代进(6.263)式右端便求得 $\bar{v}=\bar{v}(z)$，即求得在物理平面上的速度场。

由于流动定常且来流均匀(设速度值为 v_∞)同时不考虑重力，则根据伯努利方程(6.104)式可以求得压力 p

$$p=p_\infty+\frac{1}{2}\rho(v_\infty^2-v^2) \tag{6.266}$$

其中 $v=|\bar{v}|$ 为速度值，p_∞ 距碰撞点无穷远点的压力即外界的压力。由于 v 的分布已知，则由(6.266)式便求得压力的分布。

由于速度已知，则可根据(3.67)式求得应变率 B_{ij}

$$B_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{6.267}$$

上式中 x_i 为直角坐标分量、v_i 为速度分量。

6.18.6 关于速度、压力等分布的具体计算问题

如上所给出的速度、压力等以及所涉及的 $z(z=x+iy)$ 和 $\zeta(\zeta=\xi+i\eta)$ 均为复数。在具体求解时，当然要把它们的虚部和实部分开进行。为此，我们做如下工作，将一些量改写：

$$1+\zeta=(1+\xi)+i\eta=[(1+\xi)^2+\eta^2]^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\beta_1}$$

其中
$$\beta_1=\arctan\left(\frac{\eta}{1+\xi}\right)$$

$$1-\zeta=(1-\xi)-i\eta=[(1-\xi)^2+\eta^2]^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\beta_2}$$

其中
$$\beta_2=\arctan\left(\frac{\eta}{\xi-1}\right)$$

$$\arcsin\zeta=-i\ln(i\zeta+\sqrt{1-\zeta^2})=-i\ln[-\eta+i\xi+T\cos\beta_3+iT\sin\beta_3]$$

其中

$$T=|(1+\zeta)(1-\xi)|=[(1+\xi)^2+\eta^2]^{\frac{1}{2}}[(1-\xi)^2+\eta^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta_3=\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$$

利用如上的中间量亦可将 $\arcsin\zeta$ 再改写

$$\arcsin\zeta=-i\ln[(T\cos\beta_3-\eta)+i(T\sin\beta_3+\xi)]$$

$$= -i\ln[(T\cos\beta_3 - \eta)^2 + (T\sin\beta_3 + \xi)^2]^{\frac{1}{2}} + \beta_4$$

其中

$$\beta_4 = \arctan\left[\frac{(T\sin\beta_3 + \xi)}{(T\cos\beta_3 - \eta)}\right]$$

将以上诸式代进(6.265.1)式中，给出

$$\begin{aligned} x + iy = \frac{h_\infty}{\pi}\Big\{&\frac{1}{2}(1+\cos\theta_\infty)[\ln((1+\xi)^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}} + i\beta_1] \\ &- \frac{1}{2}(1-\cos\theta_\infty)[\ln((1-\xi)^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}} + i\beta_2] \\ &+ \sin\theta_\infty[-i\ln((T\cos\beta_3-\eta)^2+(T\sin\beta_3+\xi)^2)^{\frac{1}{2}} + \beta_4] \\ &- \Big[\frac{1}{2}(1+\cos\theta_\infty)\ln(\cos\theta_\infty+1) \\ &- \frac{1}{2}(1-\cos\theta_\infty)\ln(\cos\theta_\infty-1) + \sin\theta_\infty\arcsin(\cos\theta_\infty)\Big]\Big\} \end{aligned}$$

由上式便可求得 x 和 y. 对于(6.256.2)式同理可做。

将前面所引进的那些中间量代进(6.259)式，可将该式改写成

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_\infty}(u - iv) = \{&[(\xi - \cos\theta_\infty)(1 - \xi\cos\theta_\infty + T\sin\theta_\infty\cos\beta_3) + \eta(T\sin\beta_3\sin\theta_\infty - \eta\cos\theta_\infty)] \\ &+ i[(\xi - \cos\theta_\infty)(-T\sin\beta_3\sin\theta_\infty + \eta\cos\theta_\infty) + \eta(1 - \xi\cos\theta_\infty \\ &+ T\sin\theta_\infty\cos\beta_3)]\} \cdot \{(1 - \xi\cos\theta_\infty + T\sin\theta_\infty\cos\beta_3)^2 \\ &+ (T\sin\beta_3\sin\theta_\infty - \eta\cos\theta_\infty)^2\}^{-1} \end{aligned}$$

在上式中 u 和 v 为速度的两个分量。

通过以上的中间变量 $\zeta = \xi + i\eta$ 等，我们可以建立起 u、v 与 x、y 的对应关系。同样可建立压力、应变率等与坐标 x 和 y 的关系。

本章主要参考文献[1]。

附录 6.1

各向同性张量(Isotropic Tensors)

1. 各向同性张量的定义

绝大多数张量的分量经过旋转坐标变换后将改变其值。例如矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 $ox_1x_2x_3$ 坐标系中其分量为 $(a_1,0,0)$，经过旋转变换变到新坐标系 $x_1' = -x_1, x_2' = -x_2, x_3' = x_3$ 后，其分量变为 $(-a_1,0,0)$，显然只要 $\boldsymbol{a}$ 不是零矢量，则恒有 $a_1 \neq -a_1$，即新旧坐标系中的分量值不等，这类张量称为各向异性张量(anisotropic tensors)。然而也有另外一类张量，它的每一个分量在经过旋转坐标变换后不改变其值，这类张量称为各向同性张量(isotropic tensors)，例如标量、克罗内克尔符号 δ_{ij} 和置换符号 $\in_{ijk}$ 就是这类张量。各向同性的名词来源于物理，在物理学中的某些物理常数常常用张量表征，例如弹性常数张量 $\mathbf{C} = \{C_{ijkl}\}$ 的第一个分量 C_{1111} 表示 x_1 轴向的拉伸弹性系数。当坐标系变换到任意直角坐标系 $Ox_1'x_2'x_3'$

时，如果有$C'_{1111}=C_{1111}$，即在任意的x'_1轴向的拉伸弹性系数仍保持在x_1轴向上的值，那么这样的弹性体对于拉伸来说就是各向同性的。各向同性张量的概念，就源于此。

根据以上所述，可以对各向同性张量下个严格定义：n阶张量$\mathbf{B}=\{B_{i_1i_2\cdots i_n}\}$，它的每个分量都是旋转坐标变换下的不变量，即有

$$B'_{i_1i_2\cdots i_n}=B_{i_1i_2\cdots i_n} \tag{1}$$

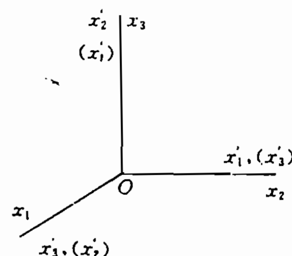
则称$\mathbf{B}$为n阶各向同性张量。

2. **置换定理**(permutation theorem)

为了明了起见，现以二阶各向同性张量$\mathbf{B}=\{B_{ij}\}$为例来论证。设原坐标系为$Ox_1x_2x_3$，将其旋转成为新坐标系$Ox'_1x'_2x'_3$，且使每个坐标系完全重合，见附图6.1，于是出现两种可能，即

$$①x'_1=x_2,x'_2=x_3,x'_3=x_1$$

$$②x'_1=x_3,x'_2=x_1,x'_3=x_2$$



附图 6.1

由于$\mathbf{B}$为各向同性张量，因而据式(1)应有

$$B'_{ij}=B_{ij} \tag{2}$$

即有

$$B'_{11}=B_{11},B'_{12}=B_{12},B'_{13}=B_{13},B'_{22}=B_{22},B'_{23}=B_{23},\cdots \tag{3}$$

在不引进变换张量的情况下，根据重合的新老坐标系的标轴的方位便能确定以下事实：

$$B_{12}=B_{23}=B_{31} \tag{4}$$

因据重合坐标系的第一种可能性，有：$B'_{12}=B_{23}$，而据第二种可能性，有：$B'_{12}=B_{31}$，再利用(3)式则推出(4)式。

同理可推出

$$B_{21}=B_{32}=B_{13} \tag{5}$$

$$B_{11}=B_{22}=B_{33} \tag{6}$$

同样，对于三阶各向同性张量$\mathbf{B}=\{B_{ijk}\}$，有：

$$B_{111}=B_{222}=B_{333} \tag{7}$$

$$B_{112}=B_{223}=B_{331} \tag{8}$$

$$B_{113}=B_{221}=B_{332} \tag{9}$$

$$B_{213}=B_{321}=B_{132} \tag{10}$$

$$B_{123}=B_{231}=B_{312} \tag{11}$$

如上所述便是置换定理的主要内容。

置换定理一般可叙述为：若$B_{i_1i_2\cdots i_n}$是n阶张量的任一分量，将此分量的每一个下标的数码都作如下所示的顺序更换，见附图6.2。

则得到$\mathbf{B}$的以新数码表示其下标的分量。如果$\mathbf{B}$是各向同性张量，则此两个分量相同。

3. **关于零到四阶张量之各向同性性质的讨论**

①对于零阶张量(标量)，都是各向同性的。



附图 6.2

②对于一阶张量(矢量),除非为零矢量外,都是各向异性的。

③对于二阶张量 $\mathbf{B}=\{B_{ij}\}$,若为各向同性,它的分量必为 $\lambda\delta_{ij}$ 形式(其中 λ 为标量),即

$$B_{ij}=\lambda\delta_{ij} \tag{12}$$

亦即

$$B_{ij}=\begin{cases}0 & ,\text{当 } i\neq j \text{ 时} \quad (13.1)\\ \lambda & ,\text{当 } i=j \text{ 时} \quad (13.2)\end{cases}$$

证明

根据(4)式和(5)式,对于 $\mathbf{B}$ 的 6 个非对角线分量($i\neq j$)中只有两个独立,现以 B_{23} 和 B_{32} 两个为代表。将原坐标系绕 x_3 轴旋转 π 角而成为新坐标系,即

$$x_1'=-x_1 \quad , \quad x_2'=-x_2 \quad , \quad x_3'=x_3$$

据第一章(1.89.1)式,可以给出变换张量 $\mathbf{A}$ 为

$$\mathbf{A}=\{a_{ij}\}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & +1\end{bmatrix} \tag{14}$$

于是根据(1.102)式,得到 $\mathbf{B}$ 在新坐标系中的分量为

$$\left.\begin{aligned}B_{23}'&=a_{2k}a_{3l}B_{kl}=a_{22}a_{33}B_{23}=-B_{23}\\ B_{32}'&=a_{3k}a_{2l}B_{kl}=a_{33}a_{22}B_{32}=-B_{32}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

由于 $\mathbf{B}$ 是各向同性的,故有

$$B_{23}'=B_{23} \quad , \quad B_{32}'=B_{32} \tag{16}$$

由(15)和(16)式得出

$$B_{23}=-B_{23} \quad , \quad B_{32}=-B_{32} \tag{17}$$

从而得到

$$B_{23}=0 \quad , \quad B_{32}=0$$

再利用(4)式和(5)式,便证实了(13.1)式的结果。

对于 $\mathbf{B}$ 的对角线分量,由于 $\mathbf{B}$ 为各向同性的,则有(6)式成立,即有

$$B_{11}=B_{22}=B_{33}\equiv\lambda$$

于是(13.2)式得到证实,从而(12)式成立。

④对于三阶张量 $\mathbf{B}=\{B_{ijk}\}$,若为各向同性,它的分量必为 $\lambda\in_{ijk}$ 形式(其中 λ 是标量),即

$$B_{ijk}=\lambda\in_{ijk} \tag{18}$$

亦即

$$
B_{ijk} = \begin{cases} 0 & ,\quad 当\ i=j=k\ 时 \quad (19.1) \\ 0 & ,\quad 当\ i,j,k\ 中有两个相同时 \quad (19.2) \\ \lambda & ,\quad 当\ i\neq j\neq k,但为偶排列时 \quad (19.3) \\ -\lambda & ,\quad 当\ i\neq j\neq k,但为奇排列时 \quad (19.4) \end{cases}
$$

证明 Ⅰ. 将原坐标系绕 x_3 轴旋转 180°成为新坐标系，其变换张量取(14)式形式，于是有

$$B_{111} = B'_{111} = a_{1l}a_{1m}a_{1n}B_{lmn} = -B_{111}$$

从而推出

$$B_{111} = 0$$

再据(7)式，则有

$$B_{111} = B_{222} = B_{333} = 0$$

从而(19.1)式得到证明。

在 B_{ijk} 的下标 i、j、k 中，若有两个下标取值相同，而另一个不同，例如 B_{331}，它在新旧坐标系中有

$$B_{331} = B'_{331} = a_{3l}a_{3m}a_{1n}B_{lmn} = -B_{331}$$

总之，对于下标按上述取法的分量则有

$$B_{ijk} = B'_{ijk} = a_{il}a_{jm}a_{kn}B_{lmn} = -B_{ijk}$$

于是推出

$$B_{ijk} = 0 \quad ,(i、j、k\ 中有两个取值相同)$$

从而证明了(19.2)式的结果。

Ⅱ. 将原坐标系绕 x_3 轴旋转 90°成为新坐标系，此时

$$x'_1 = x_2 \quad , \quad x'_2 = -x_1 \quad , \quad x'_3 = x_3$$

两个坐标系间的变换张量 **A** 为

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

从而有

$$B_{123} = B'_{123} = a_{1l}a_{2m}a_{3n}B_{lmn} = -B_{123}$$

根据(10)式和(11)式，再考虑到上式，则有

$$B_{123} = B_{231} = B_{312} = \lambda$$

$$B_{213} = B_{321} = B_{132} = -\lambda$$

于是证明了式(19.3)和(19.4)。

⑤对于四阶张量 $\mathbf{B} = \{B_{ijkl}\}$，若为各向同性，它的分量必取如下形式

$$B_{ijkl} = \nu\delta_{ij}\delta_{kl} + \alpha\delta_{ik}\delta_{jl} + \beta\delta_{il}\delta_{jk} \tag{21}$$

式中 ν、α、β 为标量。上式亦写成

$$B_{ijkl}=\begin{cases}\nu+\alpha+\beta, & 当\ i=j=k=l\ 时 & (22.1)\\ \nu, & 当\ i=j\neq k=l\ 时 & (22.2)\\ \alpha, & 当\ i=k\neq j=l\ 时 & (22.3)\\ \beta, & 当\ i=l\neq j=k\ 时 & (22.4)\\ 0, & 其他情形 & (22.5)\end{cases}$$

证明：

由于 **B** 是各向同性张量，故有

$$B_{ijkl}=B'_{ijkl}=a_{im}a_{jn}a_{kp}a_{lq}B_{mnpq}$$

Ⅰ. 将原坐标系绕 x_3 轴旋转180°，此时 a_{ij} 取(14)式形式。于是当 B_{ijkl} 的四个下标中若有一个或有三个取同值，如取 3 时(余者下标取他值)，则由(23)式推出

$$B_{ijkl}=B'_{ijkl}=-B_{ijkl}$$

从而推出

$$B_{ijkl}=0$$

再根据置换定理可知，只要 1 或 2 或 3 在 i、j、k、l 中出现单数次时，就有

$$B_{ijkl}=0$$

于是(22.5)式得到证明。

Ⅱ. 将原坐标系绕 x_3 轴旋转 90°，此时 0 a_{ij} 取(20)式形式，于是根据式(23)则有

$$B_{1122}=B'_{1122}=a_{12}a_{12}a_{21}a_{21}B_{2211}=B_{2211}$$

同理有

$$B_{1212}=B_{2121}\quad,\quad B_{1221}=B_{2112}$$

再根据置换定理，可以证明(22.2)、(22.3)和(22.4)式成立。

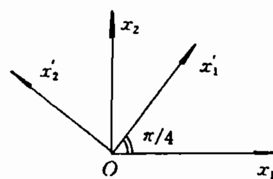
Ⅲ. 根据置换定理，有

$$B_{1111}=B_{2222}=B_{3333} \tag{24}$$

将原坐标系绕 x_3 轴旋转 45°，见附图 6.3，则有

$$x'_1=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2$$

$$x'_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2$$



附图 6.3

于是两个坐标间的变换系数 **A** 为

$$\mathbf{A}=\{a_{ij}\}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{25}$$

而由(23)式有

$$B_{1111}=B'_{1111}=a_{1m}a_{1n}a_{1l}a_{1q}B_{mnpq} \tag{26}$$

根据(25)式中 a_{ij} 的取值，显然在上式中 m、n、p、q 的取值只能为 1 或者为 2(因 $a_{13}=0$)；再考虑到(22.5)式，在 B_{mnpq} 的下标中有 m、n、p、q 各自的取值只有全相同或两两相同才不为

零(其他情形的 B_{mnpq} 为零),于是(26)式表成

$$B_{1111}=\frac{1}{4}(B_{1111}+B_{2222}+B_{1122}+B_{2211}+B_{1212}+B_{2121}+B_{1221}+B_{2112})$$

再利用(22.2)、(22.3)、(22.4)和(24)式,则由上推出

$$B_{1111}=B_{2222}=B_{3333}=\nu+\alpha+\beta$$

从而(22.1)式得以证明。

▲ 现在推导四阶各向同性张量 $\mathbf{B}=\{B_{ijkl}\}$ 在一种特殊情况下的更简化形式,即 B_{ijkl} 在(21)式的形式下,再假定 i 和 j 两指标是对称的。

为了推出更简化形式,令

$$\alpha=\mu+\lambda \quad , \quad \beta=\mu-\lambda$$

将这两个量代进(21)式中,给出

$$B_{ijkl}=\nu\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})+\lambda(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{27}$$

由于 B_{ijkl} 对于 i 和 j 对称,故有

$$B_{ijkl}=B_{jikl}=\frac{1}{2}(B_{ijkl}+B_{jikl}) \tag{28}$$

将(27)式中的下标 i 和 j 对换则有

$$B_{jikl}=\nu(\delta_{ji}\delta_{kl})+\mu(\delta_{jk}\delta_{il}+\delta_{jl}\delta_{ik})+\lambda(\delta_{jk}\delta_{il}-\delta_{jl}\delta_{ik}) \tag{29}$$

将(27)和(29)式代进(28)式的右端,并考虑到 $\delta_{ij}=\delta_{ji}$,从而有

$$B_{ijkl}=\nu\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{30}$$

这就是四阶各向同性张量在头两个指标(i 和 j)对称情况下,其分量的特殊形式,它比(21)式更简化,只出现两个标量常数 ν 和 μ.

由式(30)看出:B_{ijkl} 对于下标 k 和 l 也是对称的。

习题

6.1 假定空气是完全气体,温度 T 同高度 x_3 成如下线性关系

$$T=T_0-\alpha x_3$$

其中 T_0 为地面(即 $x_3=0$)处的温度,x_3 从地面算起。确定在流体静力学条件下,压力 p 作为 x_3 的函数。

6.2 具有状态方程为 $p=A\rho^k$ 的多方气体(其中 A 和 k 为常数)在重力场中(重力沿 x_3 方向)。确定 p 与 x_3 和 p_0 之间的关系,其中 p_0 为在 $x_3=0$ 处的压力。

6.3 如果流动非常缓慢,以至于速度各分量及其它们的偏导数均视作一阶小量。如果在运动方程即(6.26)式的第二式中忽略这些二阶以上的量,并认为 $b=0$,同时假定流体不可压 $\rho=\text{const}$。证明在这种情况下,压力是个调合函数(harmonic function),即满足

$$\nabla^2 p=0$$

6.4 对于无旋流动,请用速度势 ϕ 来表述连续方程和运动方程。

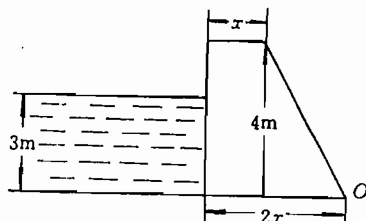
6.5 一个盛着不可压液体的杯子,在重力作用下从一个与水平面成 α 角的板上滑下来,杯子中液体自由面是什么形状?

6.6 如图所示的为一个水泥水坝的侧剖视图,坝的长度方向与图面垂直,长为 30m,坝高 4m,坝后

水深 3m，水泥密度 2000kg/m³。

①若水坝的重量为水对坝的水平作用力的 10 倍，求坝顶宽 x。

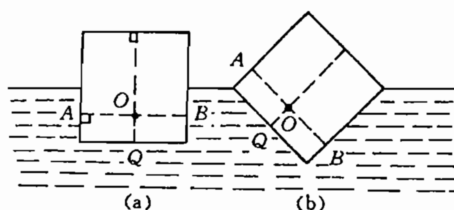
②对于经过 O 点的边线的倾覆转矩来讲，该坝是否稳固？



题图 6.6

6.7 一个边长为 0.3m 的正方形木块，其重心位于 O 点，见图示，其中 $\overline{AO}=\overline{BO}=0.15\text{m}$，$\overline{OQ}=0.075\text{m}$。它平静地浮在水面，且有一半浸在水中，如图(a)所示。

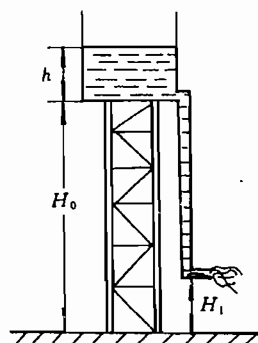
当木块因某种作用，转动 45°角成为如图(b)所示，求木块的恢复力矩。



题图 6.7

6.8 一水塔的蓄水箱底离地面的高度 $H_0=20\text{m}$，水箱为圆柱形桶，其半径 $R=2\text{m}$，箱内储水深 $h=1\text{m}$。水箱装有一个离地面高 $H_1=5\text{m}$、出口截面 $S=2\text{cm}^2$ 的水龙头。

问：如果打开水龙头，需要多长时间才能将箱内的水放完？



题图 6.8

6.9 证明函数 $\phi=A(-x_1^2-x_2^2+2x_3^2)$ 满足拉普拉斯方程(Laplace equation)，其中 $A=\text{const}$. ϕ 若作为速度势，确定该流动的流线。

6.10 速度势 ϕ 由如下函数给出

$$\phi=Ax_1+Bx_1/\sqrt{x_1^2+x_2^2},$$
$$A=\text{const},\quad B=\text{const}$$

确定该流动的流函数 ψ。

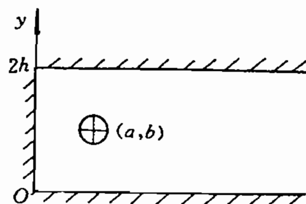
6.11 已知复位势 $w=A/Z$，确定速度分量。

6.12 在如图所示的半无穷条带区的 (a,b) 处放置一个强度为 Q 的点源，求证流线的方程为

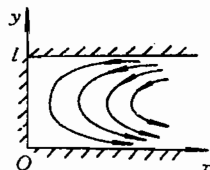
$$\cosh\left(\frac{\pi x}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)+\cosh\left(\frac{\pi a}{b}\right)=c\sinh\left(\frac{\pi x}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

其中 C 为常数。

6.13 设有一端封闭的半无穷长渠道，如图所示，宽为 l. 在无穷远处有一宽为 $l/2$ 的流束以速度 v 沿 x 负轴向紧贴渠道一边流动，求该流动的复位势、势函数和流函数。



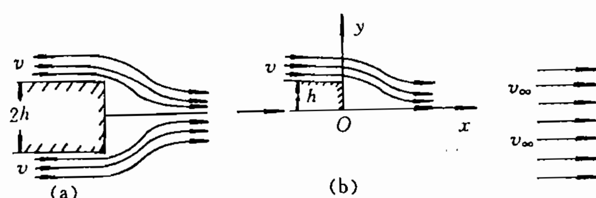
题图 6.12

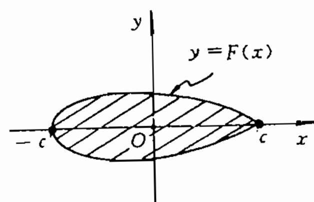


题图 6.13

6.14 如图所示，有一半无穷长的物体，其宽为 $2h$，流体从左方无穷远处以速度 v 沿物体流来，求该流动的复位势。

(提示:可将图(a)所示的情况化成图(b)所示情况处理。)





题图 6.14　　　　题图 6.15

6.15　有一对称的机翼剖面,弦长为 $2c$,剖面的方程为 $y=F(x)$,无穷远来流为 v_∞,设流动是定常的,流体是理想不可压缩的,试用汇源法求该流动的复位势和复速度。

参考文献

[1]　吴望一.流体力学.北京:北京大学出版社,1982

[2]　张连玉等.爆炸气体动力学基础.北京:北京工业学院出版社,1987

[3]　Mase G E. Continuum Mechanics. McGraw—Hill Book Company, 1975

[4]　邵丙璜,张凯.爆炸焊接原理及其工程应用.大连:大连工学院出版社,1987

第七章　气体动力学基础

一　基本理论

在上一章我们阐述了在爆炸力学中所涉及的必要的不可压流体力学基础。然而在爆炸与冲击中更需要流体力学另一大部分理论——可压缩流体力学即气体动力学。因我们在处理爆炸问题时，首先碰到的是炸药爆炸所产生的爆炸波，爆炸所产生的一切后果均与爆炸波有关。

爆炸波(亦称爆轰波)的形成与传播、爆炸产物的运动以及它们对周围介质的作用等都与气体动力学紧紧地联系在一起。为了描述整个爆炸过程以及对周围介质产生的作用必须具备一定的气体动力学基础。本章将介绍气体动力学的一些基本概念、一维不定流动和二维定常流动等，着重研究稀疏波、压缩波、正激波、斜激波以及它们的相互作用等。(激波即冲击波，这两种叫法在我国是并存的，在以下论述中亦混着使用。)

7.1　经典气体动力学的基本假设和控制方程组

作为流体的一部分——气体，它当然具有流体的共性：易流性、粘性、可压缩性和导热性。气体的流动当然亦遵守：质量守恒、动量守恒和能量守恒；亦满足热力学第一定律和第二定律，即满足(见(4.84.2)式和(4.69)式)：

$$\delta Q = T\mathrm{d}S = \mathrm{d}e + p\mathrm{d}V \tag{7.1}$$

$$\mathrm{d}S \geqslant 0 \tag{7.2}$$

其中：T——温度、S——比熵、e——比内能、p——压力、V——比容、δQ——系统增加的热量。

描述气体流动的普遍方程组，当然就是描述流体流动的普遍方程组(6.26)式。

7.1.1　经典气体动力学所做的基本假设

描述流体流动的普遍方程组(6.26)式非常复杂、难以处理。所以在流体力学的研究中，均针对所考虑介质的具体情况做出合适的假设，以便使方程组得到一定的简化，但又能很好地描述实际问题，正如前一章所做的那样。针对气体的特殊性质，经典气体动力学做了如下假设：

1. 假定气体是完全气体

所谓完全气体，即满足如下状态方程的气体(见(4.116)式)：

$$p = \rho RT \tag{7.3}$$

这里，R 为气体常数，气体不同 R 取值亦不同，ρ 为密度。

注意，满足(7.3)式的气体正是物理学中所说的理想气体，但在流体力学(包括气体动力学)中所谓“理想”则是指没有粘性，故在气体动力学中将其改称完全气体。

对于完全气体，其比热视为常数，即定容比热 C_v 和定压比热 C_p 为常数：

$$C_v = \left(\frac{\delta Q}{\mathrm{d}T}\right)_{\rho=\mathrm{const}} = \mathrm{const} \tag{7.4.1}$$

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{\mathrm{d}T}\right)_{p=\mathrm{const}} = \mathrm{const} \tag{7.4.2}$$

当然，物质的比热并不是固定不变的，它随温度而变化，而且密度变化对它亦有影响。不过，作为一种近似——将它视作常数。

完全气体的定压比热与定容比热之比——称作完全气体的绝热指数(adiabatic exponent)，它常用符号 k(或 γ)表示：

$$k = \frac{C_p}{C_v} \tag{7.5}$$

对于完全气体，内能只是温度的函数。如若内能与温度还是成正比——则把这种气体称作**多方气体**(polytropic gas)* (这时式(7.5)所定义的 k，又称作**多方指数**)，其内能为

$$e = e(T) = C_v T \tag{7.6}$$

根据(7.1)式、(7.3)式、(7.4.1)和(7.4.2)式，则把式(7.6)表示的内能又表成另一种形式。因

$$\left(\frac{\delta Q}{\mathrm{d}T}\right)_{p=\mathrm{const}} = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}T} + p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}$$

即有：

$$C_p = C_v + R \tag{7.7}$$

于是(7.6)式可写成

$$e = \frac{1}{k-1}\frac{p}{\rho} \tag{7.8}$$

对于多方气体，据(7.1)、(7.4)和(7.6)式则得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S &= C_v\frac{\mathrm{d}T}{T} + \rho R\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right) = C_v\left(\frac{\mathrm{d}T}{T} - \frac{R}{C_v}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\right) \\ &= C_v[\mathrm{d}\ln T - (k-1)\mathrm{d}\ln\rho] = C_v\mathrm{d}\ln\left(\frac{T}{\rho^{k-1}}\right)\end{aligned}$$

将上式积分后得到(参见(4.124)式)

$$S - S_0 = C_v\left(\ln\frac{T}{\rho^{k-1}} - \ln\frac{T_0}{\rho_0^{k-1}}\right) = C_v\left(\ln\frac{p}{\rho^k} - \ln\frac{p_0}{\rho_0^k}\right) \tag{7.9}$$

如上的结果是对于多方气体的。

2. 忽略质量力(重力)

忽略质量力，即认为

$$\boldsymbol{b} = g = 0 \tag{7.10}$$

质量力一般是指重力，这时上式中的 g 就是重力加速度，重力加速度当然不为零，在气动中之所以略去它，是因它与运动方程和能量方程中的其他项相比比较小，故将 g 略去。

关于略去质量力以及粘性的依据，可参见§8.1。

---

* 注意，在以下的论述中凡是提到完全气体均指多方气体。

3. 忽略粘性

因气体的粘性系数比较小，所以在研究一般的气体流动时可以不考虑，即认为(6.26)式中的粘性应力张量为零：

$$\sum\nolimits_{.} = 2\mu\left(\mathbf{B} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\mathrm{div}\nu\right) = 0 \tag{7.11}$$

4. 设过程绝热

即认为没有外热传入系统，故

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= 0 \\ g_{\Delta} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

其中 λ——热传导系数、g_{Δ}——单位质量的热辐射能量。如果过程还是可逆的，则有

$$\delta Q = T\mathrm{d}S = 0$$

于是对于多方气体，从(7.9)式可以推出沿质点轨迹

$$\frac{p}{\rho^k} = \mathrm{const} \tag{7.13}$$

7.1.2 气体动力学的封闭方程组

在如上假定的条件下，由普遍形式的流体力学微分方程组(6.26)式，便得到封闭的气体动力学方程组：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\mathrm{div}\nu = 0 \\ &\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p \\ &\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 0 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p}{\rho^k}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.14}$$

上式为五个方程、五个未知函数：p、ρ、ν，故方程组封闭。如上方程组在直角坐标系中写成分量形式为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0 \\ &\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ &\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ &\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p}{\rho^k}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

式中，v_x、v_y、v_z 为 ν 在直角坐标系中 x、y、z 轴方向的分量。

7.2 气体动力学控制方程的普遍积分

由经典的气体动力学方程组(7.14)，可以推出几个重要积分。

7.2.1 绝热方程的积分(integral of adiabatic equation)

据(7.14)的第三式，有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 0, \quad 或\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{p}{\rho^k}) = 0$$

将这两个物质导数积分，则给出沿质点轨迹成立的积分

$$\frac{p}{\rho^k} = A = \mathrm{const} \tag{7.16}$$

$$S = C_v \ln \frac{p}{\rho^k} = C_v \ln A = \mathrm{const} \tag{7.17}$$

如上两式就是(7.13)式和(7.9)式，它们成立的条件是沿质点轨迹，质点不同(即轨迹不同)常数 A 亦不同，即随体等熵。(注意，随体等熵与一般所说的等熵概念不同，一般的等熵是指在所研究的流场中熵取同值。)

如果流动是定常的，则流线与迹线重合，这时(7.16)和(7.17)式沿流线亦成立。

在此引进一个重要物理量 a——声速(sound velocity)，它定义作

$$a = \sqrt{(\frac{\partial p}{\partial \rho})_S} \tag{7.18}$$

关于它的由来与意义，见下节。

根据声速的定义，则由(7.16)式以及(7.3)式推出沿迹线(即沿质点轨迹)有

$$a^2 = \frac{kp}{\rho} = kRT = kA\rho^{k-1} \tag{7.19}$$

根据焓的定义(4.93)式，有

$$i = C_p T = e + \frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} = \frac{a^2}{k-1} \tag{7.20}$$

于是由以上诸式，可以推出沿迹线(定常时，亦即沿流线)有

$$\left.\begin{aligned} &\frac{p}{p_0} = (\frac{\rho}{\rho_0})^k \\ &\frac{i}{i_0} = \frac{a^2}{a_0^2} = \frac{T}{T_0} = (\frac{p}{p_0})^{\frac{k-1}{k}} = (\frac{\rho}{\rho_0})^{(k-1)} \end{aligned}\right\} \tag{7.21}$$

在上式中下标 0 表示某个参考状态下的物理量。如果下标 0 表示的为运动开始时的物理量，则可从(7.21)式看出 p、ρ、T、a、i 这些物理量的变化方向是一致的，即要么都同时增加；要么都一同减少。

7.2.2 **伯努利方程**(Bernoulli equation)

气体在定常流动的情况下，如果还是正压的，可以推出沿流线有伯努利方程(6.106)式成立。现考虑的是气体定常流动，沿流线恰好满足正压(见(7.16)式)，故有

$$\frac{v^2}{2} + \frac{kp}{(k-1)\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{v^2}{2} + i = \mathrm{const} \tag{7.22}$$

上式就是在气体动力学中适用的伯努利方程，成立的条件是流动定常且沿流线，流线不同，如上积分式中的常数亦不同。

为了确定伯努利方程中的常数，常使用流线上三个参考状态点：驻点、极限点和临界点(stationary point, limit point and critical point)，亦即 $v=0$ 的点、$a=0$ 的点和 $v=a$ 的点。

1. 利用驻点的状态量：p_0、ρ_0、T_0、a_0 和 i_0，伯努利方程可写成如下的等价形式

$$\frac{v^2}{2} + i = i_0$$

或
$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}$$

或
$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1}$$

2. 利用极限点上的速度 v_{max}(在极限点上 $a=0$,故 $p=0$,$\rho=0$,$T=0$,因而在该点速度最大),伯努利方程可写成

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{v_{max}^2}{2} = \frac{a_0^2}{k-1} = i_0$$

由上式可得
$$v_{max} = \sqrt{2i_0} = \sqrt{\frac{2}{k-1}}a_0$$

3. 利用临界点 $v=a=a_*$,伯努利方程可写成

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{v_{max}^2}{2} = \frac{a_0^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)}a_*^2. \tag{7.23}$$

7.2.3 克洛克定理与拉格朗日积分

1. *克洛克定理*(Crocco's theorem)

据(7.14)式的第二式,有

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{7.24.1}$$

又据第一章的(1.183)式,有

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v}) \tag{7.24.2}$$

再据(7.1)式和(7.20)式,有

$$\left.\begin{aligned} T\mathrm{d}S &= \mathrm{d}e + p\mathrm{d}V \\ \mathrm{d}i &= \mathrm{d}e + p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p \end{aligned}\right\} \tag{7.24.3}$$

而

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}S &= \frac{\partial S}{\partial t}\mathrm{d}t + \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla S \\ \mathrm{d}e &= \frac{\partial e}{\partial t}\mathrm{d}t + \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla e \\ \mathrm{d}i &= \frac{\partial i}{\partial t}\mathrm{d}t + \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla i \\ \mathrm{d}p &= \frac{\partial p}{\partial t}\mathrm{d}t + \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla p \\ \mathrm{d}V &= \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t + \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla V \end{aligned}\right\} \tag{7.24.4}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 为空间微元矢量(differential element of spatial vector)。由(7.24.3)和(7.24.4)式得到

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla i - T\nabla S \tag{7.24.5}$$

于是由(7.24.1)、(7.24.2)和(7.24.5)式得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla v^{2}+\nabla i=T\nabla S+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v}) \tag{7.25}$$

上式便是克洛克定理。

2. 拉格朗日积分(Lagrangian integral)

如果流动是无旋的(irrotational)且等熵(isentropic)

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=0\quad,\quad \mathrm{d}S=0 \tag{7.26}$$

则存在势函数(Potential function)φ以及

$$\boldsymbol{v}=\nabla\varphi\quad,\quad \nabla S=0 \tag{7.27}$$

将(7.26)和(7.27)式代进(7.25)式中,给出

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi)+\frac{1}{2}\nabla v^{2}+\nabla i=0$$

将上式中的$\frac{\partial}{\partial t}$与$\nabla$交换(因时间微商与空间微商彼此独立),则有

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}v^{2}+i\right)=\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}v^{2}+\frac{a^{2}}{k-1}\right)=0 \tag{7.28}$$

将上式两边点乘以 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 并对空间积分,则给出

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}v^{2}+i=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}v^{2}+\frac{a^{2}}{k-1}=f(t) \tag{7.29}$$

这就是著名的拉格朗日积分,其中 $f(t)$是随时间变化的待定函数(参见(6.111)式,在那里考虑的是质量力有势、流体正压,正压当然等熵)。式(7.29)在全流场成立。

如果流动还是定常的,则有上式推出

$$\frac{1}{2}v^{2}+i=\frac{1}{2}v^{2}+\frac{a^{2}}{k-1}=\mathrm{const} \tag{7.30}$$

上式与只沿流线成立的伯努利方程(7.22)不同,它在整个流场中成立。式(7.30)成立的条件是:流动定常、无旋、等熵。该方程亦称作:伯努利－拉格朗日积分。

▲如果在定常的情况下,来流均匀($v_\infty\equiv$const,$a_\infty\equiv$const),则据(7.22)式,有

$$\frac{1}{2}v^{2}+i=\frac{1}{2}v^{2}+\frac{a^{2}}{k-1}=\frac{1}{2}v_{\infty}^{2}+\frac{a_{\infty}^{2}}{k-1}\equiv\mathrm{const}$$

上式在全流场成立,不止是沿流线。由上式再加定常条件,则由(7.25)式推出

$$0=T\nabla S+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v}) \tag{7.31}$$

该式表明:在定常的情况下,如果来流又是均匀的,则等熵与无旋是等价的。

7.3 声波·马赫数

在可压缩介质中的小振幅运动(即小扰动)的传播称作声波(Sound wave)。

表征连续介质(包括气体)各点的物理状态,主要有压力 p 和密度 ρ 等物理参量。当 p 和 ρ 等参量发生变化则称作扰动。如果这些参量的变化量 Δp、$\Delta\rho$、…比参量 p、ρ、…本身的数值小得多时,则称这种变化为小扰动(infinitesimal disturbance)。

声波运动引起流场中物理量的变化为小扰动,故声波在介质中的传播速度也就是小扰动在介质中的传播速度。

声波在介质中传播时，受它扰动的区域与未受扰动的区域之间的分界面——称为声波阵面(front of sound wave)，所谓音速即声波阵面相对其前面介质的移动速度，音速亦称作声速(sound velocity)。

图 7.1 给出了从 O 点发出的声波扰动在两个时刻的波阵面(只画出部分)。现在声波阵面上取一个小面元 $\mathscr{G}$，并考虑它沿其法向 $\hat{n}$(即 r 方向)移动。由于面元很小于是可将它视作一个平面沿 r 方向作一维运动，如图 7.2 所示。利用声波为小扰动这一特点，可以比较直观地导出音速的表达式。

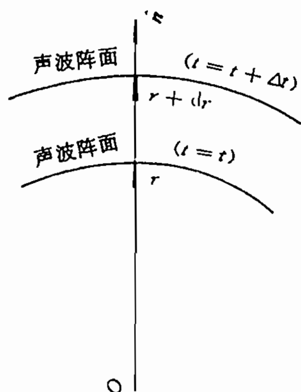


图 7.1

在 t 时刻声波阵面 $\mathscr{G}$ 处于 r 位置，在 $t+\Delta t$ 时刻 $\mathscr{G}$ 处于 $r+\Delta r$ 位置，则声波阵面在空间的运动速度 C 为：

$$C = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

注意，如上的 C 并不是所定义的音速。

为了求得音速，我们取个运动坐标系 ξ：

$$\xi = r - v_0 t$$

在该坐标系中，波阵面前面的物理量由 v_0、p_0、ρ_0 变为 $u_0=0$、p_0、ρ_0；波阵面后物理量则由 v、p、ρ 变为 $u=v-v_0$、p、ρ，见图 7.3。

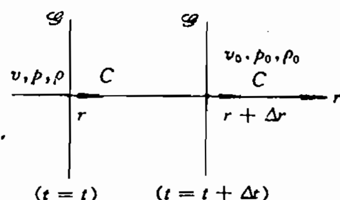


图 7.2　声波在静止坐标系中的传播

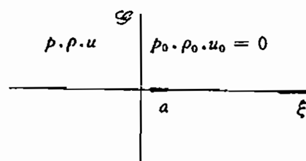


图 7.3　声波在运动坐标系中的传播

在此动坐标下，音速 a 与时空的关系为：

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta t}$$

由如上两式可以求得声波在空间的运动速度 C 与 a 之间的关系为：

$$C = v_0 + a \tag{7.32}$$

如果声波是在静止气体中传播时，则：

$$C = a \tag{7.33}$$

现在来求音速 a 与压力 p 和密度 ρ 的关系。在动坐标系下，见图 7.3，单位时间内穿过波阵面的流量和动量满足(详细推导，参看 § 7.6)：

$$\begin{cases} \rho(a - u) = \rho_0 a = m \\ p - p_0 = mu \end{cases}$$

利用 $\Delta\rho=\rho-\rho_0$，$\Delta p=p-\rho_0$，则由上式得到

$$\begin{cases} a \cdot \Delta\rho - \rho_0 u - u\Delta\rho = 0 \\ \Delta p = \rho_0 u a \end{cases}$$

由于声波为小扰动，所以 u、Δp、$\Delta\rho$ 都是无穷小量并为同阶量，于是在上式中略去二阶小量之后得到：

$$\begin{cases} a \cdot \Delta\rho - \rho_0 u = 0 \\ \Delta p = \rho_0 u a \end{cases}$$

由以上两式就得到音速与压力和密度的关系(亦即(7.18)式所定义的音速)：

$$a = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta\rho}} \tag{7.34}$$

p 一般作为密度 ρ 和熵 S 的函数，$p=p(\rho、S)$，因此在上式中若把 $\Delta p/\Delta\rho$ 视作微分关系，则应写成如下表示：

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S} \tag{7.35}$$

由于声波的传播较快，因此介质受扰动后所增加的热量尚来不及传给周围介质多少，故一般把声波传播过程看成是绝热的；又因声波扰动是一种极微弱的扰动，扰动后介质的状态参量变化极微，所以又可把它看成为一种可逆过程，于是据(7.13)式，沿着被扰动的介质质点轨迹则有

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const}$$

如若介质初始时是均匀的，则在整个流场有

$$\frac{p}{\rho^k} \equiv \text{const}$$

即整个过程是等熵的。

按(7.35)式，可求得

$$a = \sqrt{\frac{kp}{\rho}} = \sqrt{kRT} \tag{7.36}$$

对于空气 $k=1.4$，当温度为 15℃(即 $T=288\text{K}$ 时)，由上面的公式求得：$a=340$ 米/秒，该计算数值与实际相符。

当流场的压力或温度分布不均匀时，流场内各点的声速 a 也就不均匀，因此有**局部音速**的概念。

在定义了音速之后，我们引进一个重要的物理量——**马赫数**(Mach number)M，它定义作

$$\text{M} = v/a \tag{7.37}$$

式中，v 为气体质点的速度值。

当 M<1，即 $v<a$ 时，称流动为亚音速的(subsonic)；当 M>1，即 $v>a$ 时，称流动为超音速的(supersonic)；当 M=1，即 $v=a$ 时，称流动为音速流动(sonic flow)。

M 数的大小还是气体压缩程度的标志，M 越大表示压缩程度越大。这可由如下分析

说明之。

将运动方程(见(7.14)的第二式)两边同时点乘以 $\boldsymbol{v}$,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2}\right)=-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}p$$

而

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial p}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}p$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2}\right)=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial p}{\partial t}\right)$$

假若 $\partial p/\partial t$ 的值比 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t$ 的值小(或者同量级,或者流动是定常的),则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2}\right)\sim-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

将这种相似关系积分,并在随 v_0 运动的坐标系中考虑,或者认为 v_0 较小或为零,于是有

$$-\rho_*\frac{v^2}{2}\sim(p-p_0)$$

其中 ρ_* 为 ρ 取中值(如上所提到的 v_0,它为压力为 p_0 时的速度),即有

$$-\rho_*\frac{v^2}{2}\sim\Delta p$$

据(7.34)式,有

$$a^2=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\sim\frac{\Delta p}{\Delta\rho}$$

即有

$$\Delta p\sim a^2\cdot\Delta\rho$$

从而有

$$-\rho_*\frac{v^2}{2}\sim a^2\cdot\Delta\rho$$

即有

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_*}\sim-\frac{1}{2}\frac{v^2}{a^2}=-\frac{1}{2}M^2 \tag{7.38.1}$$

由(7.38.1)式清楚地看出,M 越大则 $\Delta\rho$ 就越大,即密度变化越大,密度变化越大就标志着介质被压缩得越厉害,所以说 M 的大小标志着介质的压缩程度大小。

当 M 很小时,忽略密度的变化,而把气体作为不可压缩流体来处理,如低亚音速飞行的流场就是如此处理的(通常约定在 $M<0.15$ 时,就可如此对待)。

M 数的大小也标志着气体动能和内能的比值,M 越大则表明动能相对越大,而内能较小;反之亦然。这可从如下论证看出:

$$\frac{\text{动能}}{\text{内能}}=\frac{\frac{v^2}{2}}{e}=\frac{\frac{v^2}{2}}{\frac{1}{k-1}\frac{p}{\rho}}=\frac{k(k-1)}{2}M^2 \tag{7.38.2}$$

由本节的分析论证亦说明,小扰动相对介质以音速传播。

7.4 亚音速气流与超音速气流的性质

7.4.1 两种流动其扰动影响区域的差异

若在均匀静止气体中有一个以常速 v 作直线运动的小扰动源，它从 $t=0$ 开始从 O_0 点出发，所产生的扰动以音速 a 在介质中传播，到 $t=\tau$ 时刻，扰源运动到空间点 O. 现研究从 $t=0$ 到 $t=\tau$ 时为止扰动源在传播中所造成的扰动影响区。

1. *扰源的运动速度 $v<a$ 情形*

在 $t=\tau$ 时刻看，于 $t=0$ 时从 O_0 点出发的最先扰动已到达以 O_0 为球心、以 $R_0=a\tau$ 为半径的空间球面；而在 $t=\tau_1$ 时刻由 O_1 点（$\overline{O_0O_1}=v\tau_1$）发出的扰动这时到达以 O_1 为球心、以 $R_1=a(\tau-\tau_1)$ 为半径的球面。而 $t=\tau$ 时扰源沿 $\overline{AO_1}$ 线已到达 O 点，运动的距离 $l=\overline{OO_0}=v\tau$。由于 $v<a$，所以在任何时刻发出的扰动其传播距离都要超过扰源。以沿扰源运动方向传播的扰动为例：$t=\tau$ 时刻，由 O_0 点发出的扰动已到达 A 点；由在 $t=\tau_1$ 时从 O_1 发出的扰动已到达 B 点；而这时扰源却处于 O 点。显然，$\overline{O_0O}<\overline{O_0A}$； $\overline{O_1O}<\overline{O_1B}$，见图 7.4。

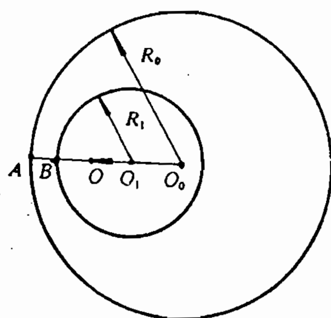


图 7.4 亚音速运动的扰源

由上分析得出，对于亚音速运动的扰源，总是扰动在前，而扰源在后；同时，随着时间的增长，扰源与其扰动所达到的最大距离之间的差距越来越大，只要不加时间限制，扰源所产生的扰动就可达到空间任何一点。

2. *扰源的运动速度 $v>a$ 情形*

一切同上，扰源还是在 $t=0$ 时刻从 O_0 点出发，当然扰动亦从此开始，现考虑 $t=\tau$ 时刻扰源所处的位置，以及扰动所波及的范围。在 $t=\tau$ 时，扰源处于 O 点，所运动的距离 $l=v\tau$；这时在 $t=0$ 由 O_0 点发出的扰动到达以 O_0 为球心、以 $R_0=a\tau$ 为半径的球面。而在 $t=\tau_1$ 由 O_1 点发出的扰动到达以 O_1 为球心、以 $R_1=a(\tau-\tau_1)$ 为半径的球面，如图 7.5 所示的轴截面。从该图看出，$\overline{OQ_0}$显然是从 $t=0$ 到 $t=\tau$ 期间各个时刻发出的扰动阵面在 τ 时刻的包络(envelope)，按扰源和扰动传播的规律可以推得这一结

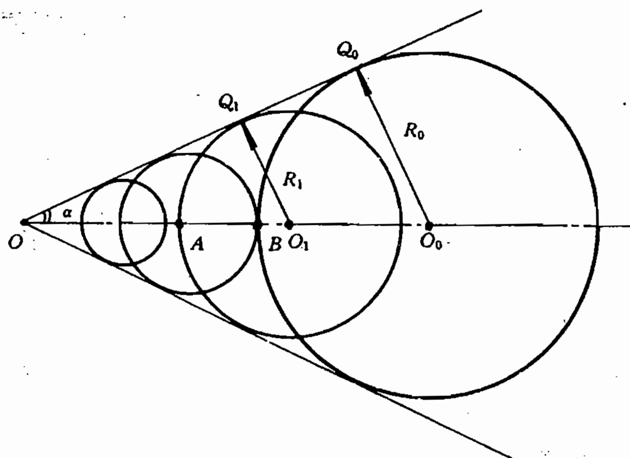


图 7.5 超音速运动的扰源

果，因为

$$\frac{\overline{OO_0}}{R_0}=\frac{v\tau}{a\tau}=\frac{v}{a}=\mathrm{M}$$

而

$$\frac{\overline{OO_1}}{R_1}=\frac{v(\tau-\tau_1)}{a(\tau-\tau_1)}=\frac{v}{a}=\mathrm{M}$$

所以$\overline{OQ_0}$为圆 O_1 和圆 O_0 的公切线(common tangent)，由于 τ_1 是任取的，所以$\overline{OQ_0}$亦是所说的各个时刻扰动阵面的公切线。在空间看，在 $t=\tau$ 时刻扰动区域的外边界则是以 O 为顶点、以$\overline{OQ_0}$为母线(generatrix)的圆锥面(conic surface)。被扰源影响(即扰动)的区域只局限在圆锥面之内，不管 τ 取值多大，均如此。该圆锥顶角的一半以 α 表示它，它满足

$$\sin\alpha=\frac{a\tau}{v\tau}=\frac{a}{v}=\frac{1}{\mathrm{M}} \tag{7.39}$$

由上清楚地看出，对于以超音速运动的扰源而言，扰动总是跟在扰源之后，这与亚音速运动的扰源情形相反。例如，我们站在地面看朝你头上飞来的飞机。如若飞机是战斗机(超音速飞行)，则该机刚飞过你头顶时你还听不到尖叫声；如若飞机是农用机(亚音速飞行)，则该机尚未到你头顶你就听到轰鸣声。

以上谈的是扰源超音速飞行或亚音速飞行，这似乎与超音速气流和亚音速气流联系不上，实质不然。如果将坐标系(如观察者)取在扰源上，则成了扰源不动，气体运动，即成了气体以超音速或亚音速朝扰源流动。因此，如上所论亦是均匀气流朝一固定扰源流动的情形。(详细分析参见 §7.17。)

3. *扰源运动速度 $v=a$ 的情形*

扰源仍在 $t=0$ 时刻从 O_0 点出发，扰动当然亦从此开始。到 $t=\tau$ 时刻扰源到达 O 点，所走距离$\overline{O_0O}=v\tau$，而从 O_0 发出的扰动这时已到达以 O_0 为圆心、以 $R_0=a\tau$ 为半径的球面。由于 $v=a$，所以$\overline{O_0O}=R_0$，即扰源这时正好处在从 O_0 点发出的扰动球面上。不仅如此，在该时刻($t=\tau$ 时)看，从 $t=0\to t=\tau$ 的各个时刻所发出的扰动均到达 O 点，即扰源与扰动在传播方向"同步"，整个传播图像如图 7.6 所示。

7.4.2 两种流动(或三种流动)其控制方程的性质不同

亚音速气流与超音速气流在数学描述上的原则区别表现为：描述亚音速气流运动的方程组是椭圆型的；描述超音速气流运动的方程组是双曲型的。

如果流场内同时存在有超音速气流和亚音速气流，则其控制方程组是混合型的，即运动方程组在亚音速气流区是椭圆型的，而在超音速流动区是双曲型的(hyperbolic type)。

以上所述都是对于定常流动而言。对于不定常流动，其方程组在任何情况下都是双曲型的(显然，t_0 时刻产生的扰动只能影响到 $t\geqslant t_0$ 的时空区域)。

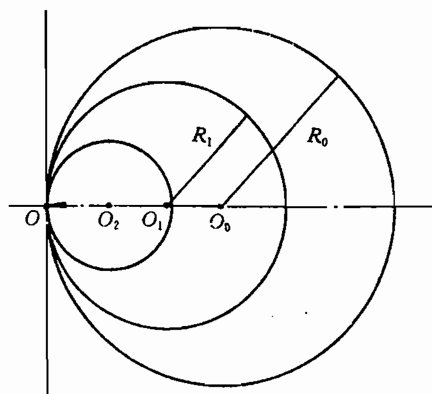


图 7.6 音速运动的扰源

综上所述，气体动力学可以分为四种情况：①定常亚音速气体动力学——对应椭圆型(elliptical type)方程组；②定常跨音速(steady transonic)气体动力学——对应混合型(mixed type)方程组；③定常超音速气体动力学——对应双曲型方程组；④不定常气体动力学——对应双曲型方程组。

7.5 一维定常的气体管流

一个以 x 轴为对称、横截面 $F(x)$ 随 x 缓慢变化的管，如图 7.7 所示。假定气流沿管做定常流动。

根据截面 $F(x)$ 随 x 缓慢变化这一特点，以及定常流动假定，则有以下简化结果：

$$v_x = v(x), \rho = \rho(x), p = p(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \approx 0, \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \approx 0$$

根据以上这些简化，方程组(7.14)变成

$$\left.\begin{aligned} & v\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} + \rho\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0 \\ & v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ & v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{p}{\rho^k}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.40)$$

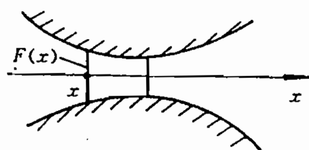


图 7.7 拉瓦管

注意，在方程组(7.40)的第一式(即连续方程)中：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \neq \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

之所以如此，是为了保持这个近似一维管流的特色。如果在连续方程中取：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

则问题就成了严格的一维流动，从而反映不出截面变化所造成的影响。

在(7.40)中除了第一式外，很容易积分。为了避开这种微分形式的连续方程积分，而采用积分形式的质量守恒方程或者直接对管流使用质量守恒规律。

由于流动定常，以及 $v_x = v \neq 0, v_y \approx 0, v_z \approx 0$，因而有：

$$\rho v F = \mathrm{const} \qquad (7.41)$$

将(7.40)的第二式和第三式积分，得到：

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} = \frac{v^2}{2} + i = \mathrm{const} \qquad (7.42)$$

$$\frac{p}{\rho^k} = \mathrm{const} \qquad (7.43)$$

因 $F = F(x)$ 已知，所以由(7.41)、(7.42)、(7.43)式构成一个封闭的方程组，故可求得任一个截面上的 v、p、ρ 值。

如下讨论一下流速与管截面的关系。

将(7.41)式对 x 求微分，然后对所得式两边同除 $\rho v F$，推出：

$$\frac{dF}{F}=-\left(\frac{dv}{v}+\frac{d\rho}{\rho}\right)$$

而由(7.40)的第二式得到

$$vdv=-\frac{1}{\rho}dp$$

按音速的定义

$$a^2=\frac{dp}{d\rho}$$

从而得到

$$\frac{dF}{F}=\frac{dv}{v}\left(\frac{v^2}{a^2}-1\right)=(M^2-1)\frac{dv}{v} \tag{7.44}$$

上式给出了管截面变化与速度变化之间的关系。从该式看出：

1. 当气流做亚音速(即 M<1)流动时，dF/F 与 dv/v 的正负号相反。从而表明在这种情况下，随着管截面 F 的缩小，气流速度 v 增加；相反，当 F 增大时，v 值减小。

由(7.42)和(7.43)式还可以看出，随着 v 的增大，压力 p 下降，密度 ρ 减小。

从以上分析看出，在实际应用中，气流作亚音速流动时，若想达到气流加速的目的可以采用收缩型的管道；反之，可采用扩张型管道。

2. 当气流做超音速(即 M>1)流动时，dF/F 与 dv/v 的变化趋势相同。随着管截面 F 的增大，气流速度 v 也增大，而压力 p 和密度 ρ 下降；相反，随着 F 的减小，气流的速度也减小，而压力和密度却增加。就速度而言，这恰恰与亚音速流动的情形相反。

由此可见，在气流作超音速流动时，要达到增加速度的目的，可采用扩张型管道；相反，可采用收缩型管道。

3. 当 M=1 时，$dF/F=0$，此时管截面 F 取极值，F 取最大或最小，即流动达到音速的地方只能出现在管道截面的最大或者最小之处。

实际上，在连续的管流中，气流达到音速(M=1)一般只出现在管的最小截面处。因为，假若入口处气流为亚音速的，只有 F 逐渐减小，v 才能逐渐增加到音速；如果入口处气流是超音速的，那只有 F 减小，才能达到减速的目的。这个流管的最小截面处通常称为喉管(throat)。

为了使亚音速气流逐渐地加速到超音速，喷管的形状应取成先收缩后扩张的形式，如图 7.7 所示，中间有一个喉部。这种带喉部的流管就是大家所熟知的拉瓦管(Laval nozzle)，它已在超音速风洞和火箭喷射技术(supersonic wind tunnel and jetting technique of rocket)中获得了广泛的应用。

7.6 冲击波相容条件

在力学中扰动的传播就是波，波有强有弱。所谓冲击波则是一种强扰动间断面的传播。所谓强间断面，是指穿过这个面时流体的速度、压力和密度等物理量发生间断的面，如图 7.8(a)中 $x=x_0$ 处就是一个强间断点。

上面所说的冲击波(亦称作激波)是数学上的一种抽象，实际的冲击波则是一个物理量(指速度、压力和密度等)发生急剧变化的区间，这个区间的宽度 δ 很薄，与分子自由程

同量级，以致在这个薄层区内介质不能看做连续介质。不过，在某些数值计算和物理处理中仍把激波层内的介质作为连续介质，其物理量视作在 δ 区间内急剧且连续变化，如图7.8(b)所示。但是这样所求得的物理量并不能真正描述激波层内的情况，只是以此为桥梁，将激波前后的物理量“合理地”联系起来。

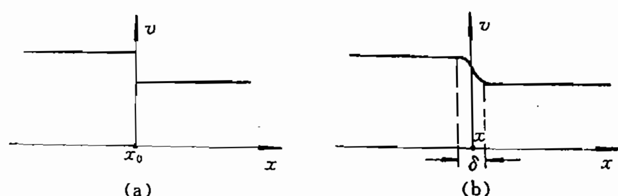


图 7.8　穿过强间面物理量的变化

冲击波不仅仅是气体高速流动中可能产生的重要物理现象，它在自然界中普遍存在，在液体中有，固体中也有。产生冲击波的起因很多，炸药爆炸在空气中或在其接触的固体中所产生的冲击波则是最常见的事例之一；冲击波也是爆炸力学要研究的重要内容。

冲击波理论，早在19世纪后半期，已由黎曼(Riemann)、兰肯(Rankine)、雨贡纽(Hugoniot)等人所建立。

冲击波作为一种间断面(surface of discontinuity)，在其上物理量的守恒条件，我们在§4.9中已按积分法推出来，参见(4.138)～(4.140)式。现为了让读者熟悉一下在力学中常用的体元法(method of differential element of volume)，将按体元法推出冲击波的普遍相容关系式(compatibility relations)(即守恒条件)。

7.6.1　按“粗略”的体元法推守恒关系

推导之前，先做以下假设：

①在间断面两边，各为等比热的完全气体、作无粘性绝热流动。

②间断面本身代表一个薄层，薄层的厚度 $\delta \leqslant L$，L 为问题中的特征尺度。凡是与 δ 同阶的量，即 $O(\delta)$ 阶次，都忽略不计。

现在间断面的薄层上取一块小微元，如图7.9(a)所示。由于微元面很小，故可作为平面，如图7.9(b)所示。设该微元体的面积为单位1、厚度即 δ，则其体积 $\tau=\delta\cdot 1=\delta$.

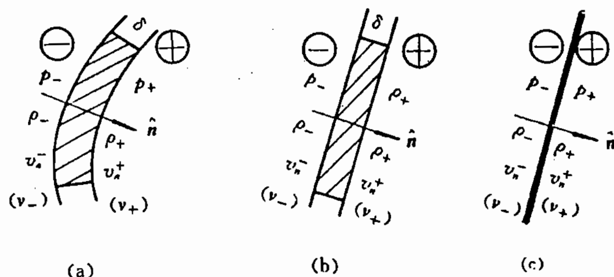


图 7.9　强间断面

在如上的微元体内的质量为 $\rho\tau$，动量为 $\rho\tau\boldsymbol{v}$，动能为 $\rho\tau v^2/2$，内能为 $\rho\tau e$。由于这些量及其它们的微分量都与 τ（即与 δ）成正比，即为 $O(\delta)$ 量级，所以全都忽略。

在以下的推导过程中，均按图 7.9(b)所示的体元进行。其实亦可不必考虑间断层的厚度 δ，而只把这个间断层作为一个几何面即可，如图 7.9(c)所示那样。按图 7.9(b)推导时，略去与 τ 相当的量则就相当于按图 7.9(c)进行，之所以那样做是为了更严格一些。

激波层的整体运动速度以 N 表示；激波前面的量加下标“＋”表示，后面的量加下标“－”表示；$\hat{\boldsymbol{n}}$ 为激波阵面的单位法线，它指向“＋”区；令 $[p]=p_- - p_+$，$[\rho]=\rho_- - \rho_+$，…

1. 对图 7.9(b)所示的微元体使用质量守恒

单位时间流进小体元 τ 的质量为：

$$\Delta m_+ = \rho_+ (N - v_n^+) = \rho_+ U_+$$

其中

$$\begin{cases} v_n^+ = \boldsymbol{v}_+ \cdot \hat{\boldsymbol{n}} & \text{法向速度} \\ U_+ = N - v_n^+ \end{cases}$$

单位时间流出小体元 τ 的质量为：

$$\Delta m_- = \rho_- (N - v_n^-) = \rho_- U_-$$

其中

$$\begin{cases} v_n^- = \boldsymbol{v}_- \cdot \hat{\boldsymbol{n}} & \text{法向速度} \\ U_- = N - v_n^- \end{cases}$$

略去微元体质量的变化，则有

$$\Delta m_+ = \Delta m_-$$

于是得到

$$\rho_+ U_+ = \rho_- U_- = \rho U \tag{7.45.1}$$

或写成

$$[\rho U] = 0 \tag{7.45.2}$$

2. 对微元体使用动量守恒

单位时间内流进小体元 τ 的动量为：

$$\Delta m_+ \cdot \boldsymbol{v}_+ = \rho_+ U_+ \boldsymbol{v}_+$$

单位时间内流出小体元 τ 的动量为：

$$\Delta m_+ \cdot \boldsymbol{v}_- = \rho_- U_- \boldsymbol{v}_-$$

作用在小体元 τ 上的合力（略去质量力和平行于 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 向的体元两侧面上的面力）：

$$p_- \hat{\boldsymbol{n}} - p_+ \hat{\boldsymbol{n}} = (p_- - p_+)\hat{\boldsymbol{n}}$$

根据动量变化规律，并略去那些与 δ 同阶的量，则有：

$$\rho_+ U_+ \boldsymbol{v}_+ - \rho_- U_- \boldsymbol{v}_- = (p_+ - p_-)\hat{\boldsymbol{n}}$$

即

$$\rho U[\boldsymbol{v}] = [p]\hat{\boldsymbol{n}} \tag{7.46}$$

3. 对微元体使用能量守恒

单位时间内流进小体元 τ 的能量为：

$$\Delta m_+ \cdot \left(\frac{v_+^2}{2} + e_+\right)$$

单位时间内流出小体元 τ 的能量为：

$$\Delta m_- \cdot \left(\frac{v_-^2}{2} + e_-\right)$$

单位时间内压力对体元 τ 所做的功为：

$$p_- v_n^- - p_+ v_n^+$$

根据能量守恒规律，并略去那些与 δ 同阶的量，则有：

$$\rho U\left[\frac{v^2}{2} + e\right] = [p v_n] \tag{7.47}$$

如若所考虑的气体是多方气体，则其内能（见(7.8)式）为：

$$e = C_v T = \frac{1}{k-1}\frac{p}{\rho}$$

故(7.47)式可以写成

$$\rho U\left[\frac{v^2}{2} + \frac{1}{k-1}\frac{p}{\rho}\right] = [p v_n] \tag{7.48}$$

式(7.45)、(7.46)、(7.47)或(7.48)给出了穿过激波阵面两边物理量的普遍关系式，即强间断面上的相容条件。

作为一般的间断面，都有介质通过它。但如果这个间断面一直由固定的质点组成，即有 $U \equiv 0$，这时如上的相容关系式变化：

$$p_+ = p_- \tag{7.49}$$

$$v_n^+ = v_n^- \tag{7.50}$$

同时，在 $U \equiv 0$ 的条件下还可以推出，速度的切向分量 v_τ、密度 ρ 穿过间断面的跳跃可以是任意的。

对于 $U = 0$ 的间断面，有的书上又称作“不传播间断面”。最常见的这种间断面，为两种介质的分界面。但要注意，所谓“不传播”不是指这个间断面在空间不移动，即不是 $N = 0$，而是指间断面在法向方向相对它的前后介质是不动的，即没有介质穿过间断面。

7.6.2 按“精确”的体元法推守恒关系

现在冲击波阵面上取一小微元体，如图 7.10(a)所示。设微元体高为 h、宽为 s、厚为 δ，图 7.10(b)为过 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 和 $\hat{\tau}$ 截面、图 7.10(c)为过 $\hat{\boldsymbol{k}}$ 和 $\hat{\tau}$ 截面。$\hat{\boldsymbol{n}}$、$\hat{\tau}$、$\hat{\boldsymbol{k}}$ 为单位矢量。

令

$$\begin{cases} v_n^+ = \boldsymbol{v}_+ \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \\ v_n^- = \boldsymbol{v}_- \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{1\tau} = \boldsymbol{v}_1 \cdot \hat{\tau} \\ v_{2\tau} = \boldsymbol{v}_2 \cdot \hat{\tau} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{3k} = \boldsymbol{v}_3 \cdot \hat{\boldsymbol{k}} \\ v_{4k} = \boldsymbol{v}_4 \cdot \hat{\boldsymbol{k}} \end{cases}$$

在小微元体上考虑动量守恒：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v}) hs\delta = {} & (p_- - p_+)\hat{\boldsymbol{n}} hs + \rho_+ (N - v_n^+)\boldsymbol{v}_+ hs - \rho_- (N - v_n^-)\boldsymbol{v}_- hs + \\ & + (p_1 - p_2)\hat{\tau} s\delta + \rho_1 v_{1\tau} \boldsymbol{v}_1 s\delta - \rho_2 v_{2\tau} \boldsymbol{v}_2 s\delta + \\ & + (p_3 - p_4)\hat{\boldsymbol{k}} h\delta + \rho_3 v_{3\tau} \boldsymbol{v}_3 h\delta - \rho_4 v_{4\tau} \boldsymbol{v}_4 h\delta \end{aligned}$$

在上式中，当令 $\delta \to 0$，则推出

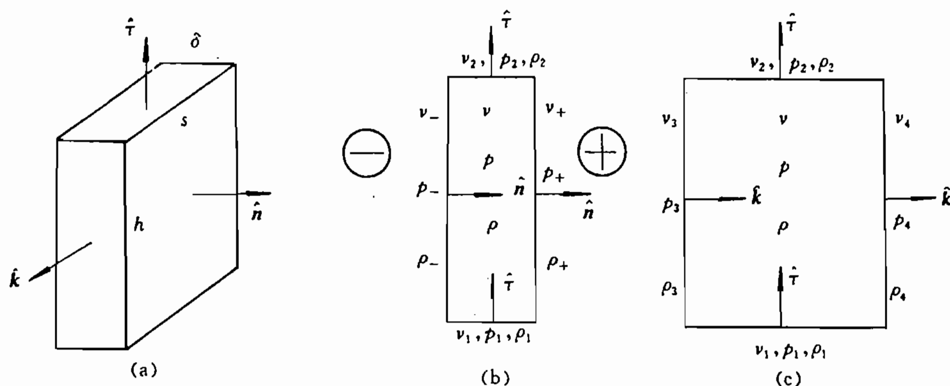


图 7.10

$$\rho U[\boldsymbol{v}] = [p]\hat{\boldsymbol{n}}$$

上式即(7.46)式。同理可推出(7.45)式和(7.47)式。由此可见粗略的推法亦完全正确。

7.7 冲击波相容性条件的各种形式·冲击绝热曲线

7.7.1 原始形式以及相当于原始形式的冲击波相容关系式

将上节所给出的关于冲击波的三个相容关系式归并在一起，并假定气体的内能函数 $e=e(p,\rho)$ 已知。于是作为总的冲击波相容关系式为：

$$\left.\begin{aligned}&[\rho U] = 0\\&\rho U[\boldsymbol{v}] = [p]\hat{\boldsymbol{n}}\\&\rho U\left[\frac{v^2}{2} + e\right] = [p v_n]\\&(e = e(p,\rho))\end{aligned}\right\} \tag{7.51}$$

将上式中的第二式两边点乘以 $\hat{\boldsymbol{n}}$，并考虑到 $|\hat{\boldsymbol{n}}|=1$，可求得

$$\rho U[\boldsymbol{v}]\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \rho U[v_n] = [p]\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = [p]$$

将(7.51)式的第二式两边点乘以 $\hat{\tau}$，则有

$$\rho U[\boldsymbol{v}]\cdot\hat{\tau} = [p]\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\tau}$$

由于矢量 $\hat{\tau}$ 为间断面的切向单位矢量：

$$\hat{\tau}\cdot\hat{\tau} = 1 \quad , \quad \hat{\tau}\perp\hat{\boldsymbol{n}}$$

因而推得：

$$\rho U[\boldsymbol{v}]\cdot\tau = \rho U[\boldsymbol{v}\cdot\tau] = \rho U[v_\tau] = 0$$

从而得到一个重要的结论：对于传播间断面(即 $U\neq0$)则有：

$$[v_\tau] = 0 \tag{7.52}$$

这说明穿冲击波阵面，其切向速度分量不间断。

利用(7.52)式可以推出对于其传播间断面则有：

$$[v^2] = [v_n^2] \tag{7.53}$$

根据以上的结果，对于传播间断面其激波相容关系式又可写成：

$$
\left.\begin{array}{l}
[\rho U] = 0 \\
\rho U[v_n] = [p] \\
\rho U[\frac{v_n^2}{2} + e] = [p v_n] \\
(e = e(p,\rho)) \\
[v_\tau] = 0
\end{array}\right\} \tag{7.54}
$$

式(7.54)联系了激波前后的 v_n^+、v_n^-、v_τ^+、v_τ^-、p_+、p_-、ρ_+、ρ_-以及 N 共九个量，而关系式为四个(将能量方程和内能函数 $e(p,\rho)$视作一个关系式)。如果激波前的物理量以及波速 N 已知，就可由(7.54)求得波后的物理量。然而 N 往往是未知的。

将(7.54)式再改写成一种形式。利用比容 $V=1/\rho$，式(7.54)的第一式则写成：

$$
\frac{N - v_n^+}{V_+} = \frac{N - v_n^-}{V_-}
$$

由此推出

$$
v_n^- = N - \frac{V_-}{V_+}N + \frac{V_-}{V_+}v_n^+
$$

将上式两边同减去 v_n^+ 之后，经过整理则推出：

$$
\frac{N - v_n^+}{V_+} = \frac{v_n^- - v_n^+}{V_+ - V_-} \tag{7.55}
$$

将(7.54)的第二式改写成

$$
\frac{N - v_n^+}{V_+} = \frac{p_- - p_+}{v_n^- - v_n^+}
$$

再利用(7.55)式就得到：

$$
v_n^- - v_n^+ = \sqrt{(p_- - p_+)(V_+ - V_-)} \tag{7.56.1}
$$

或

$$
v_n^- - v_n^+ = (V_+ - V_-)\sqrt{\frac{p_- - p_+}{V_+ - V_-}} \tag{7.56.2}
$$

将上式代进(7.55)式中，则给出

$$
N - v_n^+ = V_+\sqrt{\frac{p_- - p_+}{V_+ - V_-}} \tag{7.57}
$$

由(7.54)的第三式展开得出：

$$
(e_- - e_+) + \frac{1}{2}[(v_n^-)^2 - (v_n^+)^2] = \frac{p_- v_n^- - p_+ v_n^+}{\rho_+ (N - v_n^+)}
$$

而由(7.54)的第二式给出

$$
\rho_+ (N - v_n^+) = \frac{p_- - p_+}{v_n^- - v_n^+}
$$

于是得到

$$
(e_- - e_+) + \frac{1}{2}[(v_n^-)^2 - (v_n^+)^2] = (v_n^- - v_n^+)\frac{p_- v_n^- - p_+ v_n^+}{p_- - p_+}
$$

上式整理后，推出

$$e_- - e_+ = \frac{1}{2}(v_n^- - v_n^+)\left\{\frac{2(p_- v_n^- - p_+ v_n^+)}{p_- - p_+} - (v_n^- + v_n^+)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(v_n^- - v_n^+)^2 \frac{p_- + p_+}{p_- - p_+}$$

再利用(7.56)式，就得到

$$e_- - e_+ = \frac{1}{2}(p_- + p_+)(V_+ - V_-)$$

综上所述，则得到一组新的冲击波关系式

$$\left.\begin{aligned} & N - v_n^+ = V_+ \sqrt{\frac{p_- - p_+}{V_+ - V_-}} \\ & v_n^- - v_n^+ = \sqrt{(p_- - p_+)(V_+ - V_-)} \\ & e_- - e_+ = \frac{1}{2}(p_- + p_+)(V_+ - V_-) \\ & (e = e(p, \rho)) \end{aligned}\right\} \tag{7.58}$$

注意，在导出(7.56)～(7.58)式时开方均取正号，原因是我们规定激波传播方向为正。

(7.54)式还可改写一种形式。因：

$$U = N - v_n \quad , \quad 则有 \quad [U] = -[v_n]$$

又因：

$$\rho U = \rho_+ U_+ = \rho_- U_-$$

于是(7.54)的第二式可写成：

$$[p + \rho U^2] = 0 \tag{7.59}$$

将(7.54)的第三式中的 v_n 改换成：$N-U$，并利用：$[N]=0$、$[N^2]=0$，则该式可写成：

$$\rho U\left[\frac{U^2}{2} - NU + e\right] = [p(N - U)] = [p]N - \left[\frac{p}{\rho} \cdot \rho U\right]$$

将上式移项后，求得：

$$\rho U\left[\frac{U^2}{2} + e + \frac{p}{\rho}\right] = [p + \rho U^2]N$$

再利用(7.59)式，并考虑到：$\rho U \neq 0$，于是

$$\left[\frac{U^2}{2} + e + \frac{p}{\rho}\right] = 0$$

将以上诸式归纳起来，便得到冲击波相容关系的更常见的一种形式

$$\left.\begin{aligned} & [\rho U] = 0 \\ & [p + \rho U^2] = 0 \\ & \left[\frac{U^2}{2} + e + \frac{p}{\rho}\right] = 0 \\ & (e = e(p, \rho)) \end{aligned}\right\} \tag{7.60.1}$$

此组关系式亦是在随冲击波阵面运动的坐标系中的冲击波关系式。

如果气体是多方气体，如上的激波关系式又可写成：

$$\left.\begin{aligned}&[\rho U]=0\\&[p+\rho U^2]=0\\&\left[\frac{U^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}\right]=0\end{aligned}\right\}\tag{7.60.2}$$

7.7.2 正激波(normal shock wave)

如上所给出的激波关系是对于普遍情形,即气流与冲击波阵面成任意角度。然而在气体动力学和爆轰学中最常用的是一维平面激波关系式,即正激波。对于正激波,气流垂直冲击波阵面,即

$$\boldsymbol{v}_+=v_+\hat{\boldsymbol{n}},\quad \boldsymbol{v}_-=v_-\hat{\boldsymbol{n}}$$

于是

$$v_n^+=v_+,\quad v_n^-=v_-,\quad U_+=N-v_+,\quad U_-=N-v_-,\quad U=N-v$$

从而(7.54)式和(7.58)式变成

$$\left.\begin{aligned}&[\rho U]=0\\&\rho U[v]=[p]\\&\rho U\left[\frac{v^2}{2}+e\right]=[pv]\\&(e=e(p,\rho))\end{aligned}\right\}\tag{7.61.1}$$

$$\left.\begin{aligned}&N-v_+=V_+\sqrt{\frac{p_--p_+}{V_+-V_-}}\\&v_--v_+=\sqrt{(p_--p_+)(V_+-V_-)}\\&e_--e_+=\frac{1}{2}(p_-+p_+)(V_+-V_-)\\&(e=e(p,\rho))\end{aligned}\right\}\tag{7.61.2}$$

如下推导在气体动力学中一个非常著名的公式——**普朗特公式**(Prandtl's formula)。

对于一维正激波,以激波传播速度U表示的激波关系式(7.60.1)和(7.60.2)当然照样成立。现考虑的是多方气体,据(7.60.2)式则有

$$\left.\begin{aligned}&\rho_+U_+=\rho_-U_-=\rho U\\&p_++\rho_+U_+^2=p_-+\rho_-U_-^2\\&\frac{U_+^2}{2}+\frac{kp_+}{(k+1)\rho_+}=\frac{U_-^2}{2}+\frac{kp_-}{(k-1)\rho_-}\end{aligned}\right\}\tag{7.61.3}$$

令
$$\rho U=\Delta m\tag{7.61.4}$$

利用上式和(7.61.3)的第一式,则由(7.61.3)的第二式推出

$$\Delta m(U_+-U_-)=p_--p_+\tag{7.61.5}$$

根据(7.61.4)式和(7.61.3)的第一式,则给出

$$\begin{cases}\rho_+U_+U_-=\Delta mU_-\\\rho_-U_-U_+=\Delta mU_+\end{cases}$$

将如上两式代进(7.61.5)式,则推出

$$U_+ U_- = \frac{p_- - p_+}{\rho_- - \rho_+} \tag{7.61.6}$$

对于以 U 表示的激波关系式而言，如果将坐标系取在激波阵面上，流动则成了一维定常流动，如上提到的 U_+ 和 U_- 就是激波前后的气体流动速度。对于这样的定常流动，在冲击波前后分别有伯努利方程成立，即有

$$\frac{U_+^2}{2} + \frac{kp_+}{(k-1)\rho_+} = \frac{k+1}{2(k-1)}a_{*+}^2 \tag{7.61.7}$$

$$\frac{U_-^2}{2} + \frac{kp_-}{(k-1)\rho_-} = \frac{k+1}{2(k-1)}a_{*-}^2 \tag{7.61.8}$$

其中 a_{*+} 和 a_{*-} 分别为激波前后的临界速度。而根据(7.61.3)第三式，则推出

$$a_{*+} = a_{*-} = a_* \tag{7.61.9}$$

从而说明伯努利方程穿过冲击波照样成立。

将(7.61.7)式两边同乘以 ρ_+，将(7.61.8)式两边同乘以 ρ_-。同时将 a_{*+} 和 a_{*-} 均以 a_* 代替，则推出

$$\frac{k-1}{k+1}(\rho_+ U_+^2) + \frac{2k}{k+1}p_+ = \rho_+ a_*^2$$

$$\frac{k-1}{k+1}(\rho_- U_-^2) + \frac{2k}{k+1}p_- = \rho_- a_*^2$$

再将如上两式改写成

$$\frac{k-1}{k+1}(\rho_+ U_+^2 + p_+) + p_+ = \rho_+ a_*^2$$

$$\frac{k-1}{k+1}(\rho_- U_-^2 + p_-) + p_- = \rho_- a_*^2$$

将如上两式相减，并利用(7.61.3)的第二式，则推出

$$a_*^2 = \frac{p_- - p_+}{\rho_- - \rho_+}$$

将上式与(7.61.6)式相对比，则给出

$$U_+ U_- = a_*^2 \tag{7.61.10}$$

这就是著名的**普朗特公式**。从该式看出：

若 $U_+ > a_*$，　则推出 $U_- < a_*$

据(7.61.3)的第三式，以及(7.61.7)和(7.61.8)式，则给出

$$\frac{U_+^2}{2} + \frac{a_+^2}{k-1} = \frac{U_-^2}{2} + \frac{a_-^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)}a_*^2 \tag{7.61.11}$$

利用(7.61.10)式，则由上式得到

$$\frac{U_+^2}{2} + \frac{a_+^2}{k-1} = \frac{U_-^2}{2} + \frac{a_-^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)}U_+ U_- \tag{7.61.12}$$

而

$$\begin{cases} U_- = N - v_- = (U_+ + v_+) - v_- \\ U_+ = N - v_+ = (U_- + v_-) - v_+ \end{cases}$$

将上式分别代进(7.61.12)式中，则得到两个有用的关系式

$$\frac{v_- - v_+}{a_+} = \frac{2}{k+1}\left(\frac{U_+}{a_+} - \frac{a_+}{U_+}\right) = \frac{2}{k+1}\left(\frac{N - v_+}{a_+} - \frac{a_+}{N - v_+}\right) \qquad (7.61.13)$$

$$\frac{v_+ - v_-}{a_-} = \frac{2}{k-1}\left(\frac{U_-}{a_-} - \frac{a_-}{U_-}\right) = \frac{2}{k-1}\left(\frac{N - v_-}{a_-} - \frac{a_-}{N - v_-}\right) \qquad (7.61.14)$$

如下仍研究一般激波。

7.7.3 **冲击绝热曲线**(shock adiabatics)**和瑞利线**(Rayleigh's line)

(7.58)的第三式,即能量方程:

$$e_- - e_+ = \frac{1}{2}(p_- + p_+)(V_+ - V_-) \qquad (7.62)$$

它有个特别称呼——叫做雨贡纽方程(Hugoniot equation)。如果气体是多方气体,即有

$$e = \frac{1}{k-1}\frac{p}{\rho} = \frac{1}{k-1}pV$$

将上式代进(7.62)式中,经整理则给出:

$$\frac{p_-}{p_+} = \frac{(k+1)V_+ - (k-1)V_-}{(k+1)V_- - (k-1)V_+} = \frac{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+}{(k+1)\rho_+ - (k-1)\rho_-} \qquad (7.63.1)$$

或写成:

$$\frac{V_+}{V_-} = \frac{\rho_-}{\rho_+} = \frac{(k+1)p_- + (k-1)p_+}{(k+1)p_+ + (k-1)p_-} \qquad (7.63.2)$$

式(7.63)称作多方气体的雨贡纽方程,将它表示在(p_-,V_-)平面上为一条曲线,这条曲线称作多方气体的冲击绝热曲线,或称多方气体的激波绝热曲线,或称多方气体的雨贡纽曲线。从式(7.63.2)可以看出,ρ_-的最大渐近值 ρ_{max}为:

$$\rho_{max} = \frac{k+1}{k-1}\rho_+$$

即 V_-的最小渐近值(minimum asymptotic value)V_{min}为

$$V_{min} = \frac{k-1}{k+1}V_+$$

见图 7.11(a)所示。因根据物理实际,ρ_-最小不低于 ρ_+,即 $V_- \leqslant V_+$,故在图上所画的虚线部分是(7.63)式外推到 $V_- > V_+$的情形。

注意,如上所述的是关于 p_-与 V_-(或 ρ_-)在特殊情况下(多方气体)的冲击绝热曲线。实际上,冲击绝热曲线不是单单指 p_-与 V_-关系曲线,从冲击波相容关系式推出的 V_-(或 ρ_-)、p_-、v_n^-、N 之间任何两个量之间的关系,如 v_n^- 与 N、p_-与 N,都称作冲击绝热曲线。冲击绝热曲线有时亦称兰肯-雨贡纽曲线(Rankine-Hugoniot curve)。

由(7.51)的第一式,得到

$$V_-(N - v_n^+) = V_+(N - v_n^-)$$

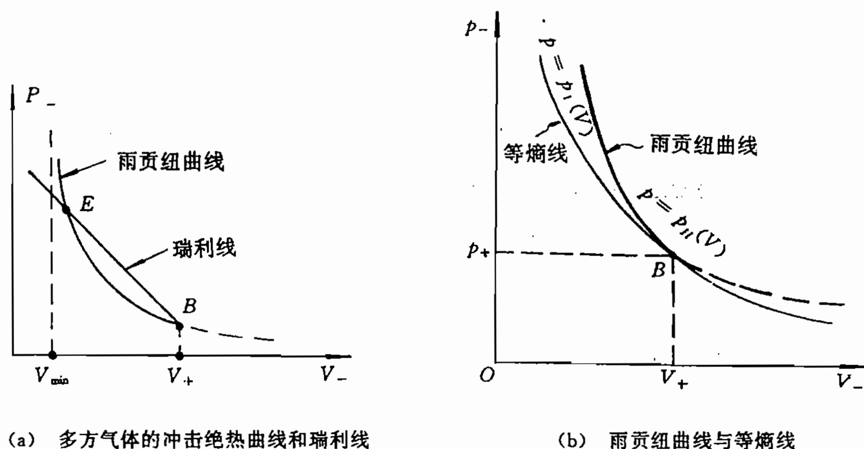
将上式两边同减去:$V_+(N - v_n^+)$后,推出

$$(N - v_n^+)(V_- - V_+) = V_+(v_n^+ - v_n^-) \qquad (7.63.3)$$

将(7.51)的第二式两边点乘以 $\hat{n}$ 后,推出

$$p_+ + \rho_+(N - v_n^+)^2 = p_- + \rho_-(N - v_n^-)^2$$

由此推出



(a) 多方气体的冲击绝热曲线和瑞利线 (b) 雨贡纽曲线与等熵线

图 7.11

$$p_- - p_+ = \rho_-(N - v_n^-)(v_n^- - v_n^+) = \rho_+(N - v_n^+)(v_n^- - v_n^+)$$

利用(7.63.3)式，将上式中的$(v_n^- - v_n^+)$消去后推得

$$\frac{p_- - p_+}{V_- - V_+} = -\rho_+^2(N - v_n^+)^2 = -\rho_-^2(N - v_n^-)^2 \tag{7.63.4}$$

在上式中，如果 N 和激波一边状态给定，如波前给定，则上式在(V_-, p_-)平面上为一条直线，如图 7.11(a)所示。这条直线就称作**瑞利线**，也有人称它为米海里逊直线(Михальсон линия)，特别是在前苏联的著作中。

7.7.4 雨贡纽曲线与等熵线的关系

雨贡纽曲线与等熵线在初值点 $B(V_+, p_+)$二级密接。

1. 对于多方气体

对多方气体的雨贡纽曲线(7.63.1)式求 V_-的一阶导数和二阶导数，得

$$\frac{\mathrm{d}p_-}{\mathrm{d}V_-} = -\frac{4kp_+V_+}{[(k+1)V_- - (k-1)V_+]^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2p_-}{\mathrm{d}V_-^2} = \frac{8k(k+1)p_+V_+}{[(k+1)V_- - (k-1)V_+]^3}$$

由以上两式得出在初始点 B，即 $V_- = V_+$时，雨贡纽曲线的导数：

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}p_-}{\mathrm{d}V_-}\right|_B &= \frac{kp_+}{V_+} = -\rho_+^2 a_+^2 \\ \left.\frac{\mathrm{d}^2p_-}{\mathrm{d}V_-^2}\right|_B &= \frac{k(k+1)p_\pm}{V_+^2} = (k+1)\rho_+^3 a_+^2 \end{aligned}\right\} \tag{7.63.5}$$

对于多方气体在等熵时，有

$$\begin{cases} p = A(S)\rho^k = A(S)V^{-k} \\ A(S) \equiv \text{const} = A_* = p_+V_+^k \end{cases}$$

即有

$$p_- = A_*V_-^{-k} \tag{7.63.6}$$

该式在(V_-, p_-)平面为一条曲线，如图 7.11(b)所示，这条曲线称作**等熵线**(isentropic

curve)。

对(7.63.6)式分别求一阶和二阶导数，并在 B 点取值，则给出

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}p_-}{\mathrm{d}V_-}\right|_B &= -kA_*V_+^{-k-1} = -\frac{kp_+}{V_+} = -\rho_+^2 a_+^2 \\ \left.\frac{\mathrm{d}^2p_-}{\mathrm{d}V_-^2}\right|_B &= k(k+1)A_*V_+^{-k-2} = \frac{k(k+1)p_+}{V_+^2} = (k+1)\rho_+^3 a_+^2\end{aligned}\right\} \quad (7.63.7)$$

比较(7.63.5)和(7.63.7)式看出：雨贡纽曲线与等熵线在初始点是二级密接的。

2. 对于一般情形

如上讨论了对于多方气体，雨贡纽曲线与等熵线相切。实际上对于非多气体亦如此，如下进行论证。

为了方便起见，将(7.62)式的下标“－”略去，写成

$$\begin{cases} e - e_+ = \dfrac{1}{2}(p + p_+)(V_+ - V) \\ e = e(p,V) \end{cases}$$

在上式中，只视 V 为自变量，e 和 p 为因变量。对上式求导，给出

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}(V_+ - V)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} - \frac{1}{2}(p + p_+)$$

而据普遍成立的热力学第一定律，有

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}e + p\mathrm{d}V$$

在上式中仍只视 V 为自变量量，其他为因变量。由以上两式求得

$$T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}(V_+ - V)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} + \frac{1}{2}(p - p_+) \quad (7.63.8)$$

将上式取在图 7.11(b)的 B 点，则给出

$$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}V}\right|_B = 0 \quad (7.63.9)$$

对(7.63.8)式再求导，则给出

$$T\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}V^2} + \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}(V_+ - V)\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}V^2}$$

将上式取在 B 点并利用(7.63.9)式，给出

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}V^2}\right|_B = 0 \quad (7.63.10)$$

熵 S 一般是作为 p 和 V 的函数，当它出现在(V,p)平面的一条曲线上时，p 与 V 不独立。如 S 取在雨贡纽曲线上时：$p = P_H(V)$，即 S 最终作为 V 的函数，如上所做那样，于是 S 作为 V 的复合函数：

$$S = S(p,V) = S(p_H(V),V)$$

对如上函数求导，给出

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}V} = \frac{\partial S}{\partial V} + \frac{\partial S}{\partial p}\cdot\frac{\mathrm{d}p_H}{\mathrm{d}V} \quad (7.63.11)$$

当上式取在图 7.11(b)的 B 点时，并考虑到(7.63.9)式，则推出

$$\left.\frac{\mathrm{d}p_H}{\mathrm{d}V}\right|_B = \left(-\frac{\partial S}{\alpha V}\Big/\frac{\partial S}{\partial p}\right)_B \tag{7.63.12}$$

对(7.63.11)式再求导，给出

$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}V^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial V\partial p}\frac{\mathrm{d}p_H}{\mathrm{d}V} + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial p\partial V} + \frac{\partial^2 S}{\partial p^2}\cdot\frac{\mathrm{d}p_H}{\mathrm{d}V}\right)\frac{\mathrm{d}p_H}{\mathrm{d}V} + \frac{\partial S}{\partial p}\frac{\mathrm{d}^2 p_H}{\mathrm{d}V^2}$$

将上式取在图 7.11(b)的 B 点，并考虑到(7.63.10)和(7.63.12)式，则给出

$$\left[\frac{\partial^2 S}{\partial V^2} - 2\frac{\partial^2 S}{\partial V\partial p}\frac{\partial S}{\partial V}\Big/\frac{\partial S}{\partial p} + \frac{\partial^2 S}{\partial p^2}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\Big/\frac{\partial S}{\partial p}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial p}\frac{\mathrm{d}^2 p_H}{\mathrm{d}V^2}\right]_B = 0 \tag{7.63.13}$$

如下考虑过 B 点的等熵曲线，因 S 表示在(V,p)平面上，p 亦作为 V 的函数，即有 $p=p_I(V)$，于是在(V,p)上过 B 点的等熵线表作

$$S = S(p,V) = S(p_I(V),V) \equiv \mathrm{const} = S(p_+,V_+)$$

对上式求导给出

$$\frac{\partial S}{\partial p}\cdot\frac{\mathrm{d}p_I}{\mathrm{d}V} + \frac{\partial S}{\partial V} = 0 \tag{7.63.14}$$

上式在 B 点当然成立，即有

$$\left.\frac{\mathrm{d}p_I}{\mathrm{d}V}\right|_B = \left(-\frac{\partial S}{\partial V}\Big/\frac{\partial S}{\partial p}\right)_B \tag{7.63.15}$$

对(7.63.14)式再求导，则给出

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial p^2}\cdot\frac{\mathrm{d}p_I}{\mathrm{d}V} + \frac{\partial^2 S}{\partial p\partial V}\right)\frac{\mathrm{d}p_I}{\mathrm{d}V} + \frac{\partial S}{\partial p}\cdot\frac{\mathrm{d}^2 p_I}{\mathrm{d}V^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial V\partial p}\cdot\frac{\mathrm{d}p_I}{\mathrm{d}V} = 0$$

利用(7.63.15)式，并取 B 点，由上式给出

$$\left[\frac{\partial^2 S}{\mathrm{d}V^2} - 2\frac{\partial^2 S}{\partial V\partial p}\frac{\partial S}{\partial V}\Big/\frac{\partial S}{\partial p} + \frac{\partial^2 S}{\partial p^2}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\Big/\frac{\partial S}{\partial p}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial p}\cdot\frac{\mathrm{d}^2 p_H}{\mathrm{d}V^2}\right]_B = 0 \tag{7.63.16}$$

把式(7.63.12)与(7.63.15)对比、式(7.63.13)与(7.63.16)对比，则给出：

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}p_H}{\mathrm{d}V}\right|_B &= \left.\frac{\mathrm{d}p_I}{\mathrm{d}V}\right|_B\\ \left.\frac{\mathrm{d}^2 p_H}{\mathrm{d}V}\right|_B &= \left.\frac{\mathrm{d}^2 p_I}{\mathrm{d}V^2}\right|_B\end{aligned}\right\} \tag{7.63.17}$$

从而说明，**雨贡纽曲线与等熵线即使在一般的情况下在初始点亦是二级密接的**。

7.7.5 冲击波阵面之后的物理量用之前的物理量表示的关系式

在这里只考虑对于多方气体。根据式(7.51)和(7.63)，则有：

$$\left.\begin{aligned}&[\rho U] = 0\\ &\rho U[v] = [p]\hat{\boldsymbol{n}}\\ &\frac{\rho_-}{\rho_+} = \frac{(k+1)p_- + (k-1)p_+}{(k+1)p_+ + (k-1)p_-}\end{aligned}\right\} \tag{7.64}$$

为了将这组关系式化成显式形式，我们先求出 p_-的显式表达式。由(7.54)的第二式以及$[v_n]=-[U]$的关系，可求得

$$p_- - p_+ = -\rho_+ U_+ (U_- - U_+) \tag{7.65}$$

而由(7.64)的第一式，可推出：

$$\frac{\rho_-}{\rho_+} = \frac{U_+}{U_-} \tag{7.66}$$

从(7.65)、(7.66)式以及(7.64)的第三式消去U_-和ρ_-之后，求得

$$p_- = p_+ + \frac{2}{k+1}\rho_+(U_+^2 - a_+^2) \tag{7.67}$$

其中

$$a_+^2 = \frac{kp_+}{\rho_+}$$

同理可求得

$$\rho_- = \frac{\rho_+}{\frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1}\frac{a_+^2}{U_+^2}}$$

将(7.67)式代进(7.54)的第二式，可求得$\boldsymbol{v}$。总之有：

$$\left.\begin{aligned} \rho_- &= \frac{\rho_+}{\frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{k+1}\frac{a_+^2}{U_+^2}} \\ p_- &= p_+ + \frac{2}{k+1}\rho_+(U_+^2 - a_+^2) \\ \boldsymbol{v}_- &= \boldsymbol{v}_+ + \frac{2}{k+1}\frac{\hat{\boldsymbol{n}}}{U_+}(U_+^2 - a_+^2) \end{aligned}\right\} \tag{7.68}$$

如上的那组关系式就是对于多方气体冲击波阵面上物理量的显式表达。

由于$p=\rho RT$，所以可求得冲击波阵面上的温度T_-

$$\begin{aligned} \frac{T_-}{T_+} &= \frac{\rho_+ p_-}{\rho_- p_+} = \frac{(k+1)p_+ + (k-1)p_-}{(k+1)p_- + (k-1)p_+} \cdot \frac{p_-}{p_+} \\ &= \frac{\rho_+}{\rho_-} \cdot \frac{(k+1)\rho_- - (k-1)\rho_+}{(k+1)\rho_+ - (k-1)\rho_-} \end{aligned} \tag{7.69}$$

7.8 穿过冲击波阵面物理量的变化

7.8.1 气体穿过冲击波阵面熵增加

由于激波层内粘性的作用，气体通过冲击波阵面熵要增加，即造成机械能损耗。如飞行器作超音速飞行时，在飞行器的前面或近旁就会出现冲击波，由于冲击波损耗机械能，就需要飞行器做功来补偿，这就表现为阻力，这种阻力称作冲击波阻力。

按照热力学第二定律，对于任何热力学过程，熵S只能出现：

$$[S] \geqslant 0$$

而穿过冲击波只能出现：

$$[S] > 0, \text{而不会} [S] = 0$$

如下只对多方气体证明这一论点，尽管这个结论对于非多方气体亦成立。

现在设多方气体穿过冲击波作绝热流动，据(7.9)式则有：

$$S = C_v\left(\ln\frac{p}{\rho^k} - \ln\frac{p_0}{\rho_0^k}\right) + S_0 \tag{7.70}$$

而据(7.16)式

$$\frac{p}{\rho^k}=A=A(S) \tag{7.71}$$

同时假定在(7.70)式中 k、C_v、p_0、S_0、ρ_0 这几个量在激波两边都是同样的值。于是由如上两式则得到：

$$[S]=S_- - S_+ = C_v \ln\frac{A_-}{A_+}=C_v\ln\left(1+\frac{[A]}{A_+}\right) \tag{7.72}$$

根据上式，要证$[S]>0$则等价证明：

$$\frac{[A]}{A_+}>0$$

据(7.71)式则有

$$\frac{[A]}{A_+}=\frac{p_-}{p_+}\cdot\frac{\rho_+^k}{\rho_-^k}-1 \tag{7.73}$$

为方便计，令：

$$\xi=\frac{\rho_-}{\rho_+} \tag{7.74}$$

于是(7.63.1)式可写成

$$\frac{p_-}{p_+}=\frac{(k+1)\xi-(k-1)}{(k+1)-(k-1)\xi} \tag{7.75}$$

由于 $p_-/p_+>0$，所以由上式推出

$$\frac{k-1}{k+1}<\xi<\frac{k+1}{k-1} \tag{7.76}$$

因对任何气体，总有 $k>1$，故

$$\frac{k+1}{k-1}>\xi>\frac{k-1}{k+1}>0$$

即有：

$$\xi>0 \tag{7.77}$$

将(7.74)、(7.75)式代进(7.73)式中给出

$$\frac{[A]}{A_+}=\frac{F(\xi)}{(k+1)\xi^k-(k-1)\xi^{k+1}}=\frac{F(\xi)}{\xi^k\{(k+1)-(k-1)\xi\}} \tag{7.78.1}$$

其中：

$$F(\xi)=(k-1)\xi^{k+1}-(k+1)\xi^k+(k+1)\xi-(k-1) \tag{7.78.2}$$

由(7.76)式可以判定(7.78.1)式的分母大于零，因此$[A]/A_+$的正负问题只取决于 $F(\xi)$。为此，我们对 $F(\xi)$求微商，由上式给出

$$\begin{cases}F'(\xi)=(k^2-1)\xi^k-(k+1)k\xi^{k-1}+(k+1)\\ F''(\xi)=k(k^2-1)\xi^{k-1}-k(k^2-1)\xi^{k-2}\\ F'''(\xi)=k(k-1)(k^2-1)\xi^{k-2}-k(k^2-1)(k-2)\xi^{k-3}\end{cases}$$

由上式得知，当 $\xi=1$ 时：

$$\left.\begin{aligned} F(1) &= 0 \\ F'(1) &= 0 \\ F''(1) &= 0 \\ F'''(1) &= k(k^2-1) > 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.78.3}$$

且只有在 $\xi=1$ 时，才有 $F''(\xi)=0$。$\xi=1$ 是曲线 $F(\xi)$ 的拐点(inflection point)。$F=F(\xi)$ 的图像表示在图 7.12 中。

显然，

$$\begin{cases} \text{在 } \xi < 1 \text{ 时}, F(\xi) < 0 \\ \text{在 } \xi > 1 \text{ 时}, F(\xi) > 0 \end{cases}$$

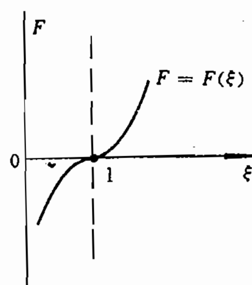


图 7.12　曲线 $F(\xi)$

按热力学第二定律 $[S]\geqslant 0$，而由(7.72)式得知 $[S]\geqslant 0$ 则等价于 $[A]/A_+\geqslant 0$；$[A]/A_+\geqslant 0$ 则对应于 $F(\xi)\geqslant 0$；$F(\xi)\geqslant 0$ 则对应于 $\xi\geqslant 1$ 的条件。

当 $\xi=1$ 时，$\rho_-=\rho_+$，即 $[\rho]=0$，于是从(7.61.1)式推出：

$$[U]=0、[v_n]=0、[p]=0、[T]=0$$

这显然与激波为强间断面的事实矛盾，因此 ξ 只能大于 1，即

$$\xi > 1$$

$\xi>1$ 对应着 $F(\xi)>0$；$F(\xi)>0$ 对于着 $[S]>0$。所以**穿过激波熵增加**，这一结论对于非多方气体亦适用。

7.8.2　穿过激波阵面 $[\rho]>0$、$[p]>0$、$[T]>0$ 及 $[v_n]>0$*

根据如上讨论得知，穿过激波则要求 $\xi>1$，由 $\xi>1$ 可推出：

$$\frac{[\rho]}{\rho_+}=\frac{\rho_-}{\rho_+}-1=\xi-1>0$$

即有：

$$[\rho]>0$$

由于 $\xi>1$，故对多方气体成立的(7.76)式，现改为

$$1<\xi<\frac{k+1}{k-1}$$

由于 $p_+<p_-$，当然有

$$[p]>0$$

对于多方气体，由(7.69)式可推出：

$$\frac{T_-}{T_+}=\frac{(k+1)-(k-1)\dfrac{1}{\xi}}{(k+1)-(k-1)\xi}$$

由于 $\xi>1$，所以上式的分子总大于分母，故 $T_-/T_+>1$，从而推出：

$$[T]>0$$

由 $\rho_+U_+=\rho_-U_-$ 推出：

$$\frac{U_+}{U_-}=\frac{\rho_-}{\rho_+}=\xi>1$$

---

* 该结论是在规定激波传播方向为正的条件下得出的。

按照法线 $\hat{n}$ 的取法($\hat{n}$ 指向激波传播方向,即指向"+"区)以及 U 的定义,则有

$$U = N - v_n > 0$$

于是根据以上两式得到

$$U_+ = N - v_n^+ > U_- = N - v_n^-$$

从而推出

$$v_n^- - v_n^+ = [v_n] > 0$$

如上的论证,尽管有些是针对多方气体而言的,然而其结论对于非多方气体亦成立。

7.8.3 在特殊条件下的某些重要性质

如下只考虑多方气体中的冲击波。

1. 关于激波相对介质的传播速度 U

据(7.68)式,则有

$$[p] = \frac{2}{k+1}\rho_+ (U_+^2 - a_+^2)$$

因为$[p]>0$,故有

$$U_+^2 > a_+^2 \quad 或 \quad U_+ > a_+ \tag{7.79.1}$$

这说明激波相对于它前面的流动气体而言传播是超音速的。

按照求(7.68)式的同样办法,可求出

$$p_+ = p_- + \frac{2}{k+1}\rho_- (U_-^2 - a_-^2)$$

从而有:

$$[p] = -\frac{2}{k+1}\rho_- (U_-^2 - a_-^2)$$

由上式推出:

$$U_-^2 < a_-^2 \quad 或 \quad U_- < a_- \tag{7.79.2}$$

这说明激波相对它后面的流动气体而言,传播是亚音速的。

有一种非常重要的特殊情况——多方气体的定常流动问题,在定常的问题中,根据(4.130)式,激波的移动速度 $N\equiv 0$,于是由(7.79.1)式和(7.79.2)式给出:

$$\left.\begin{aligned} U_+^2 = (v_n^+)^2 > a_+^2,即\ |v_n^+| > a_+ \\ U_-^2 = (v_n^-)^2 < a_-^2,即\ |v_n^-| < a_- \end{aligned}\right\} \tag{7.80}$$

这说明在冲击波之前的气体,流动一定为超音速的,或者说,在定常问题中,只有超音速气体来流才可能出现冲击波。然而得不出冲击波之后的流动为亚音速的结论,除非流动是一维的,因切向速度 v_τ^- 的大小未定。

2. 关于强弱激波

由(5.68)式看出跃值(jump value)$[p]$、$[\rho]$、$[v]$与$(U_+^2 - a_+^2)$的大小成比例,换句话说,这些量的增减方向是一致的。因此,可以把这些量中任一个的相对跳跃值,如:

$$\frac{[p]}{p_+}、\frac{[\rho]}{\rho_+}、\frac{a_+^2}{U_+^2}、\frac{[v_n]}{v_+}、\frac{[A]}{A_+}$$

作为激波强度的标志。

①强激波

所谓强激波，即指$U_+^2 \gg a_+^2$的情形。这时，是凡相当于a_+/U_+的量均可忽略不计。于是由(7.68)的第一式得到：

$$\frac{\rho_-}{\rho_+} \approx \frac{k+1}{k-1}$$

由此可知，对于强激波，密度ρ_-的上限只能为$\rho_+(k+1)/(k-1)$。对于空气$k=1.4$，则其最大的密度ρ_-只能为$6\rho_+$，不管激波如何强都不会超过这个值，而只能接近该值。

将(7.68)的第二式改写：

$$\begin{aligned} p_- &= p_+ + \frac{2}{k+1}\rho_+ (U_+^2 - a_+^2) \\ &= \frac{2}{k+1}\rho_+ \left(U_+^2 - a_+^2 + \frac{k+1}{2}\frac{p_+}{\rho_+}\right) \\ &= \frac{2}{k+1}\rho_+ \left(U_+^2 - \frac{k-1}{2k}a_+^2\right) \end{aligned}$$

在上式中略去小量，则有

$$p_- \approx \frac{2}{k+1}\rho_+ U_+^2$$

p_-与密度情况不同，它没有上界，只要激波速度N无限增大，p_-就可无限增高。因此对于诸强激波之间比较，用$[p]/p_+$作为强度来标志更合适。

由(7.68)的第三式可得到

$$\boldsymbol{v}_- \approx \boldsymbol{v}_+ + \frac{2}{k+1}U_+ \hat{\boldsymbol{n}}$$

总之，对于强激波有如下一组近似关系式

$$\left.\begin{aligned} \rho_- &\approx \frac{k+1}{k-1}\rho_+ \\ p_- &\approx \frac{2}{k+1}\rho_+ U_+^2 \\ \boldsymbol{v}_- &\approx \boldsymbol{v}_+ + \frac{2}{k+1}U_+ \hat{\boldsymbol{n}} \end{aligned}\right\} \tag{7.81}$$

如果冲击波阵面之前的气体静止，即$v_+=0$，则上式写成：

$$\left.\begin{aligned} \rho_- &\approx \frac{k+1}{k-1}\rho_+ \\ p_- &\approx \frac{2}{k+1}\rho_+ N^2 \\ \boldsymbol{v}_- &\approx \frac{2}{k+1}N\hat{\boldsymbol{n}} \end{aligned}\right\} \tag{7.82}$$

②弱激波

弱激波是$[p]/p_+$、$[\rho]/\rho_+$、$[v_n]/v_n^+$(设$v_n^+\neq 0$)等很小，即指$[p]/p_+ \ll 1$、$|[v_n]/v_n^+| \ll 1$等。

在弱激波的情况下，$[p]/p_+$、$[\rho]/\rho_+$、$[v_n]/v_n^+$同是一阶小量，但是$[S]$则是$[\rho]/\rho_+$的三阶小量。

据(7.58)式和多方气体的状态方程：

$$e=\frac{1}{k-1}\frac{p}{\rho}$$

则有：

$$\left.\begin{aligned}&v_n^- - v_n^+ = \sqrt{(p_- - p_+)(V_+ - V_-)}\\&p_- - p_+ = \rho_+(v_n^- - v_n^+)(N - n_n^+)\\&\frac{1}{k-1}(p_- V_- - p_+ V_+) = \frac{1}{2}(p_- + p_+)(V_+ - V_-)\end{aligned}\right\}\tag{7.83}$$

令：$[v_n]/v_n^+ = \varepsilon$，即有 $v_n^- - v_n^+ = \varepsilon v_n^+$

将(7.83)的第一式代进第三式中，经整理给出

$$[p]=\frac{1}{4}\{(k+1)\rho_+(v_n^+)^2\varepsilon^2 \pm 4\rho_+ a_+ v_n^+\varepsilon\sqrt{1+b\varepsilon^2}\}$$

其中

$$b=\frac{(k+1)^2\rho_+(v_n^+)^2}{16kp_+}$$

将上式展成 ε 的级数

$$[p]=\frac{k+1}{4}\rho_+(v_n^+)^2\varepsilon^2 \pm \rho_+ a_+ v_n^+\varepsilon + O(\varepsilon^3)$$

由于$[p]>0$，故在上式中取正号，于是：

$$\begin{aligned}[p] &= \rho_+ a_+ v_n^+\varepsilon + \frac{k+1}{4}\rho_+(v_n^+)^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)\\&= \rho_+ a_+ v_n^+\varepsilon + O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

由上式看出$[p]/p_+$与$[v_n]/v_n^+$ 是同阶的量。在上式中略去 $O(\varepsilon^2)$后，则有：

$$[p]=p_- - p_+ = \rho_+ a_+(v_n^- - v_n^+)$$

显然，同理可求：

$$[\rho]=\frac{\rho+v_n^+}{a_+}\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

从该式看出$[\rho]/\rho_+$与$[v_n]/v_n^+$ 同量级。在略去 $O(\varepsilon^2)$之后，有：

$$[\rho]=\rho_- - \rho_+ = \frac{\rho_+(v_n^- - v_n^+)}{a_+}$$

利用如上结果，还可从(7.83)的第二式求得 N 的近似表达式。总之，对于弱激波贝有：

$$\left.\begin{aligned}&[p]=p_- - p_+ = \rho_+ a_+(v_n^- - v_n^+)\\&[\rho]=\rho_- - \rho_+ = \frac{\rho_+(v_n^- - v_n^+)}{a_+}\\&N=\frac{(v_n^+ + a_+) + (v_n^- + a_-)}{2}\end{aligned}\right\}\tag{7.84}$$

如上的结果就是弱激波的声学近似(acoustical approximation of weak shock wave)。

上面证明了$[p]/p_+$、$[\rho]/\rho_+$、$[v_n]/v_n^+$ 为同一阶量，现在证明熵增$[S]$是它们的三阝

小量。

将(7.74)式所定义的 ξ 改写成：

$$\xi = 1 + \varepsilon.$$

式中：
$$\varepsilon_* = \frac{[\rho]}{\rho_+} \ll 1 \qquad (为弱激波)$$

再将(7.78.2)式中所定义 $F(\xi)$ 在 $\xi=1$ 处展开：

$$F(\xi) = F(1+\varepsilon_*) = F(1) + F'(1)\varepsilon_* + \frac{F''(1)}{2!}\varepsilon_*^2 + \frac{F'''(1)}{3!}\varepsilon_*^3 + \cdots$$

根据(7.78.3)式，则有：

$$F(1) = F'(1) = F''(1) = 0, \quad F'''(1) = k(k^2-1)$$

于是推出：

$$F(\xi) = \frac{k(k^2-1)}{6}\varepsilon_*^3 + \cdots \tag{7.85.1}$$

再将 $\xi^{-k} = (1+\varepsilon_*)^{-k}$ 展开：

$$\xi^{-k} = 1 - k\varepsilon_* + \frac{k(k+1)}{2}\varepsilon_*^2 - \frac{k(k+1)(k+2)}{6}\varepsilon_*^3 + \cdots \tag{7.85.2}$$

将(7.85.1)和(7.85.2)式代进(7.78.1)式中，经整理并保留到最低一阶项，则有：

$$\begin{aligned}
[A]/A_+ &= \frac{k(k^2-1)}{6}\varepsilon_*^3 \cdot \frac{1}{(k+1)-(k-1)\xi} \\
&= \frac{k(k^2-1)}{6}\varepsilon_*^3 \cdot \frac{1}{2-(k-1)\varepsilon_*} \\
&= \frac{k(k^2-1)}{6}\varepsilon_*^3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{k-1}{4}\varepsilon_* + \cdots\right) \\
&\approx \frac{k(k^2-1)}{12}\varepsilon_*^3 = \frac{k(k^2-1)}{12}\left(\frac{[\rho]}{\rho_+}\right)^3
\end{aligned}$$

将如上结果代进(7.72)式中展开并保留一阶项：

$$[S] \approx C_v \ln\left\{1 + \frac{k(k^2-1)}{12}\left(\frac{[\rho]}{\rho_+}\right)^3\right\} \approx \frac{k(k^2-1)}{12}C_v\left(\frac{[\rho]}{\rho_+}\right)^3 \tag{7.86}$$

这就是说，如果把 $[\rho]/\rho_+$ 视作一阶小量，则 $[S]$ 就是三阶小量。这一点极为重要，在近似处理中，如若精度要求准确到二阶，那么就可忽略弱激波所产生的熵增。

7.9 激波极线

现在我们研究多方气体在二维平面流动中，关于驻定斜激波(stationary oblique shock wave)上物理量的一种极重要的图解法——冲击波极线法(method of shack polars)。

7.9.1 冲击波极线的导出(derivation of shock polors)

在 (x, y) 平面上，取激波前面来流速 $\boldsymbol{v}_+$ 的方向为 x 轴的方向，令激波阵面在 O 点与 x 轴的夹角为 φ，如图 7.13 所示。现在只考虑该点的情况。

在 O 点，激波阵面的法向单位矢量设为 $\hat{\boldsymbol{n}}$、切向单位矢量设为 $\hat{\tau}$，$\hat{\boldsymbol{n}}$、$\hat{\tau}$、$\boldsymbol{v}_+$ 在图示的坐标系中表示为：

$$\left.\begin{aligned}\hat{\tau} &= \cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}\\ \hat{n} &= -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j}\\ \boldsymbol{v}_+ &= v_+\,\hat{i}\end{aligned}\right\} \tag{7.87}$$

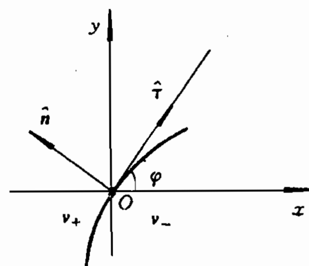


图 7.13　斜激波

其中，$\hat{i}$ 和 $\hat{j}$ 为 x 轴向与 y 轴向的单位矢量。

根据上式可以推出：

$$\left.\begin{aligned}v_\tau^+ &= \boldsymbol{v}_+ \cdot \hat{\tau} = v_+ \cos\varphi\\ v_n^+ &= \boldsymbol{v}_+ \cdot \hat{n} = -v_+ \sin\varphi\end{aligned}\right\} \tag{7.88}$$

因所研究的激波是定常的，则

$$N \equiv 0 \tag{7.89}$$

于是(7.68)的第三式可以写成：

$$\boldsymbol{v}_- = \boldsymbol{v}_+ + \frac{2}{k+1}\frac{\hat{n}}{v_+\sin\varphi}(v_+^2\sin^2\varphi - a_+^2) \tag{7.90}$$

而 $\boldsymbol{v}_-$ 在 (x,y) 平面表成：

$$\boldsymbol{v}_- = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

将上式与(7.90)式比较，就得到：

$$\left.\begin{aligned}v_x &= v_+ - \frac{2}{k+1}\frac{1}{v_+}(v_+^2\sin^2\varphi - a_+^2)\\ v_y &= \frac{2}{k+1}\frac{\cot\varphi}{v_+}(v_+^2\sin^2\varphi - a_+^2)\end{aligned}\right\} \tag{7.91}$$

将如上两式联立消去 φ，则得到：

$$v_y^2 = (v_+ - v_x)^2 \cdot \frac{1 - \dfrac{a_+^2}{v_+^2} - \dfrac{k+1}{2}\left(1 - \dfrac{v_x}{v_+}\right)}{\dfrac{a_+^2}{v_+^2} + \dfrac{k+1}{2}\left(1 - \dfrac{v_x}{v_+}\right)} \tag{7.92}$$

在激波之前的物理量 v_+ 和 a_+ 已知的情况下，式(7.92)在速度平面 (v_x, v_y) 上给出一条曲线，这条曲线就称作**冲击波极线**，见图 7.14。

冲击波极线又称激波极线，亦称作笛卡尔叶形线(Descartes' folium)。

为了方便起见，引进无量纲速度，令：

$$\left.\begin{aligned}\lambda_x &= \frac{v_x}{a_*}\\ \lambda_y &= \frac{v_y}{a_*}\end{aligned}\right\} \tag{7.93}$$

其中 a_* 为伯努利方程所定义的

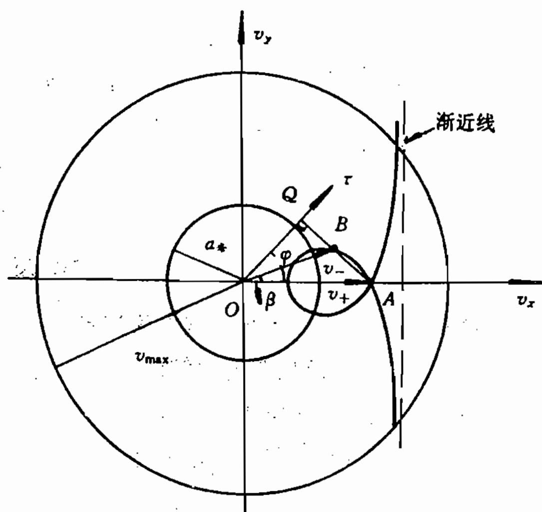


图 7.14　在 (v_x, v_y) 平面上的冲击波极线

临界速度，见(7.23)式。它既是激波阵面之前气流流动的临界速度，也是激波阵面之后气体流动的临界速度，这是根据在定常的情况下的激波关系式得出的结论。由于定常，(7.60.2)的第三式化成：

$$\left[\frac{v_n^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}\right]=0$$

即有：

$$\frac{(v_n^+)^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p_+}{\rho_+}=\frac{(v_n^-)^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p_-}{\rho_-}$$

再利用如下条件：

$$U\neq 0 \quad 时，\quad [v_\tau]\equiv 0$$

于是得到：

$$\frac{v_+^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p_+}{\rho_+}=\frac{v_-^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p_-}{\rho_-}=\frac{k+1}{2(k-1)}a_*^2=\frac{v_{max}^2}{2} \tag{7.94}$$

由上式看出，不但 a_* 而且最大速度 v_{max} 在激波阵面的两边都相同。

根据式(7.93)的定义并利用式(7.94)，则式(7.92)可化成：

$$\lambda_y^2=(\lambda_+-\lambda_x)^2\frac{\lambda_x-\dfrac{1}{\lambda_+}}{\dfrac{1}{\lambda_+}+\dfrac{2}{k+1}\lambda_+-\lambda_x} \tag{7.95}$$

式中：

$$\lambda_+=\frac{v_+}{a_*}$$

式(7.95)为(λ_x,λ_y)平面上激波极线方程，它的作图表示在图 7.15 中。

如下对(λ_x,λ_y)平面上的激波极线的性质予以讨论。

1. 激波极线是以 λ_x 轴为对称的三次代数曲线(third degree algebraical curve)，它与 λ_x 轴交于两点，坐标取值分别为：

$\lambda_x=\dfrac{1}{\lambda_+}$ 和 $\lambda_x=\lambda_+$（它为二重点 double point)。激波极线的渐近线(asymptote)为

$$\lambda_x=\frac{1}{\lambda_+}+\frac{2}{k+1}\lambda_+$$

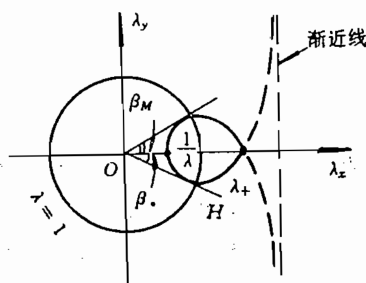


图 7.15 在$(\lambda_x、\lambda_y)$平面上的冲击波极线

由于在这种定常激波中波后的速度值 v_- 小于波前的速度值 v_+，因此只有在$(1/\lambda_+,\lambda_+)$区间的极线部分才具有实际意义(即图 7.15 所绘的实线部分)，也就是：

$$\frac{1}{\lambda_+}<\lambda_x<\lambda_+$$

2. 由于

$$a_*<v_+<v_{max}=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}a_*$$

因此

$$1 < \lambda_+ < \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

当 $\lambda_+ \to 1$ 时，极线的封闭部分缩为一个点。随 λ_+ 的增加，极线的封闭部分也逐渐扩大，当 $\lambda_+ \to \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ 时，则：

$$\left(\frac{1}{\lambda_+} + \frac{2}{k+1}\lambda_+\right) \to \lambda_+$$

于是式(7.95)变为一个圆方程：

$$\lambda_y^2 = (\lambda_+ - \lambda_x)\left(\lambda_x - \frac{1}{\lambda_+}\right)$$

图 7.15 中，其极线圈在单位圆之内的那部分曲线段对应着激波之后为亚音速流动的情形；而在圆 $\lambda=1$ 之外的那部分对应着激波之后流动为超音速情况。

3. 若用 β_M 表示从原点 O 所作的极线之切线的夹角，见图 7.15 可以证明，β_M 是 λ_+ 的单调递增函数，而且：

$$\begin{cases} \text{当 } \lambda_+ = 1 \text{ 时，} \quad \beta_M = 0 \\ \text{当 } \lambda_+ \to \sqrt{\dfrac{k+1}{k-1}} \text{ 时，} \beta_M = \sin^{-1}\dfrac{1}{k} \end{cases}$$

设 H 为极线与单位圆 $\lambda=1$ 的两个对称交点中的一个，连接 O 点与 H 点的 $\overline{OH}$ 与 λ_x 轴的夹角用 β_* 表示。可以证明，当 λ_+ 在如下取值范围时，即对于

$$1 < \lambda_+ < \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

则有：

$$0 < \beta_M - \beta_* < 1°$$

故一般可以忽略 β_M 与 β_* 之间的差别。

7.9.2 激波极线的应用

1. 给定激波方向，即波阵面的倾角 φ 已知，求激波阵面之后的速度分量

在激波阵面之前的速度 v_+、a_+ 已知的情况下，可利用(7.92)或(7.95)式绘出激波极线(如图 7.14 或图 7.15)，波阵面之后的速度一定落在这条曲线上。具体做法是，过图 7.14 的 O 点作一条与 v_x 轴成 φ 角的射线 $\overline{OQ}$，再过 A 点作 $\overline{OQ}$ 的垂线 $\overline{AQ}$，$\overline{AQ}$ 与极线的交点 B 便是所要求的激波阵面之后的速度状态点(v_x、v_y)，即：

$$\overrightarrow{OQ} = v_-$$

之所以如此，是因为：$\boldsymbol{v}=(v_x、v_y)$ 除了满足方程(7.92)外，它还满足：

$$\boldsymbol{v}_- \cdot \hat{\tau} = \boldsymbol{v}_+ \cdot \hat{\tau}$$

这从图 7.14 所示的几何关系可以推出，在 ΔAQO 和 ΔBQO 中：

$$\boldsymbol{v}_+ = \overrightarrow{OA}, \quad \boldsymbol{v}_+ \cdot \hat{\tau} = \overline{OA}\cos\varphi = \overline{OQ}$$

$$\boldsymbol{v}_- = \overrightarrow{OB}, \quad \boldsymbol{v}_- \cdot \hat{\tau} = \overline{OB}\cos(\varphi - \beta) = \overline{OQ}$$

所以

$$[v_\tau] = 0$$

2. 给定激波阵面之后的速度大小，即值 v_- 已知，求速度 $\boldsymbol{v}_-$ 的方向角 β 和激波方向的倾角 φ

利用作图方法，先在 (v_x, v_y) 平面上作出激波极线图，见图 7.16，然后以 O 为圆心、以 v_- 长为半径画圆，该圆与极线交于 B 和 B' 点。连接 O 点与 B 点（当然亦可连接 B' 点，至于取哪个点要据实际情况而定），则 $\overline{OB}$ 与 v_x 轴夹角 β 便是 $\boldsymbol{v}_-$ 的方向角；再过 A、B 两点作直线 $\overline{AB}$，然后过 O 点作 $\overline{AB}$ 的垂线 $\overline{OQ}$，则 $\overline{OQ}$ 与 v_x 轴的夹角 φ 便是激波的方向角，$\overline{OQ}$ 即激波阵面在 O 点的切线。

3. 给定激波阵面后的速度方向角 β，求激波后的速度大小和激波的方向角 φ

由 O 点作一条与 v_x 轴成 β 角的射线，参见图 7.16，射线与极线相交于 B 点，则 $\overline{OB}$ 之长便是 v_- 的大小。连接 A、B 两点的直线，过 O 点作该直线的垂线 $\overline{OQ}$，$\overline{OQ}$ 与 v_x 轴的夹角 φ 便是激波的方向角，$\overline{OQ}$ 即激波的方向。（当然按这种办法求解，并不唯一，因从 O 点所作射线 OB 与极线可能有两个交点，即存在两个解，这是按作图法无法选定的）。

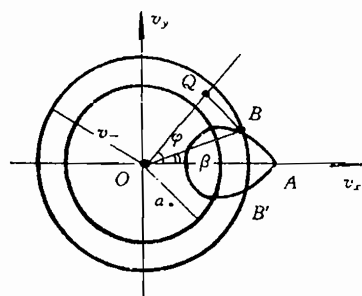


图 7.16 利用冲击波极线图解

现举一个用激波极线图解实际问题的例子：有一个以常速 N 传入静气体中的平面激波，它斜入射到一个平直的刚壁上，与刚壁成 φ_1 角，见图 7.17(a)。该波在刚壁上反射，求入射波的反射波之后的速度，并求反射激波的倾角 φ_2.

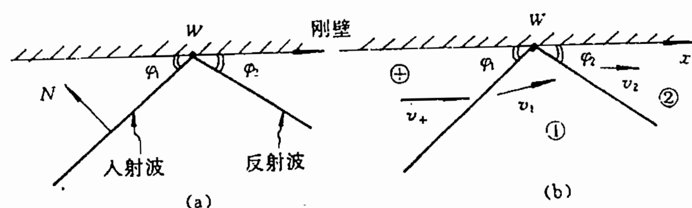


图 7.17 斜激波在刚壁上的入射和反射

这是一个不定常问题，激波在刚壁上的入射点 W 沿刚壁移动。为了使问题可用激波极线图解，须将其化成定常问题。

现取一个随 W 点运动的坐标系，其 x 轴沿刚壁，见图 7.17(b)。在此坐标系下问题化成定常的，入射波之前的气体由静止变成“运动”，它相对动坐标系的速度 $\boldsymbol{v}_+$ 为

$$\boldsymbol{v}_+ = \frac{N}{\sin\varphi_1}\hat{\boldsymbol{i}}$$

于是可利用激波极线来图解它，具体做图见图 7.18。过 O 点作射线 $\overline{OQ}$，它与 v_x 轴成 φ_1 角，过 A 点作 $\overline{OQ}$ 的垂线交极线 g_1 于 B，则 $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{v}_1$ 即给出了入射波后的速度大小与方向。再以 $\boldsymbol{v}_1$ 的方向和大小作极线 g_2，由 g_2 与 v_x 轴的交点 D 和 E 便可确定反射波后的速度值 $\boldsymbol{v}_2$，反射波后 $\boldsymbol{v}_2$ 有两个可能值：

$$\begin{cases} \text{弱解}: v_2 = \overline{OD}, \text{这时 } OM \text{ 与 } v_x \text{ 轴的夹角 } \varphi_2 \text{ 即反射激波与刚壁的夹角} \\ \text{强解}: v_2' = \overline{OE}, \text{这时} \overline{ON} \text{ 与 } v_x \text{ 轴的夹角即反射激波与刚壁的夹角} \end{cases}$$

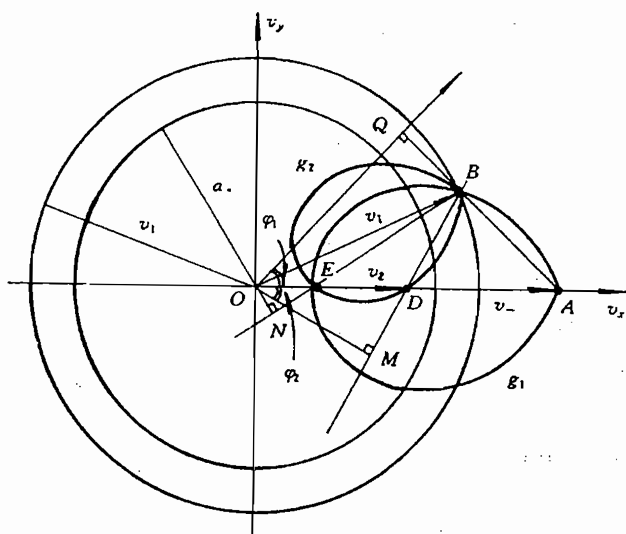


图 7.18 图解在刚壁上的反射激波

7.9.3 另一种形式的激波极线

如上给出的是在速度平面上的激波极线，还有一种非常重要的激波极线形式——在(β,p)平面上的激波极线。其中 β 为气流穿过激波阵面的转角，见图 7.19(a)所示；p 为激波之后的压力 $p=p_-$. 按照图示：

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_+ = v_+ \hat{\boldsymbol{i}} \\ \boldsymbol{v}_- = v_x \hat{\boldsymbol{i}} + v_y \hat{\boldsymbol{j}} \end{cases}$$

则

$$\frac{v_y}{v_x} = \tan\beta \tag{7.96.1}$$

而

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{n}} = -\sin\varphi \hat{\boldsymbol{i}} + \cos\varphi \hat{\boldsymbol{j}} \\ \hat{\boldsymbol{\tau}} = \cos\varphi \hat{\boldsymbol{i}} + \sin\varphi \hat{\boldsymbol{j}} \end{cases}$$

$$v_\tau^+ = \boldsymbol{v}_+ \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} \equiv v_\tau^- = \boldsymbol{v}_- \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}$$

于是给出

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot \cos(\varphi - \beta) = v_+ \cos\varphi \tag{7.96.2}$$

由于流动定常，则

$$N = 0, \quad U_+ = -v_n^+ = v_+ \sin\varphi$$

再据(7.68)式的第二和第三式，则推出

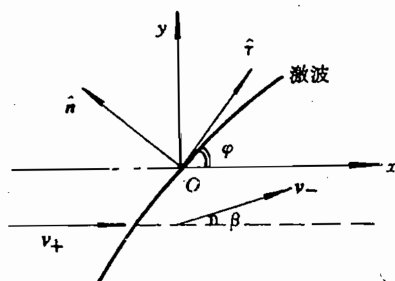
$$
\left.\begin{aligned}
v_x &= v_+ - \frac{p - p_+}{\rho_+ v_+} \\
v_y &= \frac{p - p_+}{\rho_+ v_+}\cot\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{7.96.3}
$$

由(7.96.1)、(7.96.2)和(7.96.3)式，消去 v_x、v_y 和 φ，则给

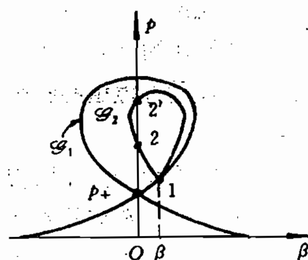
$$
\tan\beta = \frac{\dfrac{p}{p_+} - 1}{kM_+ - \dfrac{p}{p_+} + 1}\sqrt{\frac{(1+\mu^2)(M_+^2 - 1) - \left(\dfrac{p}{p_+} - 1\right)}{\dfrac{p}{p_+} + \mu^2}} \tag{7.96.4}
$$

其中
$$
M_+ = \frac{v_+}{a_+}, \quad \mu^2 = \frac{k+1}{k-1}
$$

式(7.96.4)便是(β,p)平面上的激波极线，如图 7.19(b)所示。该图正是图 7.17 所示的物理问题的图解，图 7.19(b)的点 1 对应于图 7.17 之①区中的 p 和 β；点 2 对应于②区的压力 p_2(弱解)，点 2′对于②区处的压力 p_2'(强解)。图 7.19(b)和图 7.18 都是对于同一个问题的图解。



(a) 入射激波的方向及其前后的流向



(b) 在(β,p)平面上的激波极线

图 7.19

最后简谈一下正规反射和非正规反射(regular reflection and non-regular reflection)。

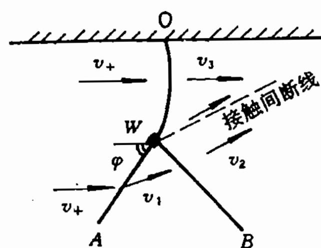


图 7.20 马赫反射

图 7.17 所示的情况为正规反射，入射波和反射波的相会点在刚壁上。但是当激波入射角 φ 达到一定程度，则入射波和反射波就不能在壁上相会，也就是说按激波相容关系式求不出满足图 7.17 所示那样沿壁流动的解，或者说按图 7.18 那个办法图解是找不到交点 D 和 E 的。在这种情况下，就会出现图 7.20 所示的那种情形，反射点 W 移离刚壁，在这个反射点 W 和固壁之间又出现一条激波曲线$\overset{\frown}{WO}$，$\overset{\frown}{WO}$称作**马赫激波**或**马赫杆**(Mach shock wave or Mach bar)，这种反射称作**非正规反射**或称**三激波反射**或**马赫反射**(Mach reflection)。关于冲击波的马赫反射可参看§11.10

7.10 多方气体的一维不定常流动

如果气体的流动只依赖时间 t 和一个空间变量 x，则该流动称作一维不定常流动。作为一维流动模型，我们通常考虑沿 x 轴向伸展的长管中的气体流动，如图 7.21 所示。

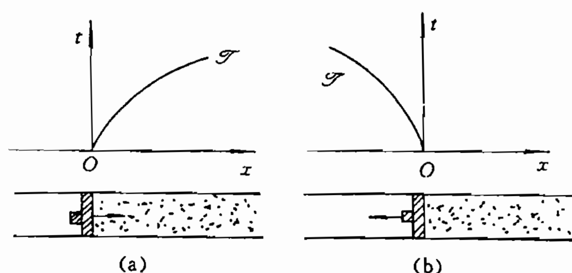


图 7.21 活塞向充满气体的管中推进、拉出

假若气体初始处于均匀静止状态，活塞(piston)从 $t=0$ 时开始连续加速运动，$\mathscr{T}$ 表示活塞的运动轨迹。由于活塞连续运动，使之管内气体亦发生连续流动。图 7.21(a)所示的情况是气体被压缩；图 7.21(b)所示的情况是气体被稀疏。

7.10.1 运动方程组的特征线解法(solution of motion equations on the basis of characteristics)

气体的一维流动是气体动力学中较为简单的，然而又是非常重要的流动，尤其是在研究爆炸产物的流动以及对外界作用时具有重要的意义。

现在考虑多方气体作一维不定常流动，故在笛卡尔坐标系中，满足：

$$v_x = v = v(x,t),$$

$$p = p(x,t),$$

$$\rho = \rho(x,t)$$

$$v_y = v_z = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

于是方程组(7.15)化成：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0\\
&\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{p}{\rho^k}\right) + v\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{p}{\rho^k}\right) = 0\\
\text{或写成}\\
\dfrac{\partial p}{\partial t} + v\dfrac{\partial p}{\partial x} - a^2\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + v\dfrac{\partial \rho}{\partial x}\right) = 0
\end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{7.97}$$

式中

$$a = \sqrt{\frac{kp}{\rho}}$$

上式是两个自变量的双曲型偏微分方程组(system of partial differential equations)，难以求解。但是我们可以借助特征线方法，将它化成常微分方程组(system of ordinary differential equations)，从而方便了求解。

1. 特征线的定义

关于特征线，它有许多等价定义，主要的有：

①方向导数法

对于如上的方程组而言，如果在自变量平面(x,t)上把其所有的方程进行某种线性组合后，诸未知函数的偏导数可各自构成它们沿(x,t)平面上某条曲线$\mathscr{B}$的方向导数时，则把这条曲线$\mathscr{B}$称作特征线。

②不定线法

对于如上的方程组而言，如果由沿自变量平面(x,t)上某条曲线$\mathscr{B}$所给定的那些未知函数，连同这组偏微分方程一起，则不足以确定这些函数在该曲线上的全部偏导数的话，则称这条曲线$\mathscr{B}$为特征线。

③按经典气体动力学的定义法

如上的两种定义，完全是从纯数学角度出发。然而，根据特征线相对介质以“音速a传播”的特征(这在下面将看到)，我们完全可以给出与上不同的定义。

由于在气体动力学中小扰动相对介质则是以a传播(见§7.3)，而特征线相对介质亦是以a传播(然而必须注意，小扰动即弱间断以特征线传播，但是特征线不一定为弱间断线)，于是启发人们给出下面的定义(这个定义，亦可作为定理，可以证明它与不定线法等价，见附录7.1)。

作为普遍情形的特征线，在空间看，它是个曲面，设该曲面为

$$F = F(x,y,z,t) = 0$$

该曲面相对介质的传播速度U(参见(4.131)式)为

$$U = -\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} / |\mathrm{grad}F| \tag{7.98.1}$$

新的特征线定义为：

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } U = a \text{ 时，为第一族特征线(first family of characteristics)} \\ \text{当 } U = -a \text{ 时，为第二族特征线(second family of characteristics)} \\ \text{当 } U = 0 \text{ 时，为第三族特征线(third family of characteristics)}\end{array}\right\} \tag{7.98.2}$$

2. 弱间断以特征线传播

当激波很弱时，描述强间断的(7.60.1)式变成了弱间断关系，即相当“差分变成了微分”，即表示强间断的“[]号”变成了表示微分的“d号”，即

$$\left.\begin{array}{l}[\rho U] = 0 \rightarrow \mathrm{d}(\rho U) = 0 \\ [p + \rho U^2] = 0 \rightarrow \mathrm{d}(p + \rho U^2) = 0 \\ [\frac{U^2}{2} + e + \frac{p}{\rho}] = 0 \rightarrow \mathrm{d}(\frac{U^2}{2} + e + \frac{p}{\rho}) = 0\end{array}\right\} \tag{7.98.3}$$

由上式推得

$$\left.\begin{aligned}&\rho \mathrm{d}U + U\mathrm{d}\rho = 0\\&\mathrm{d}p + U^2\mathrm{d}\rho + 2\rho U\mathrm{d}U = 0\\&U\mathrm{d}U + \mathrm{d}e + \frac{1}{\rho}\mathrm{d}p + p\mathrm{d}V = 0\end{aligned}\right\}\tag{7.98.4}$$

由上的头两式，消去 $\mathrm{d}U$ 后给出

$$U^2 = \mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho\tag{7.98.5}$$

利用(7.98.4)的第一式和上式，则由(7.98.4)的第三式给出

$$\mathrm{d}e + p\mathrm{d}V = 0$$

于是根据热力学第一定律(4.88)式，则推出熵 S 不变即

$$\mathrm{d}S = 0\tag{7.98.6}$$

这样，从(7.98.5)和(7.98.6)式，得出

$$U = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S} = a\tag{7.98.7}$$

即弱间断以特征线传播。(声波正是这种弱间断。)

3. *求解特征线和相容关系式*

①按方向导数法求特征线及相容关系式

现按方向导数法来求方程组(7.97)的特征线。将(7.97)的三个方程式分别乘以 L、M、N，然后再相加则给出：

$$\begin{aligned}(Lv + M\rho, L)\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \left(L\frac{1}{\rho} + Nv, N\right)\cdot\left(\frac{\partial p}{\partial x},\frac{\partial p}{\partial t}\right)\\ + (Mv - Na^2v, M - Na^2)\cdot\left(\frac{\partial \rho}{\partial x},\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = 0\end{aligned}\tag{7.99}$$

设上式中各函数的那些偏导数均各自构成沿曲线 $\mathscr{B}$ 的方向导数，即有

$$l\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} + m\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} + n\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s} = 0\tag{7.100}$$

其中 l、m、n 为待定量。而 s 为曲线 $\mathscr{B}$ 的参变量，即

$$\mathscr{B}:\begin{cases}x = x(s)\\t = t(s)\end{cases}\tag{7.101}$$

沿曲线 $\mathscr{B}$ 的物理量 $v=v(s)$、$p=p(s)$、$\rho=\rho(s)$ 与 $v(x,t)$、$p(x,t)$、$\rho(x,t)$的关系为

$$\begin{cases}v(x,t) = v(x(s),t(s)) = v(s)\\p(x,t) = p(x(s),t(s)) = p(s)\\\rho(x,t) = \rho(x(s),t(s)) = \rho(s)\end{cases}$$

于是 v,p,ρ 沿 $\mathscr{B}$ 线的方向导数为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} &= \left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial t}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)\\\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} &= \left(\frac{\partial p}{\partial x},\frac{\partial p}{\partial t}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)\\\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s} &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial x},\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)\end{aligned}\right\}\tag{7.102}$$

将(7.99)式同(7.100)式相比较并利用上式，则给出

$$\begin{cases} l\left(\dfrac{dx}{ds},\dfrac{dt}{ds}\right) = (Lv + M\rho, L) \\ m\left(\dfrac{dx}{ds},\dfrac{dt}{ds}\right) = \left(L\dfrac{1}{\rho} + Nv, N\right) \\ n\left(\dfrac{dx}{ds},\dfrac{dt}{ds}\right) = (Mv - Nva^2, M - Na^2) \end{cases}$$

由上式则推出

$$\frac{Lv + M\rho}{L} = \frac{L\dfrac{1}{\rho} + Nv}{N} = \frac{Mv - Na^2v}{M - Na^2} = \frac{dx}{dt} \tag{7.103.1}$$

$$\frac{l}{m} = \frac{L}{N} \quad , \quad \frac{n}{m} = \frac{M - Na^2}{N} \tag{7.103.2}$$

当:$L\neq 0$ 时，由(7.103.1)式可解出两组解

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{a}{\rho}L \\ N &= \frac{1}{a\rho}L \\ \frac{dx}{dt} &= v + a \end{aligned}\right\} \tag{7.104.1}$$

以及

$$\left.\begin{aligned} M &= -\frac{a}{\rho}L \\ N &= -\frac{1}{a\rho}L \\ \frac{dx}{dt} &= v - a \end{aligned}\right\} \tag{7.104.2}$$

在如上两式中：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v + a \text{ 称作第一族特征线，以 } C_+ \text{ 表示} \\ \dfrac{dx}{dt} = v - a \text{ 称作第二族特征线，以 } C_- \text{ 表示} \end{cases}$$

当 $L=0$ 时，由(7.103.1)式解出：

$$\left.\begin{aligned} L &= 0 \\ M &= 0 \\ \frac{dx}{dt} &= v \end{aligned}\right\} \tag{7.104.3}$$

其中

$$\frac{dx}{dt} = v \text{ 称作第三族特征线(即质点轨迹)，以 } C_0 \text{ 表示}$$

如下求沿各特征线的相容关系式。由(7.104.1)和(7.103.2)式得到

$$\begin{cases} m = \dfrac{1}{a\rho} l \\ n = 0 \end{cases}$$

将上式代进(7.100)式中则给出

$$\mathrm{d}p + \rho a \mathrm{d}v = 0 \tag{7.105}$$

上式则是沿第一族特征线上的物理量相容关系式。

由(7.104.2)和(7.103.2)式得到

$$\begin{cases} m = -\dfrac{1}{a\rho} l \\ n = 0 \end{cases}$$

将该式代进(7.100)式中则给出

$$\mathrm{d}p - \rho a \mathrm{d}v = 0 \tag{7.106}$$

上式就是沿第二族特征线上的物理量相容关系式。

由(7.104.3)和(7.103.2)式得到

$$\begin{cases} l = 0 \\ n = -a^2 m \end{cases}$$

将如上结果代进(7.100)中给出：

$$\mathrm{d}p - a^2 \mathrm{d}\rho = 0 \tag{7.107.1}$$

这就是沿第三族特征线(即沿质点的轨迹)的物理量相容关系式。

注意，(7.107.1)式亦相当于：

$$\mathrm{d}\left(\frac{p}{\rho^k}\right) = 0 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p}{\rho^k}\right) = 0 \tag{7.107.2}$$

据(7.9)式，亦相当于

$$\mathrm{d}S = 0 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{7.107.3}$$

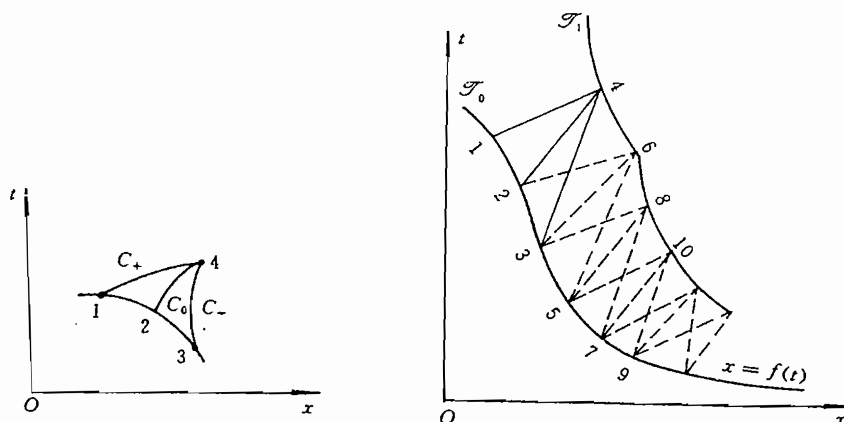
综上所述，在引进特征线之后，偏微分方程组(7.97)化成了常微分方程——特征线和沿特线上的物理量相容关系式：

$$\left.\begin{aligned} &沿\ C_+\ 线，\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v + a, \quad \mathrm{d}p + \rho a \mathrm{d}v = 0 \\ &沿\ C_-\ 线，\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v - a, \quad \mathrm{d}p - \rho a \mathrm{d}v = 0 \\ &沿\ C_0\ 线，\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v, \quad \frac{p}{\rho^k} = \mathrm{const} \end{aligned}\right\} \tag{7.108}$$

方程组(7.97)虽然化成常微分方程(7.108)，但求解仍然困难，须按数值计算(numerical calculation)，其数值求解方案如图7.22(a)所示。假若1、2、3的位置及其上的v、p、ρ已知，求其附近一点4(它为三条特征线的交点)的位置及其物理量。

本来这些特征线段都是曲线，见图7.22(a)所示，但因这些点很近，故可以将这些曲线段用直线段来代替，如图7.22(b)所示，即微分变成差分，于是(7.108)式可表成

$$
\left.\begin{aligned}
x_4 - x_1 &= (v_1 + a_1)(t_4 - t_1) \\
x_4 - x_3 &= (v_3 - a_3)(t_4 - t_3) \\
x_4 - x_2 &= v_2(t_4 - t_2)
\end{aligned}\right\} \tag{7.109}
$$



(a) 一维流动的数值求解方案图　　(b) 一维流动的特征线差分

图 7.22

如上是三个方程两个未知量，所求的未知量 x_4、t_4 一般是自相矛盾的。实际上，在“初始值”线 $\mathscr{T}_0$ 上不能先任意指定三个点，一般可先指定两个点，如点 1 和点 2(即建立两个方程)，由这两个点定出待求点 4，然后再采用叠代或试凑法等确定出符合精度要求的点 3。点 3 确定了，该点上的物理量即可给出。(当然，曲线 $\mathscr{T}_0$ 的方程 $x=f(t)$ 及其上的物理量分布是已知的)。

在点 1、2、3 已知，其上物理量亦已知的情况下，将(7.108)式所示的相容关系式沿三条特征线差分，则给出

$$
\left.\begin{aligned}
(p_4 - p_1) + \rho_1 a_1(v_4 - v_1) &= 0 \\
(p_4 - p_3) - \rho_3 a_3(v_4 - v_3) &= 0 \\
\frac{p_4}{\rho_4^k} &= \frac{p_2}{\rho_2^k}
\end{aligned}\right\} \tag{7.110}
$$

在如上两组式中各个量的下标 1、2、3、4，分别表示所对应的点上的量。由(7.110)式求解，便可得到点 4 上的物理量。

在点 4 的位置及其物理量确定之后，再重复如上的步骤确定出点 6 的位置及物理量，以此类推，求得点 8,10,……。点 4,6,8,……组成一条新的“初始值”线 $\mathscr{T}_1$，再按在 $\mathscr{T}_0$ 上的步骤继续下去。(如上研究的为一条非特征线上给定初值的情况，至于其他情形，参见§12.7)。

如果为了提高差分计算精度，可将(7.108)式中的斜率 $v\pm a$ 和 ρa 取成两点上的平均，这样，整个计算必须全用叠代。(关于按特征法的差分计算，参见§11.13)。

② 按不定线法求特征线及其相容关系式

按这种定义办法，将(7.97)式和(7.102)式联立，即有

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x} - a^2(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x}) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \\ \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s} \end{cases}$$

如若上式不能完全确定$\frac{\partial v}{\partial t}$、$\frac{\partial v}{\partial x}$、$\frac{\partial p}{\partial t}$、$\frac{\partial p}{\partial x}$、$\frac{\partial \rho}{\partial t}$、$\frac{\partial \rho}{\partial x}$这六个偏导数，则其系数行列式(coefficient determinant)为零。由系数行列式为零则推出(7.108)式所示的特征线，继而亦可推出(7.108)式所示的特征线上相容关系式。

③. 按经典气体动力学的定义法来求特征线

如上所求得的三种特征线，若按定义(7.98.2)则可简便求得。在一维的情况下：$F=F(x,t)$，我们再将 F 改写成 $x=f(t)$，即有

$$F = F(x,t) = x - f(t)$$

于是推出

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}F = -f'(t) + v = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + v$$

$$|\mathrm{grad}F| = \sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2 + (\frac{\partial F}{\partial z})^2} = 1$$

将如上两式代进(7.98.1)式，则给出

$$U = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v = \begin{cases} a \\ -a \\ 0 \end{cases}$$

将上式整理一下，便得到前面所求的特征线。

7.10.2 等熵流动情形

如上求解特征线是对于一般的一维流动，因而需要引出第三族特征线 C_0，沿该特征线 $p/\rho^k=A=\mathrm{const}$，$C_0$ 线不同则 A 的取值亦不同。然而，如果是多方气体等熵流动(爆轰产物的流动往往按等熵处理)，则无须引出第三族特征线，因等熵，则在整个流场中：

$$S \equiv \mathrm{const}, \quad \frac{p}{\rho^k} = A \equiv \mathrm{const} \tag{7.111}$$

由于等熵，不但没有必要引出第三族特征线，而且沿 C_+ 和 C_- 的相容关系式可以得到简化。

根据(7.111)式和音速的定义，则有

$$a^2 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = kA\rho^{k-1}$$

$$2a\mathrm{d}a = k(k-1)A\rho^{k-2}\mathrm{d}\rho$$

由如上两式得到：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho a} = \frac{2}{k-1}\mathrm{d}a \tag{7.112}$$

将上式代进(7.108)中的头两个特征线相容关系式，则给出：

$$\left.\begin{aligned} &沿 C_+, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v + a, \quad \mathrm{d}v + \frac{2}{k-1}\mathrm{d}a = 0 \\ &沿 C_-, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v - a, \quad \mathrm{d}v - \frac{2}{k-1}\mathrm{d}a = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.113}$$

将如上的相容关系式积分给出：

$$\left.\begin{aligned} &沿 C_+, \quad v + \frac{2}{k-1}a = 2\lambda_1, 在速度平面上以 \Gamma_+ 表示 \\ &沿 C_-, \quad v - \frac{2}{k-1}a = 2\lambda_2, 在速度平面上以 \Gamma_- 表示 \end{aligned}\right\} \tag{7.114}$$

式中的 λ_1 和 λ_2 为积分常数(沿各自的特征线不变)，通常称作**黎曼不变量**(Riemann invariants)，特征线不同，它们的取值亦不同。

7.11 一维流动的简单波与冲击波的形成

在等熵的情况下，多方气体的一维不定常流动的方程组可以化成只是关于 v 和 a 的方程组。根据(7.15)和(7.111)式，这种一维不定常流动的连续性方程和运动方程则可改写成：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{\rho a}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right) \end{cases}$$

而据(7.112)式，可推出

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{2a}{k-1}\dfrac{\partial a}{\partial x} \\ \dfrac{1}{\rho a}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2}{k-1}\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

将如上两组关系式结合起来，并且考虑到：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}$$

就得到一组关于函数 v 和 a 的方程：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2a}{k-1}\frac{\partial a}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial a}{\partial t} + v\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{k-1}{2}a\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.115}$$

7.11.1 多方气体一维不定常等熵流动的分类

运动方程组(7.115)可以解出 $v(x,t)$、$a(x,t)$，即对于每个点 (x,t) 都可确定一组 (v,a) 值，亦即 (x,t) 平面上的点与 (v,a) 平面上的点相对应，这种对应情况有三类：

1. (x,t)平面上某个区域内的所有点对应于(v,a)平面上的一个点

这种情况的解为常值解：$v\equiv\text{const}$、$a\equiv\text{const}$，该解当然满足(7.115)式(即为该方程组的一组解)，这种流动称作均匀流或恒值区。由于 v 和 a 为常值，则由(7.108)式得知，在(x,t)平面上两族特征线 C_-和 C_+均为直线。图 7.22 表示了这种情况。

从数学变换的角度，由$(x,t)\to(v,a)$的变换则对应着雅可比行列式(Jacobian)J 为零的情形，即：

$$\mathrm{J}=\frac{\partial(v,a)}{\partial(x,t)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial a}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial t} & \dfrac{\partial a}{\partial t}\end{vmatrix}=0$$

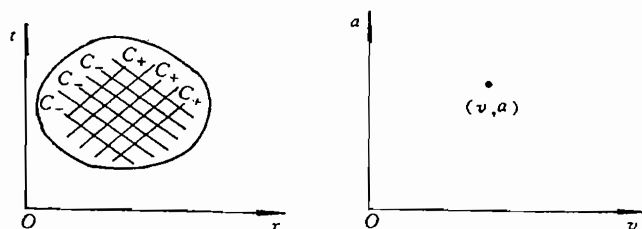


图 7.23 物理平面(x,t)与速度平面(v,a)的对应情况之一

2. (x,t)平面上某个区域内的所有点对应于(v,a)平面上一条线(Γ_+或 Γ_-)

这种情况的解称作简单波(在后面将专门讨论它)，又称作黎曼气流(Riemann gas flow)。如若 $k\neq3$，该流动有一族特征线为直线，其物理平面与速度平面的对应关系如图 7.24 所示。

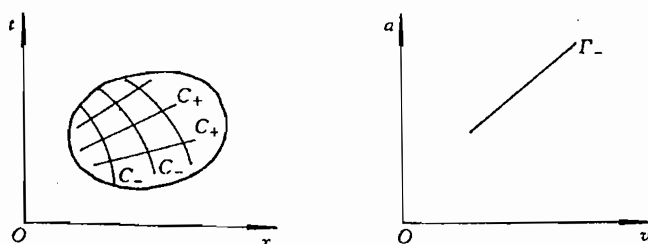


图 7.24 物理平面与速度平面的对应情况之二

从函数变换的角度，由$(x,t)\to(v,a)$的变换亦对应着雅可比行列式为零，即

$$\mathrm{J}=\frac{\partial(v,a)}{\partial(x,t)}=0$$

但与均匀流不同，在 $\partial v/\partial t$、$\partial a/\partial t$、$\partial v/\partial x$、$\partial a/\partial x$ 之中不许全为零。当然，$J\equiv0$ 或一族特征线为直线亦可作为特征线的定义。

3. (x,t)平面上某个区域内各点与(v,a)平面上某个区域内各点有一、一对应的关系

方程组(7.115)的这种解称作一般流动(general flow)。当 $k\neq3$ 时，两族特征线均为曲

线，这种流动的物理平面与速度平面的对应关系，见图 7.25。

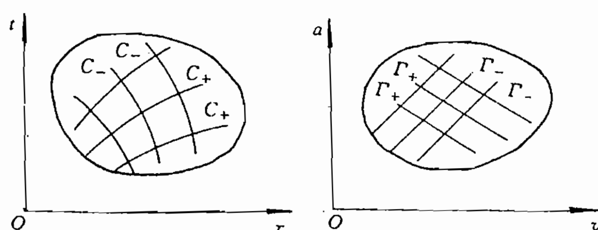


图 7.25　物理平面与速度平面的对应情况之三

从数学变换的角度，由$(x,t)\to(v,a)$的变换对应着雅可比行列式不为零，即：

$$J=\frac{\partial(v,a)}{\partial(x,t)}\neq 0$$

▲重要说明：在以上的讨论中均指出 $k\neq3$。可是 $k=3$ 却是一种极重要情况，许多高能炸药的爆轰产物的绝热指数都接近于 3，即 $k\approx3$。当 $k=3$ 时，可以使这种一维等熵流动的特征线解得到很大的简化(具体地，将在第九章爆轰波理论中研究)。从(7.114)式得知，当 $k=3$ 时，不管上述的哪种流动类型，其特征线都是直线，这在有些气体动力学专著中恰恰忽略了这一点，他们以两族特征线是直线还是曲线来区分流动类型，而没有指出 $k\neq3$ 的先决条件。

7.11.2　简单波解

按如上的定义，所谓简单波亦是指 $J\equiv0$ 但 v 和 a 的各个偏导数不全为零的流动(从如下的结果看出，这与简单波的其他定义等价)。根据这个条件再加上方程(7.115)则有：

$$\left.\begin{aligned}&J=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}=0\\&\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{2a}{k-1}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}=0\\&\frac{\partial a}{\partial t}+v\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{k-1}{2}a\frac{\partial v}{\partial x}=0\end{aligned}\right\}\tag{7.116}$$

将上式的第二式乘以 $\partial a/\partial x$、第三式乘以 $\partial v/\partial x$，然后将其两式相减，则给出：

$$\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{k-1}{2}a\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-\frac{2a}{k-1}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2=0$$

再利用(7.116)的第一式，就得到：

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\pm\frac{2}{k-1}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}\tag{7.117.1}$$

将上式代进(7.116)的第一式中，则给出：

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\pm\frac{2}{k-1}\cdot\frac{\partial a}{\partial t}\tag{7.117.2}$$

而

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial t}dt\tag{7.117.3}$$

$$\mathrm{d}a = \frac{\partial a}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial a}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{7.117.4}$$

将(7.117)的各式归纳起来，则得到

$$\mathrm{d}v + \frac{2}{k-1}\mathrm{d}a = 0 \tag{7.118.1}$$

或

$$\mathrm{d}v - \frac{2}{k-1}\mathrm{d}a = 0 \tag{7.118.2}$$

将(7.118)式积分，得到：

$$v + \frac{2}{k-1}a = \text{const} = \frac{2}{k-1}a_0 \tag{7.119.1}$$

或

$$v - \frac{2}{k-1}a = \text{const} = -\frac{2}{k-1}a_0 \tag{7.119.2}$$

其中 a_0 为 $v=0$ 时的音速。如上两式在所考虑的区域只有之一存在，否则成了均匀流区。

注意，(7.118)或(7.119)式与(7.113)或(7.114)式的区别在于前者在整个流场成立，后者只沿特征线成立。由于有全流场成立的(7.119)式存在，在速度平面上其流动当然对应一条直线(Γ_+或Γ_-)。

式(7.118)或(7.119)给出了简单波的等价定义，如果多方气体等熵流动的连续区为简单波，则有(7.119.1)或(7.119.2)之一在所考虑的区域处处成立。

对于多方气体等熵流动普遍成立的(7.114)式，当然对于简单波这种特殊情况亦成立。如果在整个流动区中有如下式成立：

$$v + \frac{2}{k-1}a = \frac{2}{k-1}a_0$$

而沿任一条 C_- 线有下式成立：

$$v - \frac{2}{k-1}a = 2\lambda_2 \quad , \quad \lambda_2 = \lambda_2(w)$$

由上面两式联立求解，得出：

$$v = \frac{1}{k-1}a_0 + \lambda_2 = \text{const} = v(w)$$

$$a = \frac{1}{2}a_0 - \frac{k-1}{2}\lambda_2 = \text{const} = a(w)$$

其中 w 为所考虑的 C_- 特征线的参数。w 取值不同，则对应不同的 C_- 特征线。根据以上两式就会推出沿任一条 C_- 线，均有：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v - a = \text{const}$$

亦即每条 C_- 特征线都是直线。将上式积分，得：

$$x = (v-a)t + \text{const} = (v-a)t + f(w) \tag{7.120}$$

其中 $f(w)$是个由初边条件确定的函数。

将(7.119.1)和(7.120)式联立，则可求得该区域的解 $v=v(x,t)$、$a=a(x,t)$.

同理，如果在整个流动区域式(7.119.2)成立，同样可以按如上方法确定这个区域的解：$v=v(x,t)$和 $a=a(x,t)$。这就是简单波流动区域的解。

7.11.3 **简单波的分类**(Classification of simple waves)

1. 按波相对气流的传播方向分类

①正向波，亦称右传波，它的第一族特征线为直线，即有下式成立：

$$\left.\begin{aligned} & x=(v+a)t+f(w)=\left(a_0+\frac{k+1}{2}v\right)t+f(w) \\ & \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}v}=\frac{k-1}{2} \quad 或 \quad v-\frac{2a}{k-1}=-\frac{2a_0}{k-1} \end{aligned}\right\} \tag{7.121}$$

对于这种波，其第一族特征线都是直线，沿每条该族特征线物理量为常数，整个流动区在速度平面(v,a)上对应一条Γ_-特征线，即黎曼第二不变量 λ_2 在整个流动区取同值。图7.26和图7.27表示出两个正向简单波。

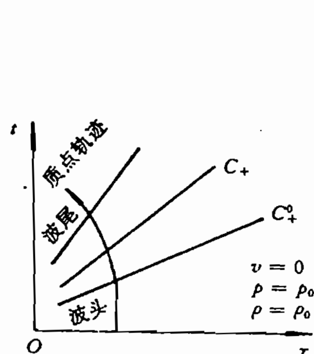


图7.26 正向稀疏波

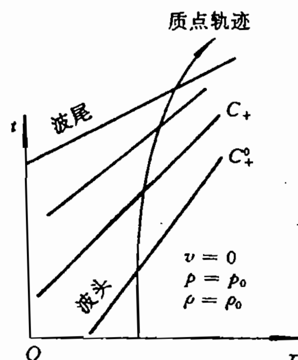


图7.27 正向压缩波

②负向波，亦称左传波，它的第二族特征线为直线，即有下式成立：

$$\left.\begin{aligned} & x=(v-a)t+f(w)=\left(-a_0+\frac{k+1}{2}v\right)t+f(w) \\ & \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}v}=-\frac{k-1}{2} \quad 或 \quad v+\frac{2a}{k-1}=\frac{2a_0}{k-1} \end{aligned}\right\} \tag{7.122}$$

对于这种波，其第二族特征线都是直线，沿每条该族特征线物理量为常量，整个流动区在速度平面(v,a)上对应一条Γ_+特征线，即黎曼第一不变量 λ_1 在整个流动区取同值。图7.28和图7.29表示出两个负向简单波。

2. 按波对气流的稀疏和压缩作用来分类

所谓稀疏还是压缩是指气体质点穿过波区后，其密度 ρ 是增大还是减小，即考察$\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t$是大于零还是小于零。

根据连续性方程：

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=-\rho\frac{\partial v}{\partial x} \tag{7.123}$$

判断 $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t$ 的正负则等价于判断 $\partial v/\partial x$ 的正负。而根据(7.121)和(7.122)式，有下式：

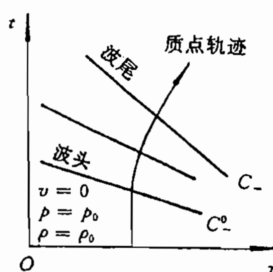


图 7.28　负向稀疏波

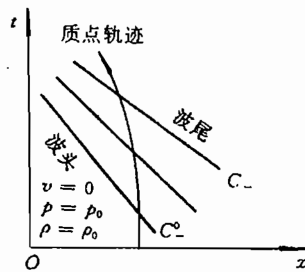


图 7.29　负向压缩波

$$x = \left(\pm a_0 + \frac{k+1}{2}v\right)t + f(w) \tag{7.124}$$

由上式可求得：

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\dfrac{k+1}{2}t + f'(w)\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}v}} \tag{7.125.1}$$

从而看出，只要函数 $f(w)$ 已知，则 $\partial v/\partial x$ 的正负就可以确定了。

①稀疏波(rarefaction waves)

所谓稀疏波是满足以下条件的简单波，即要求：

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} < 0 \quad 或 \quad \frac{\partial v}{\partial x} > 0$$

若该稀疏波为正向简单波，据(7.121)式有：

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2}{k-1}\frac{\partial a}{\partial x} \tag{7.125.2}$$

即稀疏波所要求的 $\partial v/\partial x>0$ 的条件则等价于 $\partial a/\partial x>0$ 的条件。

若该稀疏波为负向简单波，据(7.122)式有：

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2}{k-1}\frac{\partial a}{\partial x} \tag{7.125.3}$$

即稀疏波所要求的 $\partial v/\partial x>0$ 的条件则等价于 $\partial a/\partial x<0$ 的条件。

关于正、负向稀疏波，请见图 7.26 和图 7.28。

现在我们研究一下简单波中直特征线(当 $k\neq3$ 时)的分布形式。以正向稀疏波为例，随着 x 和 t 的增长这些特征线 C_+ 越来越散开，即发散。这是由于诸 C_+ 特征线的倾角 Θ 越来越大，所谓倾角 Θ 是指 C_+ 特征线与 t 轴的夹角，见图 7.30(a)所示。

关于各 C_+ 特征线的 Θ 变化趋势证明如下，因：

$$\mathrm{tg}\Theta = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v + a = a_0 + \frac{k+1}{2}v$$

从而求得：

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = \frac{k+1}{2}\cos^2\Theta\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

而由前已知，对于正向稀疏波必须 $\dfrac{\partial v}{\partial x}>0$，故 $\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}>0$，所以说诸直特征线 C_+ 随 x 的增加，

倾角 Θ 越来越大。

沿每一条 C_+ 特征线，v 和 a 等保持不变，即相当于这些物理量沿着它传播出去。假定在 $t=0$ 时，$a=a(x,0)$ 为条直线 $\overline{AB}$，到 $t=t$ 时 $a=a(x,t)$ 为直线 $\overline{CD}$，显然直线 $\overline{CD}$ 比直线 $\overline{AB}$ 倾角大，见图 7.30(b)，即波形越来越平缓。

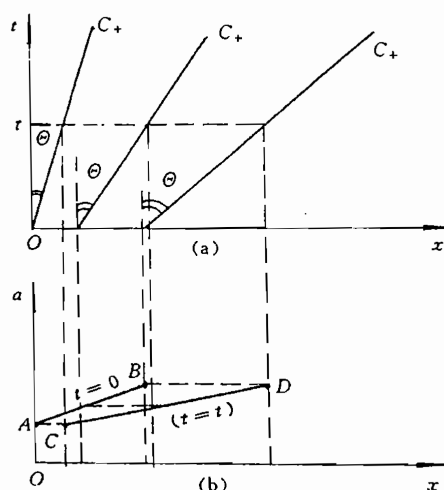


图 7.30　正向稀疏波波形的变化

同理可证负向稀疏波随时间的增加而发散(证明图 7.28 情形时，要注意到 C_- 特征线的斜率是负的)。

如果诸直特征线是从一点发出的，这样的稀疏波称作**中心简单波**(centred simple waves)。

②压缩波(compression waves)

所谓压缩波是满足以下条件的简单波，即要求：

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}>0 \quad 或 \quad \frac{\partial v}{\partial x}<0$$

若该压缩波为正向简单波，据(7.121)式有：

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2}{k-1}\frac{\partial a}{\partial x}$$

即压缩波所要求的 $\partial v/\partial x<0$ 的条件则等价于 $\partial a/\partial x<0$ 的条件。

若该压缩波为负向简单波，据(7.122)式有：

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{2}{k-1}\frac{\partial a}{\partial x}$$

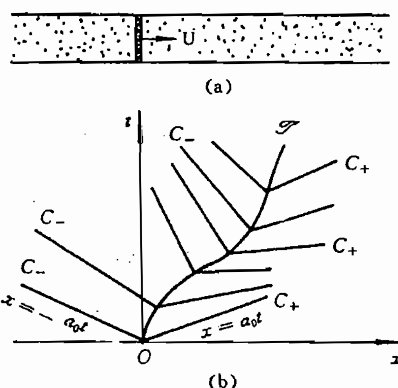


图 7.31　无限长管中活塞推动气体连续运动的图像

即压缩波所要求的 $\partial v/\partial x<0$ 的条件则等价于 $\partial a/\partial x>0$ 的条件。

关于正、负向压缩波，请见图 7.27 和图 7.29。

压缩波的直特征线与稀疏波的不同，它们是会聚的。压缩波的波形随时间的推移会变得越来越陡，其证明类同于稀疏波，这里从略。

③例：在一个充满均匀、静止气体(即 $v=0$、$p=p_0$、$\rho=\rho_0$)的无限长管中，中间有一活塞，它从 $t=0$ 开始向右连续运动，如图 7.31(a)所示。设活塞运动轨迹 $\mathscr{T}$ 线满足：

$$x=F(t),\quad F'(0)=0$$

这是个气体作一维不定常等熵流动的问题。活塞左、右均为简单波，这两个波区与原静止气体的分界线为特征线(见图 7.31(b))：

$$x=\pm a_0t \quad , \quad a_0=\sqrt{\frac{kp_0}{\rho_0}}$$

活塞右边为正向简单波，据(7.121)式，C_+特征线的方程为：

$$x = \left(a_0 + \frac{k+1}{2}v\right)t + f(w), \quad v = v(w) \tag{7.126.1}$$

其 w 不同，C_+特征线亦不同。而每条 C_+线都发自 $\mathscr{T}$ 线，$\mathscr{T}$ 上的不同点发出不同的 C_+线，因此参量 w 可以取成 $\mathscr{T}$ 线上的时间 t，然而为了区别沿 C_+线上任一点的时间 t 和曲线 $\mathscr{T}$ 上的时间 t，故将 $\mathscr{T}$ 线上的时间 t 改写成 w，于是活塞的轨迹 $\mathscr{T}$ 表成：

$$x = F(w)$$

活塞的速度 U 写成：

$$U = F'(w)$$

由于在活塞上的气体与活塞的速度相同，而沿每条 C_+上的速度又不变，故：

$$v = v(x,t) = U = F'(w)$$

为了确定函数 $f(w)$，现将(7.126.1)式中的 x 和 t 取在活塞上，故有：

$$F(w) = \left(a_0 + \frac{k+1}{2}v\right)w + f(w)$$

从而得到：

$$f(w) = F(w) - \left(a_0 + \frac{k+1}{2}v\right)w$$

$$\begin{aligned} f'(w) &= F'(w) - \left(a_0 + \frac{k+1}{2}v\right) - \frac{k+1}{2}w\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w} \\ &= F'(w) - (a+v) - \frac{k+1}{2}w\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w} \\ &= -a - \frac{k+1}{2}w\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w} \end{aligned}$$

将上式代进(7.125.1)式中，得到：

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\frac{k+1}{2}t - \frac{k+1}{2}w - a\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}v}} \tag{7.126.2}$$

现考虑活塞上的点，即在 $t=w$ 时，于是有：

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w} = -\frac{1}{a}F''(w)$$

由上得出：当活塞作减速运动时，即 $F''(w)<0$，则活塞的右边为稀疏波；当活塞作加速运动时，即 $F''(w)>0$，则活塞右边为压缩波。

活塞的左边为负向简单波，据(7.122)式有

$$x = \left(-a_0 + \frac{k+1}{2}v\right)t + f(w), \quad v = v(w) \tag{7.127.1}$$

从而亦可求得：

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\frac{k+1}{2}t - \frac{k+1}{2}w + a\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}v}} \tag{7.127.2}$$

考虑活塞上的点，即在 $t=w$ 时，于是有：

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{a}F''(w)$$

结果与活塞右边的情形相反：当活塞作减速运动时，即 $F''(w)<0$，则活塞左边为压缩波；当活塞作加速运动时，即 $F''(w)>0$，则活塞左边为稀疏波。

7.11.4 激波的形成

在上述的例子中，如果活塞向右加速运动，则在活塞的右边产生压缩波，即诸 C_+ 特征线逐渐靠拢，最后相交。从波形的角度看，波的前沿越来越陡，最后变为竖直，见图 7.32(b)。C_+ 特征线之交点，便是激波形成之起点。

现考虑一个右行简单波，其 C_+ 特征线族的方程为：

$$x=\left(a_0+\frac{k+1}{2}v\right)t+f(w)=g(t,w) \tag{7.128}$$

其中 $f(w)$ 和 $v=v(w)$ 是 w 的已知函数，由活塞的运动轨迹 $\mathscr{T}$ 决定。

这个压缩波的一些 C_+ 特征线将会聚而形成包络(envelope)。为确定这个包络线，将方程(7.128)改写成

$$G(x,t,w)=x-g(t,w)=0$$

其包络线方程为

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial G}{\partial w}=-\dfrac{\partial g}{\partial w}=0\\ G(x,t,w)=0\end{array}\right\} \tag{7.129}$$

由这组方程消去 w 便可求得诸 C_+ 特征线的包络线。在包络线上 v、p、ρ 等值将互不自洽，即为多值的，显然这不符合物理实际，所以这种来自纯数学的结果是不可能存在的，从而该压缩简单波不复存在，而出现新的现象——冲击波。然而包络线并不是激波曲线，但包络线的起点却为激波的起点。

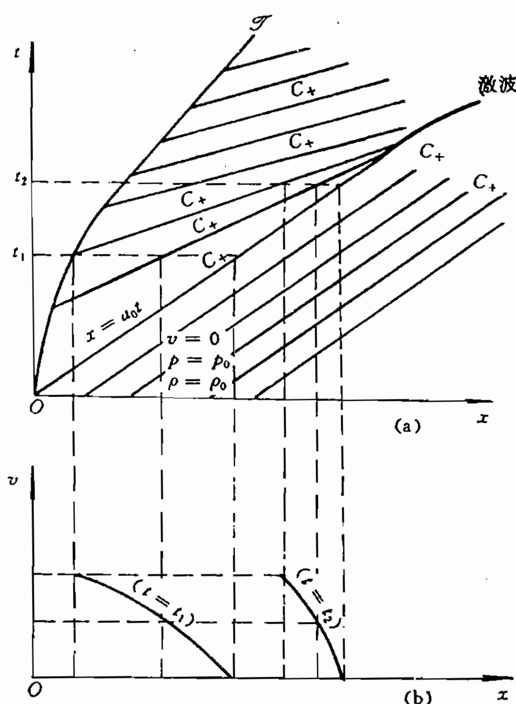


图 7.32 压缩简单波与其波形的发展

关于包络线的起点即激波的起点。可从波形分析得到。压缩波的波形在传播过程中，变得越来越陡，见图 7.32(b)，当波形的斜率为无穷时，即出现激波，也就是当：

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\infty \quad 或 \quad \frac{\partial x}{\partial v}=0 \tag{7.130}$$

$\partial x/\partial v=0$ 的条件正是(7.129)式的条件之一。因据(7.128)式，有：

$$\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial g}{\partial w}\cdot\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}v}$$

而活塞的加速度不为零，即：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}v}}\neq 0$$

因此推出：

$$\frac{\partial x}{\partial v}=0 \quad \text{则等价于} \quad \frac{\partial g}{\partial w}=0$$

从而由(7.129)式推出：

$$\frac{\partial x}{\partial v}=0 \quad \text{则等于} \quad \frac{\partial G}{\partial w}=0$$

关于激波生成后，激波轨迹的求解将在§7.27中论述。

7.12 多方气体的平面定常超音速流动

如果气体的运动状态只依赖于笛卡尔坐标 x 和 y，而与时间 t 无关系，这样的流动称作**平面定常流动**。由于在爆轰产物的流动中，产物气体可作为多方气体且其流动的最重要的阶段是超音速流动，因此我们研究多方气体的平面定常超音速流动。在以下的论述中凡提到气体均指多方气体。

根据(7.15)式，平面定常流动的气体的控制方程组为：

$$\left.\begin{aligned}
&v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0\\
&v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0\\
&v_x\frac{\partial \rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial \rho}{\partial y}+\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)=0\\
&\left(v_x\frac{\partial p}{\partial x}+v_y\frac{\partial p}{\partial y}\right)-a^2\left(v_x\frac{\partial \rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)=0
\end{aligned}\right\}\tag{7.131}$$

它与一维不定常流动一样，也是两个自变量的偏微分方程组，难以求解。因此也须利用特征线方法将偏微分方程组化成常微分方程，以方便求解。

▲对于平面定常流动的特征线定义，完全和一维不定常流动相同，只**要把§7.10中关于特征线定义中的自变量 t 换成自变量 y 就成了二维定常流动的特征线定义**。故不再重述。

完全照搬§7.10中的做法，可以求得：

第一族特征线 C_+ 满足：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{v_xv_y+a\sqrt{v^2-a^2}}{v_x^2-a^2}\tag{7.132.1}$$

第二族特征线 C_- 满足：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{v_xv_y-a\sqrt{v^2-a^2}}{v_x^2-a^2}\tag{7.132.2}$$

第三族特征线 C_0 满足：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{v_y}{v_x}\tag{7.132.3}$$

其中

$$v^2=v_x^2+v_y^2 \quad , \quad a=\sqrt{\frac{kp}{\rho}}$$

由(7.132.1)等式看出，在平面定常流动中，只有当气体作超音速流动时，才有第一族和第二族特征线。当流动为亚音速时，给出的是虚特征线，即不存在第一族和第二族特征线，亦即方程组(7.131)为椭圆型方程组。因此平面定常流动与一维不定常流动不同，对于一维不定常流动，不管流动是超音速的还是亚音速的，其控制方程组总是双曲型的，即总存在第一族和第二族特征线。

如上所求得的三种特征线，若按特征线的定义(7.98.2)式则能简便地求得。在二维平面定常的情况下：$F=F(x,y)=0$，将 F 改写成 $y=f(x)$，即有

$$F = F(x,y) = y - f(x)$$

由此推出

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}F = -v_x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + v_y \\ |\mathrm{grad}F| &= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 1} \end{aligned}\right\} \tag{7.132.4}$$

将上式代进(7.98.1)式中并利用(7.98.2)中的头两式，则给出

$$\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right)^2 - a^2|\mathrm{grad}F|^2 = \left(-v_x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + v_g\right)^2 - a^2\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right] = 0$$

从而求得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v_xv_g \pm a\sqrt{v^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2}$$

上式就是(7.132.1)和(7.132.2)式。将(7.132.4)式代进(7.98.2)的第三式则推出(7.132.3)式。

平面定常超音速流动的特征线与速度 $\boldsymbol{v}$ 之间有确定的几何关系，见图 7.33 所示。图上画出第一和第二族特征线，第三族特征线 C_0 的方向就是质点速度的方向，因据(7.132.3)式显然有：

$$C_0:\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v_y}{v_x} = \tan\beta \tag{7.133}$$

其中 β 为流动方向角，即流向与 x 轴的夹角。

第一族特征线 C_+ 的方向为流速方向逆时针旋转一个角度 α，这个方向即 C_+ 的方向，它的斜率为：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan(\beta + \alpha) \tag{7.134}$$

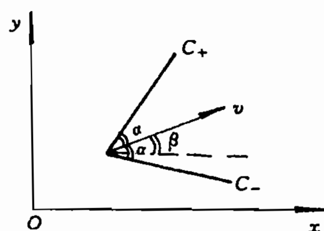


图 7.33 流向与特征线之间的几何关系

其中，α 称作马赫角(Mach angle)，它定义作：

$$\sin\alpha = \frac{a}{v},\quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \tag{7.135}$$

将(7.134)式中的和角展开，并利用式(7.133)和(7.135)，则得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan(\beta + \alpha) = \frac{\tan\beta + \tan\alpha}{1 - \tan\beta\cdot\tan\alpha} = \frac{v_xv_y + a\sqrt{v^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2}$$

这个结果同(7.131.1)式完全一样，因此(7.134)所确定的方向就是第一族特征线 C_+ 的方向。

第二族特征线C_-的方向为流速方向顺时针转动α角，即C_-的方向为

$$\frac{dy}{dx}=\tan(\beta-\alpha) \tag{7.136}$$

将(7.136)式展开并利用式(7.133)和(7.135)，同样可以推出(7.136)式就是(7.132.2)式的变形。从而说明该方向就是第二族特征线C_-的方向。

按§7.10所述的方法，同样可求得沿各族特征线上的物理量相容关系式。

沿C_+：

$$v_x dv_y - v_y dv_x + \sqrt{\frac{v^2}{a^2}-1}\,\frac{dp}{\rho}=0$$

或写成

$$v_x dv_y - v_y dv_x + \sqrt{M^2-1}\,\frac{dp}{\rho}=0 \tag{7.137.1}$$

沿C_-：

$$v_x dv_y - v_y dv_x - \sqrt{\frac{v^2}{a^2}-1}\,\frac{dp}{\rho}=0$$

或写成

$$v_x dv_y - v_y dv_x - \sqrt{M^2-1}\,\frac{dp}{\rho}=0 \tag{7.137.2}$$

沿C_0：

$$dp-a^2 d\rho=0$$

或写成

$$\frac{p}{\rho^k}=A=\text{const} \tag{7.137.3}$$

式(7.137.3)本来是沿迹线成立，但因现在流动为定常的，流线与迹线重合，故沿流线成立，C_0的方向也是流动的方向。

通过特征线方法，把偏微分方程组(7.131)化成特征线方程(7.132)和沿特征线上的相容关系式(7.137)，即把偏微分方程组化成常微分方程，然而求解仍有困难，须按数值解。可按图7.22所示的方案，将常微分方程化成差分方程，先求出点4处的物理量，然后再利用所求得的物理量来确定点4的位置，如果是为提高计算精度而将原方程中出现的斜率取两点上的平均值的话。

7.13 平面定常等熵无旋超音速流动的特征线·外摆线

7.13.1 特征线上的相容关系式(compatibility relation along characteristics)

有许多平面定常超音速流动是等熵的，尤其是爆轰产物气体的流动。在等熵流动的情况下不必引出第三族特征线，只需引出第一和第二族特征线，并且沿这两族特征线上的相容关系式还可以积分。

由于流动定常、等熵且无旋，所以有在全流场成立的伯努利——拉格朗日积分(见(7.30)式)

$$\frac{v^2}{2}+\frac{a^2}{k-1}=\frac{v_{\max}^2}{2}=\frac{k+1}{2(k-1)}a_*^2\equiv \text{const} \tag{7.138}$$

$$\frac{p}{\rho^k}=A\equiv \text{const} \tag{7.139}$$

将如上两式微分，得到：

$$v_x \mathrm{d}v_x+v_y \mathrm{d}v_y+\frac{1}{k-1}\mathrm{d}(a^2)=0$$

$$\mathrm{d}p=a^2\mathrm{d}\rho$$

而

$$\mathrm{d}(a^2)=\mathrm{d}\left(\frac{kp}{\rho}\right)=k\frac{\mathrm{d}p}{\rho}-\frac{kp}{\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

$$=k\frac{\mathrm{d}p}{\rho}-\frac{a^2}{\rho}\mathrm{d}\rho=(k-1)\frac{\mathrm{d}p}{\rho}$$

将以上三式消去 $\mathrm{d}(a^2)$ 和 a^2 之后，得到：

$$v_x \mathrm{d}v_x+v_y \mathrm{d}v_y+\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=0 \tag{7.140}$$

把该式代进(7.137.1)和(7.137.2)两式中，给出：

沿 C_+：

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}v_x}=-\frac{v_x^2-a^2}{v_x v_y-a\sqrt{v^2-a^2}} \tag{7.141.1}$$

沿 C_-：

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}v_x}=-\frac{v_x^2-a^2}{v_x v_y+a\sqrt{v^2-a^2}} \tag{7.141.2}$$

如上的特征线上相容关系与非等熵情形的不同，关系式中只涉及 v_x 和 v_y 两个量，式中所含的 a 可通过(7.138)式表成 v_x 和 v_y 的函数。式(7.141.1)称作速度平面 (v_x,v_y) 上的第一族特征线，以 Γ_+ 表示；式(7.141.2)称作速度平面 (v_x,v_y) 上的第二族特征线，以 Γ_- 表示。

我们在速度平面上采用极坐标 (v,β)，于是在 (v_x,v_y) 平面上的速度分量表成：

$$\left.\begin{aligned} v_x&=v\cos\beta \\ v_y&=v\sin\beta \end{aligned}\right\} \tag{7.142}$$

于是推出：

$$\begin{cases} \mathrm{d}v_x=(\cos\beta)\mathrm{d}v-(v\sin\beta)\mathrm{d}\beta \\ \mathrm{d}v_y=(\sin\beta)\mathrm{d}v+(v\cos\beta)\mathrm{d}\beta \end{cases}$$

将如上结果代进(7.141)的两式中，则给出在速度平面上以极坐标表示的相容关系式：

Γ_+ 线：

$$\mathrm{d}\beta=\sqrt{\frac{v^2}{a^2}-1}\,\frac{\mathrm{d}v}{v} \tag{7.143.1}$$

Γ_- 线：

$$\mathrm{d}\beta=-\sqrt{\frac{v^2}{a^2}-1}\,\frac{\mathrm{d}v}{v} \tag{7.143.2}$$

而据(7.138)式，则有：

$$a^2 = \frac{k+1}{2}a_*^2 - \frac{k-1}{2}v^2$$

把上式代进(7.143)式中，便得到：

Γ_+线

$$\mathrm{d}\beta = \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \tag{7.144.1}$$

Γ_-线

$$\mathrm{d}\beta = -\sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \tag{7.144.2}$$

其中

$$\lambda = \frac{v}{a_*}$$

将(7.144)式改写成：

$$\mathrm{d}\beta = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}}\frac{\mathrm{d}\lambda^2}{\lambda^2}$$

再作一定的变换并积分，则推出：

Γ_+ 线： $$\beta = \psi(\lambda) + \text{const} \tag{7.145.1}$$

Γ_- 线： $$\beta = -\psi(\lambda) + \text{const} \tag{7.145.2}$$

其中

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\arccos[k - (k-1)\lambda^2] - \arccos\left[\frac{k+1}{\lambda^2} - k\right]\right\} \tag{7.146}$$

从在速度平面上积分形式的特征线(7.145)式看出，曲线 Γ_+和 Γ_-的形式是固定的，而与在(x,y)平面上气体的具体流动情况无关，因函数 $\psi(\lambda)$的形式与具体的流动没有联系(关于函数 $\psi(\lambda)$的另一种形式，请看§11.13)。

7.13.2 外摆线(epicycloids)

外摆线是动圆在定圆上滚动时，其动圆圆周上一点在所滚动的平面上所画出的运动轨迹。式(7.145)所给出的积分曲线正是这种外摆线，它是半径 r_1：

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - 1\right) \tag{7.147}$$

的小圆在半径 $r_2=1$ 的大圆上滚动时所得到的曲线。见图 5.32 所示的几何关系，其中：

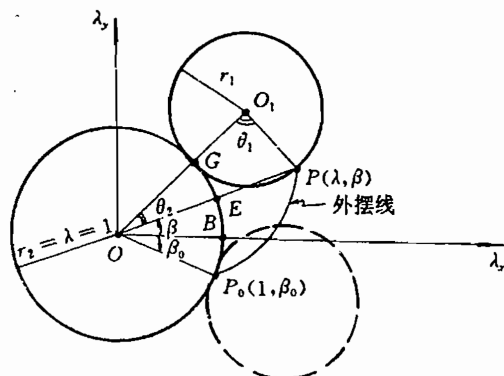


图 7.34 构成外摆线的动圆和定圆

$$\lambda_x = v_x/a_*, \quad \lambda_y = v_y/a_*$$

现在来证明动圆 O_1 上点 $P(\lambda,\beta)$ 的轨迹便是式(7.145)所描述的速度平面上的特征线。设动点开始时处在 P_0 点，现在处于 P 点，按几何关系则有：

$$\overset{\frown}{EB} = r_2\beta = \beta, \quad r_2 = 1$$

$$\overset{\frown}{P_0B} = -r_2\beta_0 = -\beta_0, \quad \beta_0 < 0$$

$$\overset{\frown}{P_0G} = \overset{\frown}{PG} = r_1\theta_1$$

$$\overset{\frown}{EG} = r_2\theta_2 = \theta_2$$

由如上诸关系式推出：

$$\beta - \beta_0 = r_1\theta_1 - \theta_2 \tag{7.148}$$

对 ΔOPO_1 使用正弦定律，即得：

$$\frac{\lambda}{\sin\theta_1} = \frac{r_1}{\sin\theta_2} = \frac{1+r_1}{\sin(\pi-\theta_1-\theta_2)}$$

由此求得：

$$\left.\begin{aligned} &\lambda\sin\theta_2 = r_1\sin\theta_1 \\ &\lambda\sin(\theta_1+\theta_2) = (1+r_1)\sin\theta_1 \end{aligned}\right\} \tag{7.149}$$

将(7.148)与(7.149)式联立起来，消去 θ_1 和 θ_2 后再代进(7.147)式中则给出：

$$\beta = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\arccos[k-(k-1)\lambda^2] - \arccos\left[\frac{k+1}{\lambda^2}-k\right]\right\} + \beta_0$$

上式即(7.145.1)式，所以动圆 O_1 逆时针在大圆 O 上滚动给出速度平面上第一族特征线 Γ_+；同理，如果动圆 O_1 顺时针在大圆 O 上滚动则给出速度平面上第二族特征线 Γ_-. 因此，有时把 Γ_+ 称作第一族外摆线，把 Γ_- 称作第二族外摆线。

7.14 平面定常等熵无旋超音速流动的分类·简单波

7.14.1 流动的分类

同一维不定常等熵流动一样，流动亦分成三种类型，其分法见下表：

均匀流	J≡0， 各偏导数全为零	在速度平面上 对应于一个点	两族特征线皆为直线
简单波	J≡0， 各偏导数不全为零	在速度平面上 对应于一条外摆线	一族特征线为直线
一般流动	J≠0	在速度平面上 对应于一个区域	两族特征线皆为曲线

其中 J 为雅可比行列式，现为

$$J = \frac{\partial(v_x,v_y)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x} & \dfrac{\partial v_y}{\partial y} \end{vmatrix}$$

在上表中，均匀流的三种定义相互等价是显然的，不必讨论。关键在于简单波，简单波讨论清楚了，其一般流动的三种定义互为等价则显而易见了，如下我们专门研究简单波。

7.14.2 **简单波**

平面定常超音速流动的简单波又称作普朗特—迈叶尔气流(Prandtl-Meyer gas flow),简称P—M气流。

上表所列的三种性质中任一个都可作为P—M气流的定义。如下,暂以在速度平面上对应一条外摆线作为P—M气流的定义,导出其余的两个性质,或者反过来。从而证明三种定义(性质)等价。

1. *假若流动区域对应于速度平面上一条外摆线(即为P—M气流),则该气流必有一族特征线是直线。*

上面提法确切表述为:如果P—M气流在速度平面上对应的那条外摆线属于第一族的,则该流动的第二族特征线为直线;如果P—M气流在速度平面上对应的那条外摆线属于第二族的,则该流动的第一族特征线为直线。

设在(x,y)平面上区域D为P—M气流区,见图7.35。按假定它在速度平面上对应一条外摆线,设该线为第一族的,故有:

$$\begin{cases}\beta = \psi(\lambda) + C_0 \\ C_0 = \text{const} \quad \text{在整个区域} D \text{中不变}\end{cases}$$

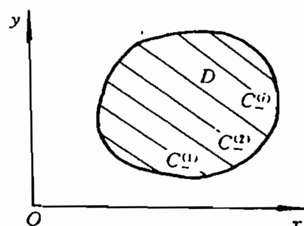


图7.35 P-M气流区

而沿D区中任一条第二族特征线$C_-^{(i)}$,则有:

$$\begin{cases}\beta = -\psi(\lambda) + C_i \\ C_i = \text{const} \quad \text{只沿特征线} C_-^{(i)} \text{成立}\end{cases}$$

将以上两组式子联立求解,则求得沿着$C_-^{(i)}$特征线:

$$\beta = \frac{1}{2}(C_0 + C_i) = \text{const}$$

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{2}(C_i - C_0) = \text{const}$$

从而推出沿$C_-^{(i)}$特征线:

$$v = \text{const}, \quad v_x = \text{const}, \quad v_y = \text{const}, \quad a = \text{const}$$

于是根据(7.132.2)式推出$C_-^{(i)}$的斜率:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \text{const}$$

即$C_-^{(i)}$为直线,而$C_-^{(i)}$是任取的一条,故在D区内所有的C_-特征线都是直线。

同理,如果区域D中的流动对应于速度平面上一条第二族外摆线,则在D区的第一族特征线全为直线。

当然,由于流动在速度平面上对应一条外摆线,亦能推出在区域D中有

$$J = 0$$

2. *如果流动区域内有一族特征线为直线,则该区的流动一定是P—M气流。*

事实上,我们可以给出更强的论断,这就是——P—M气流的简单判别法。如果流动区域内有一条特征线为直线,则这个区域的流动一定是P—M气流。

证明:设在流动区域内有一条特征线$\overline{AA}$为直线,不妨令它属于第一族的,见图7.36

所示。因为$\overline{AA}$为直特征线，所以在其上速度不变，故在速度平面上只对应一个点，现以 A 标记。

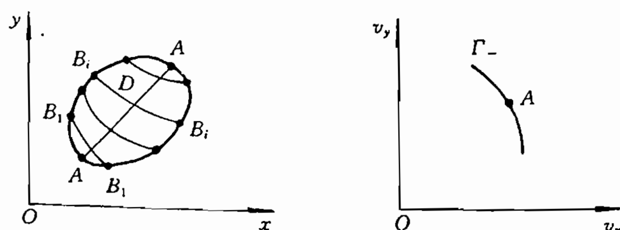


图 7.36 关于 P—M 气流的物理平面与速度平面的对应关系

在(x,y)平面上，过$\overline{AA}$上的每一个点作一条第二族特征线$\widehat{B_1B_1}$，$\widehat{B_2B_2}$，…，$\widehat{B_iB_i}$，……，这些特征线把整个流动区域 D 覆盖。当然，每一条第二族特征线按理都在速度平面上对应一条第二族外摆线(特征线)，然而$\overline{AA}$在速度平面上只对应着一个点 A，因此$\widehat{B_1B_1}$，…，$\widehat{B_iB_i}$，……在速度平面上各自所对应的那条外摆线都要经过 A 点，可是过 A 点的第二族外摆线只有一条，所以整个区域的流动由速度平面上的一条外摆线所描述，按定义，该流动为 P—M 气流。

当然，亦可推出在这种情况下，有

$$J = 0$$

推论：在连续流动的区域中，与超音速均匀流相邻接的那个区的流动一定是 P—M 气流。

3. 如果在流动区域中雅可比行列式满足：

$$J = \frac{\partial(v_x, v_y)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} \equiv 0 \tag{7.150}$$

且各偏导数不全为零，则该区域中的流动一定为 P—M 气流。

由于流动定常等熵且无旋，因而在整个流场伯努利—拉格朗日方程成立(见(7.30)式)

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} \equiv \text{const} \tag{7.151}$$

其中

$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = \dfrac{kp}{\rho} \\ v^2 = v_x^2 + v_y^2 \end{cases}$$

将(7.151)式微分，得到：

$$(v_x \mathrm{d}v_x + v_y \mathrm{d}v_y) + \frac{1}{k-1}\mathrm{d}(a^2) = 0 \tag{7.152.1}$$

而

$$\mathrm{d}(a^2) = \mathrm{d}\left(\frac{kp}{\rho}\right) = \frac{k\mathrm{d}p}{\rho} - \frac{kp}{\rho^2}\mathrm{d}\rho = (k-1)a^2\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$$

将它代进(7.152.1)式中，得到：

$$(v_x \mathrm{d}v_x + v_y \mathrm{d}v_y) + \frac{a^2}{\rho}\mathrm{d}\rho = 0 \tag{7.152.2}$$

将如下关系式：

$$\begin{cases} \mathrm{d}v_x = \dfrac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}v_y = \dfrac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}\rho = \dfrac{\partial \rho}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial \rho}{\partial y}\mathrm{d}y \end{cases}$$

代进(7.152.2)式中，并比较 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 的系数，则求得：

$$\begin{cases} v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + \dfrac{a^2}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial y} + v_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{a^2}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

将如上的第一式两端乘以 v_x；第二式乘以 v_y，然后把二式相加，便给出：

$$v_x^2 \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x v_y\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + v_y^2 \frac{\partial v_y}{\partial y} + a^2\left(\frac{v_x}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{v_y}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) = 0 \tag{7.152.3}$$

又据在定常情况的连续方程(见(7.14)式)：

$$v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0$$

将上式代进(7.152.3)式中，消去 ρ 本身及其偏导数，给出：

$$(a^2 - v_x^2)\frac{\partial v_x}{\partial x} - v_x v_y\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + (a^2 - v_y^2)\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{7.153}$$

又鉴于流动无旋，故有

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0 \tag{7.154}$$

将上式代进(7.153)式中，给出：

$$(a^2 - v_x^2)\frac{\partial v_x}{\partial x} - 2v_x v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + (a^2 - v_y^2)\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

把该式两边同乘以 $\partial v_x/\partial x$，给出：

$$(a^2 - v_x^2)\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 - 2v_x v_y \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial v_y}{\partial x} + (a^2 - v_y^2)\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

而由(7.150)和(7.154)式可推出：

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial v_y}{\partial x} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 \tag{7.155}$$

把它代进前一式中，给出：

$$(a^2 - v_x^2)\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 - 2v_x v_y \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial v_y}{\partial x} + (a^2 - v_y^2)\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 = 0$$

这是一个“一元二次方程”可以求解出：

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{v_x v_y \pm a\sqrt{v^2 - a^2}}{a^2 - v_y^2} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \tag{7.156}$$

利用上式和(7.155)式还可求出：

$$\frac{\partial v_y}{\partial y}=\frac{v_x v_y \pm a\sqrt{v^2-a^2}}{a^2-v_y^2}\cdot\frac{\partial v_x}{\partial y} \tag{7.157}$$

将(7.156)式两边乘以 dx，(7.157)式两边同乘以 dy，然后相加则给出：

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}dx+\frac{\partial v_y}{\partial y}dy=\frac{v_x v_y \pm \sqrt{v^2-a^2}}{a^2-v_y^2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}dx+\frac{\partial v_x}{\partial y}dy\right)$$

即有：

$$dv_y=\frac{v_x v_y \pm a\sqrt{v^2-a^2}}{a^2-v_y^2}dv_x$$

将上式改写成：

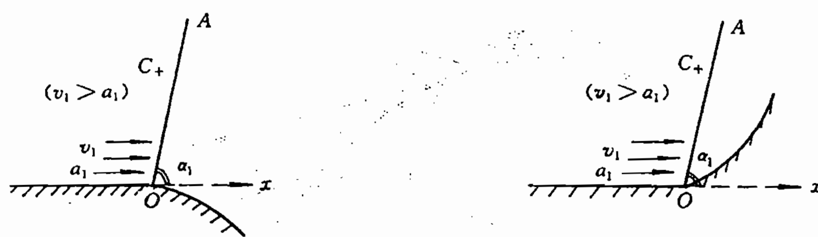
$$\frac{dv_y}{dv_x}=\frac{v_x v_y \pm a\sqrt{v^2-a^2}}{a^2-v_y^2}=-\frac{v_x^2-a^2}{v_x v_y \mp a\sqrt{v^2-a^2}} \tag{7.158}$$

该式与(7.141)式完全相同，但是(7.141)式只沿特征线成立，即一条特征线对应一条外摆线，特征线不同则外摆线亦不同；而(7.158)式是在整个流动区域上成立，即整个流动区只对应一条外摆线：Γ_+ 或 Γ_-[(7.158)式实际上是两个式子，但实际流动只能对应一种情况，所以只能取该式的一种情况]。

当然，亦会推出有一族特征线为直线。

7.15 平面定常等熵超音速均匀气流绕壁流动

设来流(oncoming flow)为沿平直固壁的均匀超音速定常流，如图 7.37 所示，固壁从 O 点开始弯曲。



(a) 绕凸壁流动(flow around a convex bend)　　(b) 绕凹壁流动(flow around a concave bend)

图 7.37 超音速气流绕固壁流动

由于固壁发生弯曲，故微扰动从 O 点开始，沿$\overline{OA}$这条特征线传播出去。$\overline{OA}$将流动分成两个区，在$\overline{OA}$以左为均匀流；而根据上一节的推论，在$\overline{OA}$以右为 P－M 气流。特征线$\overline{OA}$为直线，其斜率夹角 α_1 满足：

$$\sin\alpha_1=\frac{a_1}{v_1} \tag{7.159}$$

在$\overline{OA}$以右为简单波区，它在速度平面上对应着一条第二族外摆线，即在整个流动区域满足：

$$\beta=-\psi(\lambda)+\text{const}$$

按给定的边界条件，即当 $\lambda=\lambda_1=v_1/a_*$ 时

$$\beta = 0$$

于是得到：

$$\beta = -\psi(\lambda) + \psi(\lambda_1) \tag{7.160}$$

据(7.143.2)式或者将上式直接微商，则有

$$\mathrm{d}\beta = -\sqrt{\mathrm{M}^2 - 1}\,\frac{\mathrm{d}v}{v} \tag{7.161}$$

其中

$$\mathrm{M} = \frac{v}{a}$$

1. *曲壁为凸壁情形*

此时，沿固壁顺着气流前进的方向，流向角 β 减小，即 $\mathrm{d}\beta<0$，因此由(7.161)式可知：$\mathrm{d}v>0$，即顺着流动方向速度值增加，而压力、密度、温度、音速等皆减小，故气流是膨胀的，这个简单波区为膨胀的 P—M 气流。

简单波区的第一族特征线均为直线，它们与 x 轴的夹角 θ 为

$$\theta = \alpha + \beta, \quad \beta < 0$$

其中

$$\alpha = \arcsin\frac{a}{v}$$

随着 β 的减小，α 减小，从而 θ 也减小，由此可见第一族特征线是发散的，见图 7.38(a)。

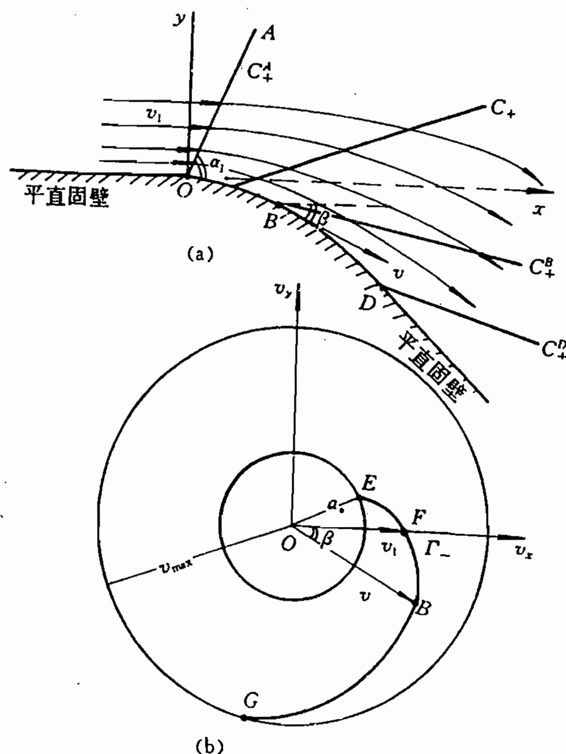


图 7.38　绕凸壁流动的简单波与图解

现在讨论超音速气流绕凸壁流动时的最大可能转折角。按现在的流动，β 为负角，流速越大则 β 越小（但 $|\beta|$ 越大）。

当 $\lambda=\lambda_{max}$时，

$$|\beta| = |\beta|_{max}$$

根据伯努利方程，得知：

$$v_{max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}a_*$$

于是推出：

$$\lambda_{max} = \frac{v_{max}}{a_*} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \tag{7.162}$$

将上式代进(7.160)式中则可求得最大可能的转角 $|\beta|_{max}$为

$$|\beta|_{max} = \psi(\lambda_{max}) - \psi(\lambda_1) \tag{7.163}$$

对于空气，$k=1.4$，按(7.163)式可求得：

$$|\beta|_{max} = 130°$$

来流绕固壁的转角 β 到底多大，由固壁的各点切线与 x 轴的夹角决定，$|\beta|$随着固壁的弯转角增大而增大，一旦固壁的弯转角大于 $|\beta|_{max}$时，则气流绕固壁的流动只能流到固壁弯转角等于 $|\beta|_{max}$的那点处，从此开始，气流将脱离固壁以 v_{max}数值、以 $|\beta|_{max}$角度直线射出，在这之后（即“射流”与其之后的固壁之间）为真空。

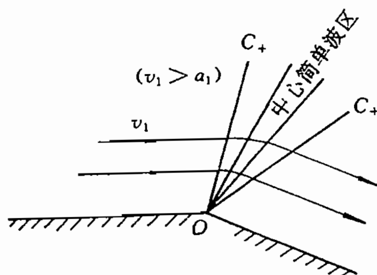


图 7.39 超音速气流绕平直折壁的膨胀流动

图 7.38(b)的 Γ_-线的$\overset{\frown}{EF}$段对应着图 7.40 的流动情形；Γ_-线的$\overset{\frown}{FBG}$对应着图 7.38(a)或图 7.39 的流动情形。

上面讨论的是光滑弯转的固壁。如果所考虑的固壁为平直折壁，如图 7.39 所示，则情况就不同了，这时所有的 C_+特征线都从 O 点发出，这样的简单波称作**中心简单波**。它实质上是图 7.38(a)的一种极限情况，即该图中的曲壁$\overset{\frown}{OD}$缩成一个点，于是从曲壁上所发出的特征线 $C_+^A, C_+^B, C_+^D, \cdots$的端点合在一起，即变成了这些直特征线 C_+都从转折点 O 发出。

2. 曲壁为凹壁情形

在这种情况下，气流绕曲壁的流向反时针旋转，即流向角 β 不断增加，$d\beta>0$. 根据(7.161)式可推出 $dv<0$，即沿固壁其速度值不断减小，故 p、ρ、T 增大。因此该气流为压缩气流。根据上节的推论，与均匀流邻接的连续流动区为简单波，所以图 7.40 所示的 OAB 区为压缩的 P—M 气流，在 OAB 区中下式成立：

$$\beta = -\psi(\lambda) + \psi(\lambda_1)$$

在这个简单压缩波区的第一族特征线是直线，它们呈收敛趋势，因而必定相交并形成包络线，如图 7.40 所示。包络线并不是冲击波，但包络线的起点（见图示的 A 点）却是激波的起点，从这个起点 A 形成激波。

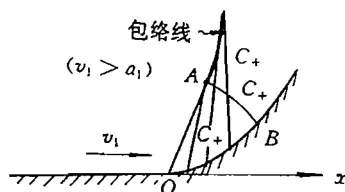


图 7.40　超音速气流绕凹壁流动

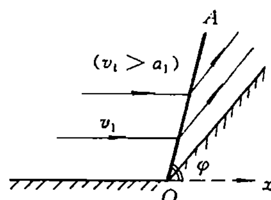


图 7.41　超音速气流绕平直折壁的压缩流动

从 A 向曲壁作一条第二族特征线交固壁于 B 点。则由$\widehat{AB}$、$\overline{OA}$和$\widehat{OB}$所围成的区为压缩的 P—M 气流；$\widehat{AB}$以上的区域则为一般流动区；当然$\overline{OA}$以左为均匀流区。

如果凹曲壁变成平直折壁，如图 7.41 所示。这时就相当于把图 7.40 所示的从曲壁上所发出的那些特征线 C_+叠合在一起，于是出现了冲击波。激波从 O 点开始，激波线$\widehat{OA}$的倾角 φ 可由斜激波关系式或冲击波极线来确定。

当然还有超音速喷管流动以及绕机翼的超音速流等重要的二维超音流动问题，关于喷管射流将在下节研究，而机翼绕流，因与爆炸问题关系不大，从略。

二　具体应用

7.16　平面喷管射流

作为定常平面等熵无旋超音速流动的一个典型例子——平面喷管射流(jets emitted from two-dimensional plane nozzle)，对于这个实际问题的描述较全面地体现了二维平面简单波的相互作用。

设从平面喷管中射出均匀定常超音速流，即速度 v_∞、压力 p_∞、密度 ρ_∞为常数

$$v_\infty=\text{const},\quad p_\infty=\text{const},\quad \rho_\infty=\text{const},\quad v_\infty>a_\infty,\quad a_\infty^2=\frac{kp_\infty}{\rho_\infty}=\text{const}$$

在此条件下来流当然是等熵无旋的。喷管外为静止的空气，压力 p_0=const.

7.16.1　$p_\infty>p_0$ 的情况

由于喷管内的压力大于喷管外部的压力，所以出流被连续地稀疏，这个稀疏气流与来流一样，亦是定常平面等熵无旋超音速流动，整个流动的图像如图 7.42 所示。

1. 流动的各个分区

① ADA_1 区和 BDB_1 区——为中心简单波区(centered simple waves)。这是因为这两个区邻接均匀区 ADB，且 A 点和 B 点为折壁拐角，气流在此突然被稀疏。

② AA_1E 区和 BB_1F 区——为均匀流(constant flows)。这是因为与简单波以一条直特征线邻接的连续流动区，要么为简单波，要么为均匀流。现已知这两个区压力 $p_\Delta=p_0=$const，故为均匀流。

在这两个区中速度值 v_Δ、密度 ρ_Δ 可以利用在全流场均成立的伯努利方程和等熵方程来确定，即由如下方程组可以求得。

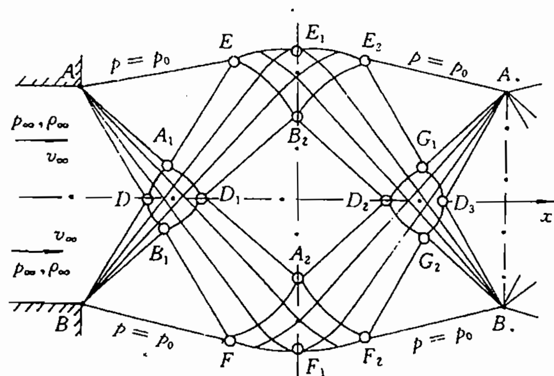


图 7.42

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{v_\Delta^2}{2}+\frac{kp_\Delta}{(k-1)\rho_\Delta}=\frac{v_\infty^2}{2}+\frac{kp_\infty}{(k-1)\rho_\infty}\\
&p_\Delta/\rho_\Delta^k=p_\infty/\rho_\infty^k\\
&p_\Delta=p_0
\end{aligned}\right\}\tag{7.164}
$$

③ $DA_1D_1B_1$ 区——为相互作用(interaction region)，即一般流动区。

④ $A_1D_1B_2E$ 区和 $B_1D_1A_2F$ 区——为简单波区。

⑤ $D_1B_2D_2A_2$ 区——为均匀流。

⑥ $EB_2E_2E_1$ 区和 $FA_2F_2F_1$ 区——为一般流动区(general flow regions)。

沿这两个区与空气接壤的边界，亦即沿整个自由边 $AEE_1E_2A_*$……线和 $BFF_1F_2B_*$……线，压力为常值，其速度值和密度亦为常数，它们由(7.164)式决定，即有

$$p=p_0=p_\Delta、\quad v=v_\Delta、\quad \rho=\rho_\Delta \tag{7.165}$$

⑦$B_2D_2G_1E_2$ 区和 $A_2D_2G_2F_2$ 区——为简单波区。

⑧$E_2G_1A_*$区和 $F_2G_2B_*$区——为均匀流区。

⑨$D_2G_1D_3G_2$ 区——为一般流动区。

⑩$G_1D_3A_*$区和 $G_2D_3B_*$区——为简单波区。

在$\overline{A_*B_*}$之后的流动各区，将重复如上所述各区的流动。

2. 图解各个流动区

由于现在的流动是定常平面等熵无旋超音速流，所以流动在速度平面上对应着若干条外摆线，如图 7.43 所示，即可以利用外摆线求解。在图中：

$$
\left.\begin{aligned}
&\overline{OM_1}=v_\infty\\
&v_{\max}^2=v_\infty^2+\frac{2k}{k-1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\\
&a_*^2=\frac{k-1}{k+1}v_\infty^2+\frac{2k}{k+1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}
\end{aligned}\right\}\tag{7.166}
$$

图 7.43 中各外摆线与图 7.42 中各流动区的对应关系为：

$\overset{\frown}{M_1N_1}\to ADA_1$ 简单波区

$\overset{\frown}{M_1N_2} \to BDB_1$ 简单波区

N_1 点$\to AA_1E$ 均匀流区

N_2 点$\to BB_1F$ 均匀流区

$\overset{\frown}{N_1M_2} \to A_1EB_2D_1$ 简单波区

$\overset{\frown}{N_2M_2} \to B_1FA_2D_1$ 简单波区

$M_1N_1M_2N_2$ 区$\to DA_1D_1B_1$ 一般流动区

M_2 点$\to D_1B_2D_2A_2$ 均匀流区

Q 点$\to E_1$ 点和 F_1 点上的速度

N_1M_2Q 区$\to EB_2E_1$ 一般流动区

N_2M_2Q 区$\to FA_2F_1$ 一般流动区

在图 7.42 中以$\overline{E_1F_1}$线为对称的右边各区的流动与图 7.43 的对应，完全重复如上所述，不过在找对应关系时，要注意流动的方向，以便找到准确的对应。

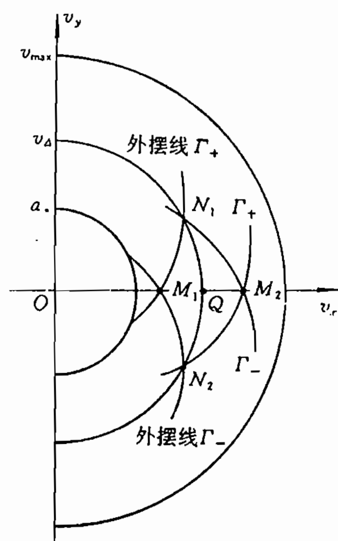


图 7.43

图 7.42 给出的流动波形图像(wave pattern)是一种理想化了的流动，假定了从 A、B 两点发出的中心简单波在自由面上反射后又会聚成点 A_* 和点 B_*，从而形成周期性波系图。这种情况的出现只有在差值($P_\infty - P_0$)较小时近似成立。然而，实际上这两个在自由面被反射的中心波不等达到 A_*点和 B_*点就聚合了，而形成了冲击波，如图 7.44 所示。

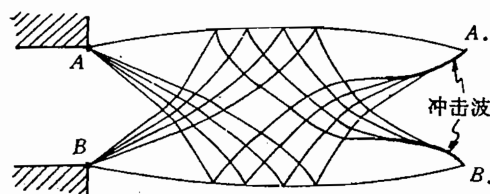


图 7.44

同时还应注意到，由于实际流动存在着粘性，尤其在射流与空气的分界面上，这个分界面实际上是个涡旋层(vortex layer)，该层沿流动方向逐渐变厚，最后可能将射流完全湮没。

7.16.2 $P_\infty < P_0$ 的情况

在喷管内的压力小于外部压力的情况下，则射流一出口就要形成冲击波而不是稀疏波，图 7.45 给出了这种出流的实际流动图像。当然该射流的喷口稍有扩张并非平直，不过它与图 7.42 所示平直喷口将产生的流动图像基本相当。

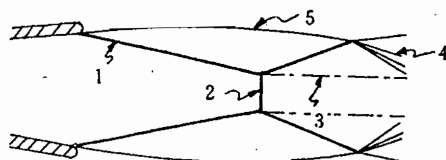


图 7.45

1—激波，2—马赫激波，3—接触间断

4—稀疏波，5—射流边界

7.17 超、亚音速流动与碰撞射流的产生

关于药型罩压垮或复板与基板碰撞(或者是两股真正流体的碰撞)所产生射流的大小与流速等，我们在上一章已经按不可压缩流体模型、并将坐标系取在运动的碰撞点上——

从而将碰撞的金属板化成定常的“来流”，已做了很好的处理。对于远离碰撞点的区域是利用动量定理解决的(见§6.10)；对于在碰撞点附近是利用位势理论解决的(见§6.18)。——当然，这些理论处理的前提是碰撞有射流生成。

现仍在动坐标系中考虑，在动坐标系中这种定常“来流”能否产生射流，与碰撞点所产生的扰动的影响范围有关，即与这种定常来流是超音速还是亚音速有关。由于涉及到扰动与扰动的传播，即与波有关，所以再也不能将来流作为不压缩流体，而作为可压缩流体。

7.17.1　超音速流动与亚音速流动中扰动的影响范围

在§7.3中，曾描述过在静止气体中一个作直线匀速运动的微小物体(现将它以点 A 标记)所产生的扰动及扰动所影响的范围。现研究扰体 A 不动，气体在流动。

1. 来流为亚音速的情况

一均匀亚音速平行来流以速度 w_0(在此 w_0 小于音速 a)，从 x 轴的正向流向小微体 A(这相当于在图7.4中，把坐标系取在小微体上，而气体从 x 轴的负向流向扰体)。图7.46表示了流动与最先产生的扰动的传播范围，即表示出扰动边界的变化状况。

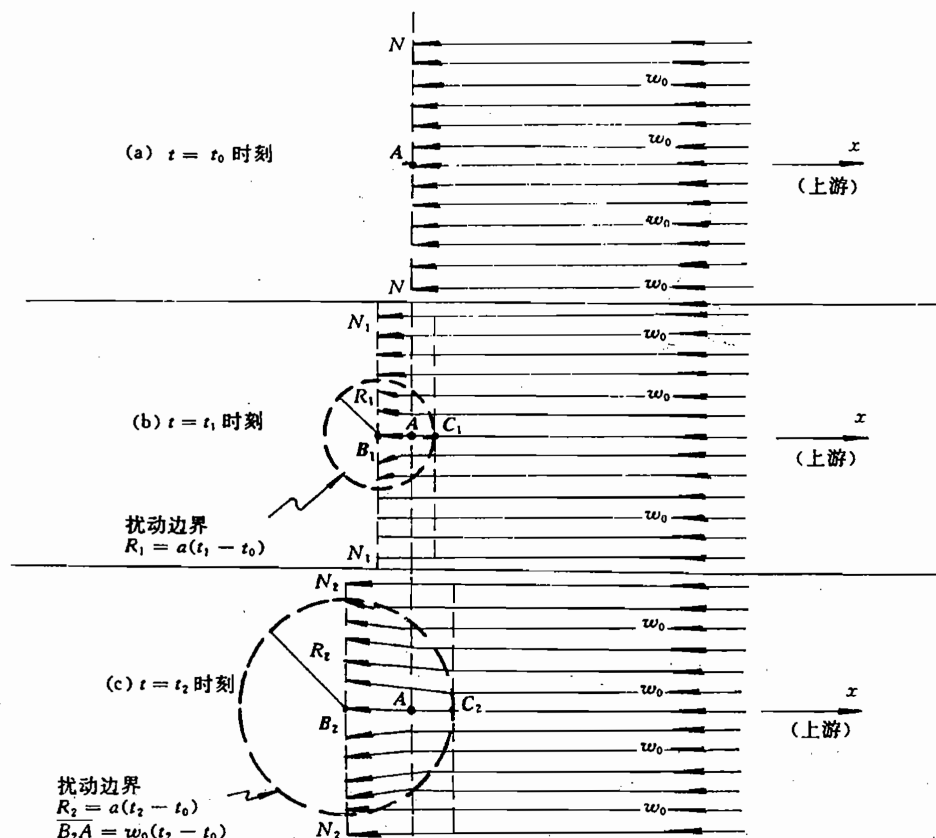


图7.46

在 $t=t_0$ 时刻来流到达 A 点，扰动亦从此产生，在气体动力学中，这种小扰动始终以音速 a 相对介质传播。到 $t=t_1$ 时刻，在 t_0 时所发出的那个扰动随气体流动已形成半径为

$R_1=a(t_1-t_0)$的圆，其圆心为 B_1，而圆心 B_1 距扰源的距离为 $B_1A=w_0(t_1-t_0)$，见图 7.46 (b)，由于 $w_0<a$ 所以 $R_1>\overline{B_1A}$，即初始扰动的边界超过扰体 A(当然，从 $t=t_0\to t=t_1$ 这期间各个时刻所发生的那些扰动亦超过 A)，随着时间的推移，扰动的波及范围越来越大，扰动将传至整个流场，而扰源 A 始终处于扰动的影响范围之内，即扰动一定波及到来流方向，换句话说，下游(lower reaches)的扰动影响上游(upper reaches)的流动，这是对于亚音速流动而言。

2. 来流为超音速的情况

一切条件如上，只是 $w_0>a$，扰源 A 在各个时刻所造成的扰动及扰动的影响范围如图 7.47 所示。

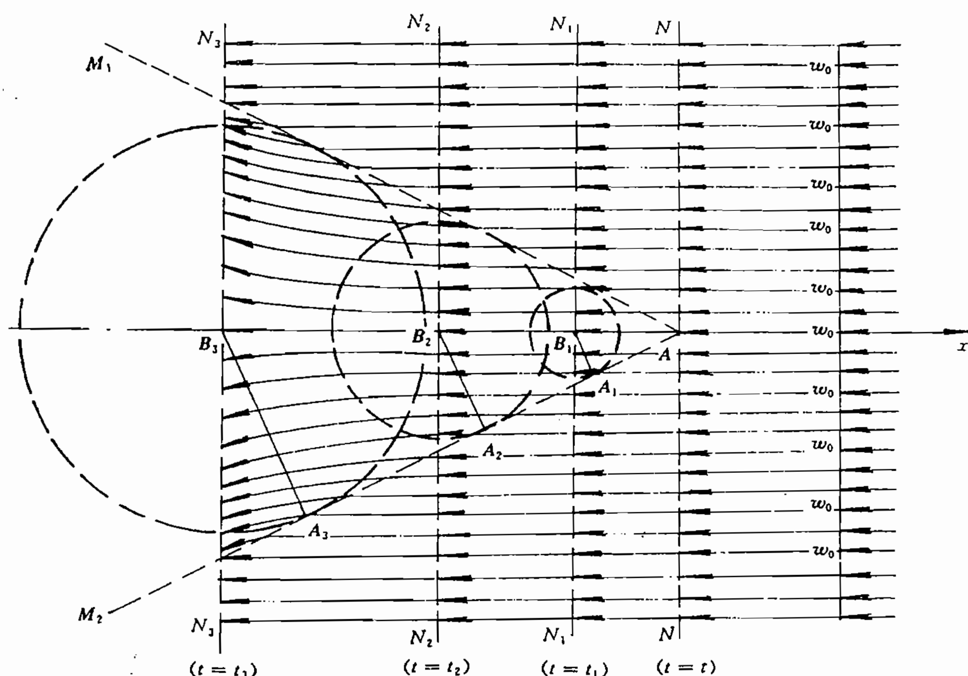


图 7.47

设现在的时刻为 t，在 t 之前各个时刻由扰源 A 所造成的扰动，现分别处在半径为 R_1、R_2、R_3、……的圆周上，其中 B_1、B_2、B_3、……为各个圆的圆心。

$R_1=a(t-t_1)$、 $R_2=a(t-t_2)$、 $R_3=a(t-t_3)$、……；$t>t_1>t_2>t_3>\cdots\cdots$；$\overline{AB_1}=w_0(t-t_1)$， $\overline{AB_2}=w_0(t-t_2)$， $\overline{AB_3}=w_0(t-t_3)$，……

在现在(t 时刻)之前的所有时刻、由 A 所造成的那些扰动圆，现已构成以 A 为顶点的圆锥，该圆锥的母线便是这些扰动圆的公切线，如图所示的$\overline{AM_1}$和$\overline{AM_2}$。扰动影响永远局限在这个圆锥之内，在圆锥之外不受干扰，流动如故仍为定常的平行均匀流，当然在扰源 A 之前的来流更不会受到扰动，这就是常说的超音流动下游的扰动不影响上游(来流方向)的流动。

如下以爆炸焊接中的复板斜碰撞基板为代表，研究碰撞所产生的射流问题，当然研究

的前提是：在碰撞点的碰撞压力已达到可能产生射流的条件。

7.17.2　**当作为来流的复板以亚音速冲向碰撞点时，射流能够产生**

在随碰撞点运动的坐标系中看，若复板以亚音速 w_0 冲向碰撞点 A，由于入射的来流为亚音速流动，则处于下游的碰撞点 A 处所产生的扰动必然逆流而上，影响 A 点之前的流动，从而改变碰撞之前的平行来流，于是造成部分反向的流动——射流，如图 7.48 所示。

7.17.3　**当作为来流的复板以超音速冲向碰撞点时，射流有条件产生**

复板来流沿 x 轴从负向冲向碰撞点 A，就相当超音速来流绕图 7.41 所示的凹折壁流动，由于超音速来流突然受阻，将产生激波。

1. 若在随碰撞点运动的坐标系中，复板来流满足如下条件

$$w_0 > a \quad , \quad \beta < \beta_c \ (\text{其中} \ \beta_c \ \text{为某个临界角度}) \tag{7.167}$$

由于碰撞角 β 较小，所以激波 $\mathscr{S}$ 即 $\overset{\frown}{AO}$ 线将从碰撞点 A 开始，如图 7.49 所示。由于激波出现在 A 点，所以激波 $\mathscr{S}$ 之前的来流不受干扰仍保持为平直流，直到碰撞点 A，当然就不会出现背向平直流方向的流动——射流啦。

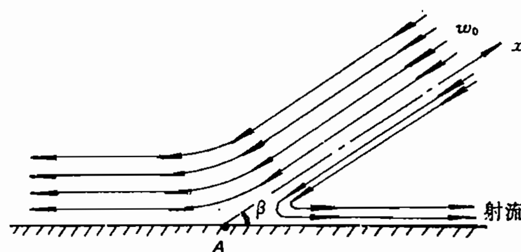


图 7.48

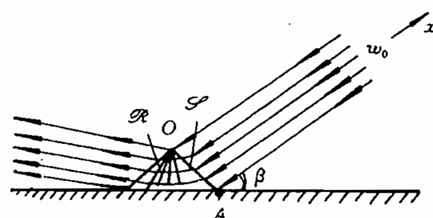


图 7.49

同时还应注意到，通过过 A 点的激波之后的流动。由于上下压差的作用，很可能在 O 点形成一个稀疏波 $\mathscr{R}$，使"流体"偏离固壁(基板)。

2. 若在随碰撞点运动的坐标系中，复板来流满足如下条件

$$w_0 > a, \quad \beta > \beta_c \tag{7.168}$$

这时由于来流受阻太大，使激波脱离碰撞点 A，而形成脱体激波，如图 7.50 所示的 $\mathscr{S}$，假定激波为垂直来流的驻激波(stationary shock wave，实际流动可以做这样的近似)，则通过激波之后的流动为亚音速流，于是成为亚音速气流斜撞固壁的情况，当然能够形成射流。

基于以上原因，在爆炸焊接中，一般不使复板来流为超音速。

关于复板的来流速度 w_0，参看 § 7.10；而音速 a 一般取复板的体声速，见第十二章 (12.331)式。

7.17.4　**临界角 β_c 的确定**

仍在动坐标系考虑，复板来流为超音速的，假定冲击波 $\mathscr{S}$ 正好出现在碰撞点 A，即图 7.51 所示的情形。但我们所以考虑的是 $\mathscr{S}$ 附近的流动，因而可假定 $\mathscr{S}$ 之后的流动平行刚壁，见图 7.51，设 $\mathscr{S}$ 与刚壁的夹角为 θ，在 $\mathscr{S}$ 之后的流速值为 w_*，并指定激波的法线指向激波之后。则 $\mathscr{S}$ 之前后的流速在垂直和平行激波阵面方向的分量 u_0、u_* 和 v_0、v_* 分

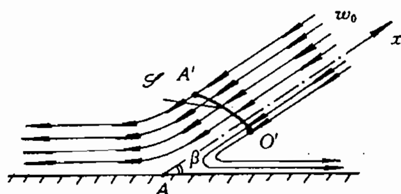


图 7.50

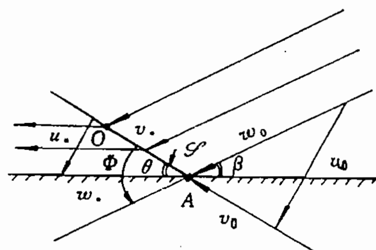


图 7.51 复板来流为 $w_0>a$，$\beta\leqslant\beta_c$ 的条件下，碰撞点附近的流动

别为

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= w_0\sin\Phi = w_0\sin(\beta+\theta) \\ v_0 &= w_0\cos\Phi = w_0\cos(\beta+\theta) \\ u_* &= w_*\sin\theta = w_*\sin(\Phi-\beta) \\ v_* &= w_*\cos\theta = w_*\cos(\Phi-\beta) \end{aligned}\right\} \tag{7.169}$$

其中

$$\Phi = \beta + \theta$$

在随碰撞点移动的坐标系下，激波是定常的，在激波阵面上的质量和动量守恒条件为

$$\left.\begin{aligned} u_0\rho_0 &= \rho_* u_* \\ \rho_0 u_0(u_0 - u_*) &= p_* - p_0 \\ \tau_0 + \rho_0 u_0 v_0 &= \tau_* + \rho_* u_* v_* \end{aligned}\right\} \tag{7.170}$$

由于不考虑粘性力 τ，且忽略来流在 $\mathscr{S}$ 之前的压力 p_0，即令

$$\tau_0 = \tau_* = p_0 = 0$$

则由(7.170)式推出

$$\left.\begin{aligned} \rho_0 u_0(u_0 - u_*) &= p_* \\ v_0 = v_* &\neq 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.171}$$

由(7.170)的第一式和(7.171)的第一式可以解出

$$u_0 = \frac{1}{\rho_0}\sqrt{p_*/(\frac{1}{\rho_0}-\frac{1}{\rho_*})} = \left[\frac{p_*(\xi+1)}{\rho_0\xi}\right]^{1/2} \tag{7.172}$$

$$u_* = \frac{1}{\rho_*}\sqrt{p_*/(\frac{1}{\rho_0}-\frac{1}{\rho_*})} = \left[\frac{p_*}{\rho_0\xi(1+\xi)}\right]^{1/2} \tag{7.173}$$

其中

$$\xi = \frac{\rho_* - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\rho_*}{\rho_0} - 1 \tag{7.174}$$

将(7.171)的第一式中的左边从左数第一个 u_0 用(7.172)式代替后，则给出

$$u_0 - u_* = \sqrt{p_*(\frac{1}{\rho_0}-\frac{1}{\rho_*})} = \left[\frac{p_*\xi}{\rho_0(1+\xi)}\right]^{1/2} \tag{7.175}$$

而根据(7.169)式和(7.171)式或据图 7.51 所示的几何关系，则有

$$\left.\begin{aligned} v_0 = v_* &= \sqrt{w_0^2 - u_0^2} \\ w_* &= \sqrt{u_*^2 + v_*^2} \end{aligned}\right\} \tag{7.176}$$

$$\tan\beta = \frac{(u_0 - u_*)v_0}{v_0^2 + u_0 u_*} \tag{7.177}$$

将式(7.172)、(7.173)、(7.175)和(7.176)的第一式代进上式中，则给出 β 作为 p_* 和 ξ 的函数：

$$\tan^2\beta = p_*\left[\rho_0 w_0^2\left(\frac{\xi}{\xi+1}\right) - p_*\right] / [\rho_0 w_0^2 - p_*]^2 \tag{7.178}$$

如下求 p_* 与 ξ 或 ρ_* 的关系。在如上的推导中只考虑穿过激波的质量守恒和动量守恒，没有考虑能量守恒和状态方程，现用由实验给出的关于冲击压缩规律来代替这两个方程，即有

$$p_* = \rho_0 U(u_* - u_0), \quad U = g + h(u_* - u_0) \tag{7.179}$$

其中 g 和 h 是材料常数。由以上两式推出

$$p_* = \rho_0[g + h(u_* - u_0)](u_* - u_0) \tag{7.180}$$

将式(7.175)代进上式中则给出

$$p_* = \frac{\rho_0 g^2 \xi(1+\xi)}{[(1+\xi) - h\xi]^2} \tag{7.181}$$

将上式代进(7.178)式中，则导出 β 作为 ξ 的函数，然而这个函数太繁琐，故只将(7.178)式与(7.181)式联立考虑。

所谓临界角 β_c，就是在超音速来流的速度 w_0 一定的条件下，流动可以保持图 7.51 所示的那样形式的那些来流中入射角 β(碰撞角)取最大值者，即 $\beta_c = \beta_{max}$. 现求这个极大值，在(7.178)式中令 w_0 不变，而据(7.181)式，p_* 又作为 ξ 的函数，于是对(7.178)式对 ξ 微分并令其导数为零，则推出

$$\frac{dp_*}{d\xi} = \frac{p_*(p_* - \rho_0 w_0^2)}{(\xi+1)[\rho_0 w_0^2 \xi - p_*(\xi+2)]} \tag{7.182}$$

根据(7.181)式所给出的 p_* 与 ξ 的关系，便可由上式求得 ξ，将此 ξ 值代进(7.178)式中所求得临界角 β_c.

7.18 正激波在固壁上的反射

现在研究一个简单且经常有用的情况——在静止气体中传播的平面冲击波在固壁(刚壁 rigid wall)上的反射情况，波阵面与壁平行，如图 7.52 所示；图 7.53 表示在 (x,t) 平面上的入射与反射情况。

激波前后的物理量如图所示。假定气体是多方气体，比内能为

$$e = \frac{1}{k-1}\frac{p}{\rho}$$

7.18.1 导出反射激波后的压力表达式

这是一个复杂、冗长且含有许多技巧的推演过程。

1. 在入射冲击波的前后物理量满足(据(7.61.3)式)

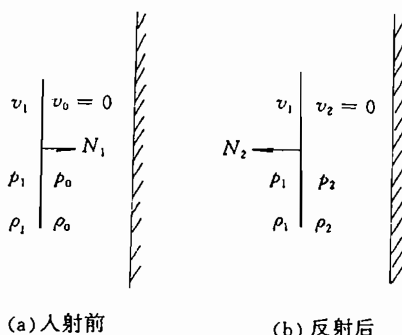


图 7.52

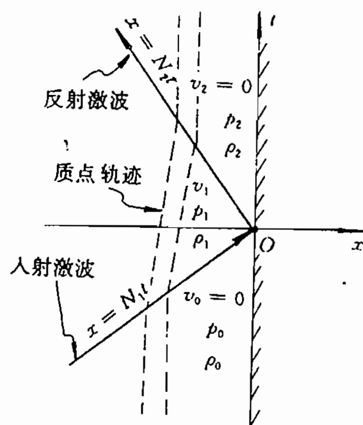


图 7.53

$$
\left.\begin{array}{l}
\rho_0(N_1-v_0)=\rho_1(N_1-v_1) \\
p_0+\rho_0(N_1-v_0)^2=p_1+\rho_1(N_1-v_1)^2 \\
\dfrac{(N_1-v_0)^2}{2}+\dfrac{kp_0}{(k-1)\rho_0}=\dfrac{(N_1-v_1)^2}{2}+\dfrac{kp_1}{(k-1)\rho_1} \\
v_0=0
\end{array}\right\} \tag{7.183}
$$

令

$$
N_1-v_0=U_0,\quad N_1-v_1=U_1,\quad \frac{kp_1}{\rho_1}=a_1^2
$$

则由(7.183)式推出如下关系式

$$
\rho_0U_0=\rho_1U_1
$$

$$
U_0U_1=\frac{P_0-p_1}{\rho_0-\rho_1}
$$

上式的得出可参见(7.61.6)式(相当于在(7.61.6)中令 $p_+=p_0,p_-=p_1,\rho_+=\rho_0,\rho_-=\rho_1$, $U_+=U_0,U_-=U_1$)。由如上式中消去 U_0,则推出

$$
\frac{\rho_1}{\rho_0}=1-\frac{p_0-p_1}{\rho_1U_1^2} \tag{7.184}
$$

由(7.183)式还可推出(参见(7.63.2)式)

$$
\frac{\rho_1}{\rho_0}=\frac{(k+1)p_1+(k-1)p_0}{(k+1)p_0+(k-1)p_1} \tag{7.185}
$$

由(7.184)和(7.185)式得到(消去 ρ_1/ρ_0)

$$
\frac{p_0}{p_1}+\frac{k-1}{k+1}=\frac{2}{k+1}\frac{\rho_1U_1^2}{p_1}=\frac{2k}{k+1}\frac{U_1^2}{a_1^2} \tag{7.186}
$$

由(7.183)式还可推出

$$
U_1^2+\frac{k+1}{2}v_1U_1-a_1^2=0 \tag{7.187}
$$

参见(7.61.14)式(即相当在那式中令 $v_+=v_0=0$、$v_-=v_1$、$a_-=a_1$、$N-v_-=U_1$)。

2. 在反射冲击波的前后物理量满足

$$\left.\begin{aligned}&\rho_1(N_2+v_1)=\rho_2(N_2+v_2)\\&p_1+\rho_1(N_2+v_1)^2=p_2+\rho_2(N_2+v_2)^2\\&\frac{(N_2+v_1)^2}{2}+\frac{kp_1}{(k-1)\rho_1}=\frac{(N_2+v_2)^2}{2}+\frac{kp_2}{(k-1)\rho_2}\\&v_2=0\end{aligned}\right\}\tag{7.188}$$

令

$$N_2+v_1=U_2,\quad N_2+v_2=U_3,\quad \frac{kp_1}{\rho_1}=a_1^2$$

则由(7.188)式推

$$\rho_1U_2=\rho_2U_3$$

$$U_2U_3=\frac{p_1-p_2}{\rho_1-\rho_2}$$

参见(7.61.6)式(相当于在该式中令 $p_+=p_1,p_-=p_2,\rho_+=\rho_1,\rho_-=\rho_2,U_+=U_2,U_-=U_3$),由如上两式中消去 U_3,则给出

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=1+\frac{p_1-p_2}{\rho_1U_2^2}\tag{7.189}$$

由(7.188)式还可给出

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{(k+1)p_1+(k-1)p_2}{(k+1)p_2+(k-1)p_1}\tag{7.190}$$

由(7.190)式和(7.189)式得到

$$\frac{p_2}{p_1}+\frac{k-1}{k+1}=\frac{2}{k+1}\frac{\rho_1U_2^2}{p_1}=\frac{2k}{k+1}\frac{U_2^2}{a_1^2}\tag{7.191}$$

由(7.188)式还可推出

$$U_2^2+\frac{k+1}{2}v_1U_2-a_1^2=0\tag{7.192}$$

参见(7.61.13)式(相当于在该式中令 $v_+=v_1,v_-=v_2=0,a_+=a_1,N-v_+=U_2$)。

3. 式(7.187)和(7.192)可以写成一个统一形式的方程如下

$$U^2+\frac{k+1}{2}v_1U-a_1^2=0\tag{7.193}$$

这是 U 的一元二次方程,它有且至多有两个根,而这两个根又应满足式(7.187)和式(7.192),所以满足(7.187)式的一个根 U_1 和满足(7.192)式的一个根 U_2、就是方程(7.193)的两个根。根据一元二次方程根与系数的关系,则有

$$U_1U_2=-a_1^2\tag{7.194}$$

4. 将式(7.186)与式(7.191)相乘并利用上式,则得到所要求的反射压力与入射压力的最终关系式

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{(3k-1)p_1-(k-1)p_0}{(k+1)p_0+(k-1)p_1}\tag{7.195}$$

由上式又可给出另一种形式的重要关系。上式可以化成

$$p_2[(k+1)p_0+(k-1)p_1]=p_1[(3k-1)p_1-(k-1)p_0]$$

两边同时减去 $p_0[(k+1)p_0+(k-1)p_1]$，则给出

$$[(k+1)p_0+(k-1)p_1](p_2-p_0)=[(3k-1)p_1+(k+1)p_0](p_1-p_0)$$

从而得到

$$\begin{aligned}\frac{p_2-p_0}{p_1-p_0}&=\frac{(3k-1)p_1+(k+1)p_0}{(k+1)p_0+(k-1)p_1}\\&=1+\frac{2k}{(k+1)\dfrac{p_0}{p_1}+(k-1)}\end{aligned}\tag{7.196}$$

5. 对于入射的强激波，即 $p_0/p_1 \ll 1$ 情形，从上式可以推出如下结果

$$\frac{p_2-p_0}{p_1-p_0}\approx 2+\frac{k+1}{k-1}=\begin{cases}8 & ,当\ k=1.4\ 时\\13 & ,当\ k=1.2\ 时\\23 & ,当\ k=1.1\ 时\end{cases}\tag{7.197}$$

因此强激波在固壁上反射，压力增加很大，同时 k 值越小 p_2 越大，这是个重要事实。

6. 对于弱冲击波：即 $p_1/p_0-1 \ll 1$ 情形，则由(7.196)式推得

$$\frac{p_2-p_0}{p_1-p_0}\approx 2\tag{7.198}$$

这同声波反射的情况一致，声波在固壁反射后，压力相对幅值增加一倍。

7.18.2 关于入射、反射的正激波的其他重要关系式

由于(7.183)式和(7.188)式可以求得：

$$\left.\begin{aligned}\frac{p_1}{p_0}&=\frac{(k+1)\rho_1-(k-1)\rho_0}{(k+1)\rho_0-(k-1)\rho_1}\\\frac{p_2}{p_1}&=\frac{(k+1)\rho_2-(k-1)\rho_1}{(k+1)\rho_1-(k-1)\rho_2}\\N_2&=\frac{k-3}{4}v_1+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{k+1}{2}\right)^2v_1^2+4a_1^2}\end{aligned}\right\}\tag{7.199}$$

7.18.3 关于在空气中传播的正冲击波的数据查表

在空气中传播的正冲击波很重要，它有着重要的实际用途。在许多实际应用中，波阵面上物理量的计算，可以查现成的表，这样的图表很多，本章附录 7.2 给出了一个表。在该表中(绝热指数 $k=1.4$)：

$$\left.\begin{aligned}M_+&=\frac{N-v_+}{a_+}\quad ,a_+^2=\frac{kp_+}{\rho_+}\\M_-&=\frac{N-v_-}{a_-}\quad ,a_-^2=\frac{kp_-}{\rho_-}\end{aligned}\right\}\tag{7.200}$$

下标"+"表示波前的量，"－"表示波后的量。

7.19 两波相互作用的一般分析

前面我们运用基本理论，对一维、二维流动中的某些问题做了研究。从本节开始，我们对在爆炸与冲击中非常重要的一维不定常流动中波的相互作用进行分析与研究，着重于

一维冲击波。

在气体开始运动时，如若其状态比较简单，则对其之后的运动可以视作一系列的波相互作用的结果，即看做是一些稀疏波（rarefaction waves）、压缩波（compression wares）、冲击波（shock waves）以及分界面（interface）之间的相互作用（interaction）。

例如在一个一维刚性管中，活塞（piston）以恒速 v_p 推压管中原静止气体，则在气体中产生一个冲击波，如图 7.54 所示。该活塞到 $t=t_0$ 时刻又突然以恒速后撤，于是在 A 点又产生一个中心稀疏波（centred simple rarefaction waves），当稀疏波追上激波后发生相互作用，使激波减速、强度变弱，这就是波相互作用的简单一例。

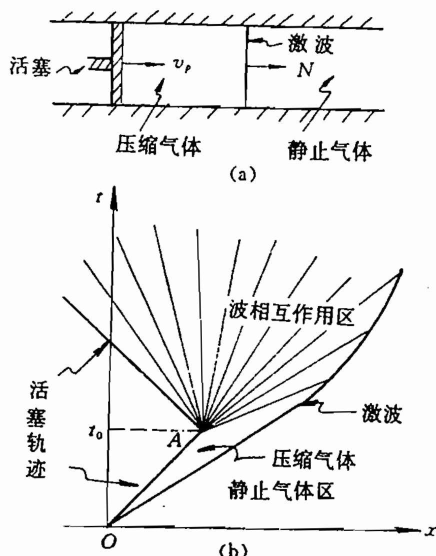


图 7.54

7.19.1 关于同向传播的两波能否相遇

两波能否发生相互作用的先决条件是两波能够相遇。对于迎面（head-on）传播的两波相遇是必然的，然而对于同向传播的两个波能否追上（overtaking），则视情况而定。

1. 冲击波追赶冲击波

图 7.55 表示出两个右传冲击波，$\vec{S}_2$ 追赶 $\vec{S}_1$，由于 $\vec{S}_2$ 相对它前面的介质，即相对①区的介质是以超音速传播（supersonic propagation）的，即传播速度 $U_2>a_1$，而 $\vec{S}_1$ 相对它后面的介质即相对①区的介质是以亚音速传播（subsonic propagation）的，即 $U_1<a_1$（见 § 7.8 中的论述），由此推出

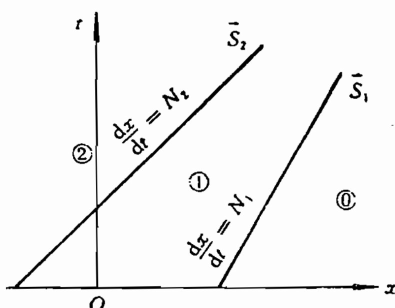


图 7.55

$$N_2=U_2+v_1>a_1+v_1>U_1+v_1=N_1$$

即 $\vec{S}_2$ 的运动速度 N_2 大于 $\vec{S}_1$ 的运动速度 N_1，所以 $\vec{S}_2$ 终将追上 $\vec{S}_1$。

2. 冲击波追赶稀疏波

右传的冲击波 $\vec{S}$ 追赶右传的稀疏波 $\vec{R}$，如图 7.56 所示。由于 $\vec{S}$ 相对它前面介质的传播是超音速度的，从而 $\vec{S}$ 的斜率 $\frac{dx}{dt}=N=U+v_2>a_2+v_2$；而稀疏波 $\vec{R}$ 相对介质以音速传播，$\vec{R}$ 的波尾 AB 的斜率 $\frac{dx}{dt}=v_2+a_2$，所以 $\vec{S}$ 必将追上 $\vec{R}$。

3. 稀疏波追赶冲击波

右传稀疏波 $\vec{R}$ 追赶右传冲击波 $\vec{S}$，如图 7.57 所示，$\vec{S}$ 相对它之后的介质是以亚音速传播，即 $\vec{S}$ 的斜率 $\frac{dx}{dt}=N=U+v_1<a_1+v_1$，而 $\vec{R}$ 的波头 AB 的斜率 $\frac{dx}{dt}=v_1+a_1$，所以 $\vec{R}$ 终将追上 $\vec{S}$。

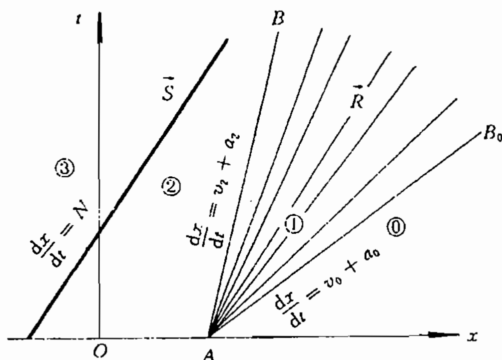


图 7.56

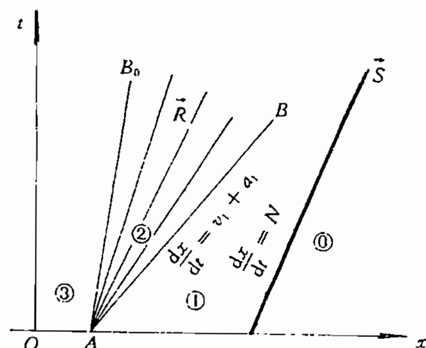


图 7.57

4. 稀疏波追赶稀疏波

右传稀疏波 $\vec{R}_2$ 追赶右传稀疏波 $\vec{R}_1$，如图 7.58 所示。由于 $\vec{R}_2$ 的波头 A_2B_2 的斜率$\frac{dx}{dt}|_2$ 等于 $\vec{R}_1$ 的波尾 A_1B_1 的斜率$\frac{dx}{dt}|_1$，即

$$\frac{dx}{dt}|_2=v_2+a_2=\frac{dx}{dt}|_1$$

所以 $\vec{R}_2$ 永远追不上 $\vec{R}_1$.

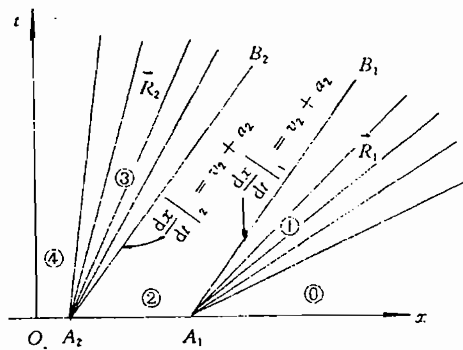


图 7.58

总之，同向传播的两个冲击波必将追上发生作用；同向传播的一个冲击波和一个稀疏波，二者亦终将追上发生作用。从这一事实可以导出这样一个结论：在气体动力学的范围内，不可能在同一时刻在同一点上产生两个同向传播的冲击波，或者是同向传播的一个稀疏波与一个激波(注意，这一结论并不普遍适用，如在动载固体中常见的双波结构就有悖这一论断)。

7.19.2 冲击波上的 v 与 p 的关系曲线、稀疏波区成立的 v 与 p 的关系曲线

1. 对于冲击波的"v 与 p 曲线"

现在研究的是垂直 x 轴的平面冲击波。在这个一维空间中，不管冲击波向前(即右向传播)，还是向后(即左向传播)，在冲击波两边总有

$$v_{右}<v_{左} \tag{7.201}$$

现在研究冲击绝热曲线。在 § 7.7 中我们已经研究了对于多方气的 V 与 p 关系曲线，现研究在冲击波阵面的一般形式的 v 与 p 关系曲线，据(7.61.2)式有

$$\left.\begin{aligned}v_b-v_d&=\pm\sqrt{(V_d-V_b)(p_b-p_d)}\\e_b-e_d&=\frac{1}{2}(p_b+p_d)(V_d-V_b)\end{aligned}\right\} \tag{7.202}$$

在上式中下标"d"表示"已知状态"(该状态可能是激波前亦可能是激波后)，下标"b"表示待求的另一状态。同时还要注意到上式的第一式与(7.61.2)的第二式形式上之差别，在那里规定激波传播方向为正向，故恒有 $v_- > v_+$，而现在规定朝 x 轴正向为正，恒有(7.201)式成立，不过二者并不矛盾。

已知比内能 e 作为 V 和 p 的函数，即

$$e_d = e(V_d, p_d) \quad , \quad e_b = e(V_b, p_b) \tag{7.203}$$

上式与(7.202)的第二式联立可解出 V_b 作为 p_b、p_d、V_d 的函数：

$$V_b = f(p_b, p_d, V_d)\text{，或写成 } V_b = f(p_b) \tag{7.204}$$

利用上式可将(7.202)的第一式写成

$$V_b = v_d \pm \phi(p_b) \tag{7.205}$$

其中

$$\phi(p_b) = \sqrt{(V_d - f(p_b, p_d, V_d))(p_b - p_d)} \tag{7.206}$$

式(7.205)就是所要求的激波阵面上的 v 与 p 关系曲线，亦即另一种形式的冲击绝热曲线。

函数 $\phi(p_b)$ 是 p_b 的单调递增函数，因它对 p_b 求导大于零。具体推导如下(在以下分析论述中为了方便略写下标"b")：

$$\phi'(p) = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{V_d - V}{p - p_d}} - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}\sqrt{\frac{p - p_d}{V_d - V}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{V_d - V}{p - p_d}}\left\{1 - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}\frac{p - p_d}{V_d - V}\right\} > 0$$

这是由于 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} < 0$，$\dfrac{p - p_d}{V_d - V} > 0$，故推出 $\phi'(p) > 0$。

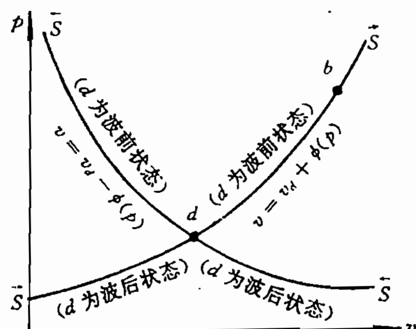


图 7.59

式(7.205)取正号，即为 $v = v_d + \phi(p)$，若状态(d)为激波之前状态，则该曲线代表向前冲击波，向前冲击波以符号 $\vec{S}$ 表示，见图7.59所示，故所述曲线为以 d 为界的 $\vec{S}$ 上半支，状态(d)在波的右边；$\vec{S}$ 的下半支则表示状态(d)在波之后且在波的左边的右传冲击波。

式(7.205)取负号，即 $v = v_d - \phi(p)$，若状态(d)为激波之前状态，则该曲线代表向后冲击波，向后冲击波以符号 $\overleftarrow{S}$ 表示，见图示，故所述曲线为以 d 为界的 $\overleftarrow{S}$ 的上半支，状态(d)在波的左边；$\overleftarrow{S}$ 的下半支则表示状态(d)在波之后且在波的右边的左传冲击波。

2. 对于稀疏波的"v 与 p 曲线"

在§7.11中我们定义了简单波。对于一般情况下的一维不定常流动的简单波，可定义做在整个波区

$$
\left.\begin{aligned}
v-\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho a}&\equiv\text{const}:\text{为正向(向前)简单波}\\
v+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho a}&\equiv\text{const}:\text{为负向(向后)简单波}
\end{aligned}\right\}\tag{7.207}
$$

参见(7.114)式,它们是(7.108)式的积分,不过在那里考虑的是多方气体等熵流动,即

$$
\left.\begin{aligned}
&p=g(V,S)=g(V,S_d)=AV^{-k}=A\rho^k\\
&S=S_d\equiv\text{const}\quad,A=A(S)=A(S_d)\equiv\text{const}
\end{aligned}\right\}\tag{7.208}
$$

其中熵 S_d 是与简单波相邻区域边界上(亦即波区边界上)的熵,在这个边界上

$$
v=v_d,\quad p=p_d,\quad \rho=\rho_d,\quad V=V_d,\quad a=a_d.
$$

现在研究一般情况下的简单波,流动当然等熵,但先不指定 $g(V,S)$ 的具体函数形式,即为

$$
\left.\begin{aligned}
&\rho=\rho(p,S_d)\quad,V=g(p,S_d)\quad,\text{或写成 } V=g(p)\\
&a=a(p,S_d)\quad,\mathrm{d}g/\mathrm{d}p=-1/(\rho^2a^2)
\end{aligned}\right\}\tag{7.209}
$$

在此等熵的情况下,再从连续性方程和运动方程,便可推出式(7.108)所示的特征线和式(7.207)所示的关系式。现将式(7.207)改写成

$$
v_b=v_d\pm\psi(p_b)\tag{7.210}
$$

其中

$$
\psi(p)=\int_{p_d}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{\rho(p,S_d)a(p,S_d)}\tag{7.211}
$$

上式中下标"b"表示在波区中的状态量。式(7.210)便是所要求的在简单波区的 v 与 p 的关系曲线,式中取正号对应向前简单波;取负号对应向后简单波。

现在我们再进一步假定所研究的简单波为稀疏波,即在波区

$$
\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}<0
$$

于是根据连续性方程(见(7.97)式),在整个稀疏波区(不管是向前还是向后)总有

$$
\frac{\partial v}{\partial x}>0,\quad \text{即有}:v_{右}>v_{左}\tag{7.212}
$$

如果是向前稀疏波,则有(参见(7.125.2)式)

$$
\frac{\partial a}{\partial x}>0,\quad \text{即有}:\frac{\partial p}{\partial x}>0,\text{从而有}:p_{右}>p_{左}\tag{7.213}
$$

如果是向后稀疏波,则有(参见(7.125.3)式)

$$
\frac{\partial a}{\partial x}<0,\quad \text{即有}:\frac{\partial p}{\partial x}<0,\text{从而有}:p_{右}<p_{左}\tag{7.214}
$$

描述稀疏波的 v 与 p 之间的关系式(7.210),在(v,p)平面同冲击波情形一样亦对应两条曲线,如图 7.60 所示,其中式 $v=v_d+\psi(p)$(在此略去下标"b")表示向前稀疏波,以符号 $\vec{R}$表示;式 $v=v_d-\psi(p)$表示向后稀疏波,以符号 $\overleftarrow{R}$表示。

现在明确一下我们的规定:对于一维流动而言,在稀疏波头上压力大;在稀疏波尾上压力小。

图 7.60 所示的对于稀疏波的 v 与 p 关系曲线,分成四段,其中每个分支都对应一定

方向的稀疏波，如对于 $v=v_d+\psi(p)$ 的下半支，在该段曲线上的任一点 b 上速度为 v_b，由于：$v_b<v_d$，依据式(7.212)，则状态 d 在右边而状态 b 在左边；又因 $p_d>p_b$ 即 $p_右>p_左$，所以该分支对应向前稀疏波；状态 d 处在波头上，状态 b 处在波尾方向。

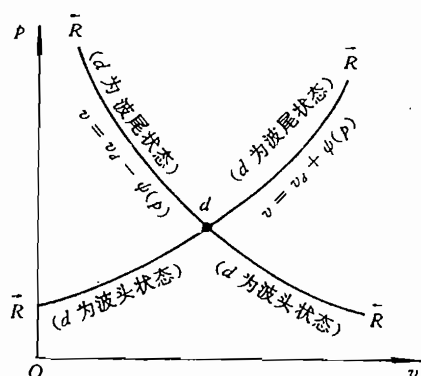


图 7.60

3. 在(v,p)平面上两种曲线的关系

在(v,p)平面上，若将表示同向传播的“冲击波的 v 与 p 间关系曲线的上(或下)半支”与“稀疏波的 v 与 p 间关系曲线的下(或上)半支”在一点如在 d 点相接起来，则连接之后的这条曲线在 d 点二级光滑，即二级密接。

如 $\vec{S}$的上半支与 $\vec{R}$的下半支在 d 点相接成为一条曲线，如图 7.61 所示。

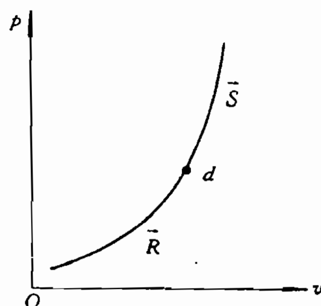


图 7.61

①. 对于 $\vec{S}$，据(7.205)、(7.206)和(7.204)式，则有

$$\left.\begin{aligned} v &= v_d + \phi(p) \\ \phi(p) &= \sqrt{(V_d - V)(p - p_d)} \\ V &= f(p) \end{aligned}\right\} \quad (7.215)$$

对 v 求一阶和二阶导数，有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p} = \phi'(p) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{V_d - V}{p - p_d}} - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}\sqrt{\frac{p - p_d}{V_d - V}}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{V_d - V}{p - p_d}}\left[1 + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}\frac{p - p_d}{V - V_d}\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}p^2} = \phi''(p) = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{p - p_a}{V_d - V}}\left\{2\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}p^2} + \frac{1}{V_d - V}\left[\frac{V_d - V}{p - p_d} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}\right]^2\right\}$$

从如上两式看出，ϕ' 和 ϕ'' 在 d 点是“不存在的”，或者说是“不确定的”(为“$\frac{0}{0}$型”)，然而沿曲线趋于该点的极限存在，即有

$$\left.\begin{aligned} \lim_{p\to p_d}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p} &= \lim_{p\to p_d}\phi'(p) = \left(\sqrt{-\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}}\right)_{p=p_d} \\ \lim_{p\to p_d}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}p^2} &= \lim_{p\to p_d}\phi''(p) = -\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}p^2}\left(-\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]_{p=p_d} \end{aligned}\right\} \quad (7.216)$$

② 对于 $\vec{R}$，据(7.210)、(7.211)和(7.209)式，则有

$$\left.\begin{aligned} v &= v_d + \psi(p) \\ \psi(p) &= \int_{p_d}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{\rho a} = \int_{p_d}^{p}\sqrt{-\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p}}\mathrm{d}p \end{aligned}\right\} \quad (7.217)$$

对 v 求一阶和二阶导数，并取在 d 点取值，则有

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p}\right)_{p=p_d} &= \psi'(p_d) = \left(\sqrt{-\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p}}\right)_{p=p_d} \\ \left(\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}p^2}\right)_{p=p_d} &= \psi''(p_d) = -\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}p^2}\left(-\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]_{p=p_d}\end{aligned}\right\} \tag{7.218}$$

③ 在 § 7.7 中我们已经证明在(V,p)平面上冲击绝热曲线与等熵线在交点处二级密接。而(7.216)式中的函数 $V=f(p)$正是在(V,p)平面上的冲击绝热曲线(见(7.204)式)。(7.218)式中的函数 $V=g(p)$正是在(V,p)平面上的等熵线(见(7.209)式)。因此根据(7.63.17)式,则有:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p}\right)_{p=p_d} &= \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p}\right)_{p=p_d} \\ \left(\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}p^2}\right)_{p=p_d} &= \left(\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}p^2}\right)_{p=p_d}\end{aligned}\right\} \tag{7.219}$$

从而由(7.216)和(7.218)式推出

$$\left.\begin{aligned}\lim_{p\to p_d}\phi'(p) &= \psi'(p_d) \\ \lim_{p\to p_d}\phi''(p) &= \psi''(p_d)\end{aligned}\right\} \tag{7.220}$$

从而说明曲线 $\vec{S}$与 $\vec{R}$在交点 d 是二级密接的;同理可证明 $\overleftarrow{S}$与 $\overleftarrow{R}$在交点亦是二级密接的。

4. *对于多方气体的 v 与 p 的关系曲线*

如上的 v 与 p 的关系曲线,不论是对冲击波(见(7.215)式)还是对稀疏波(见(7.217)式),都是在等熵条件下但不指定状态方程的具体形式的一般讨论。如果气体是多方的,即状态方程为:$p=A\rho^k$,$A=A(S)=A(S_d)\equiv\mathrm{const}$,于是方程(7.215)中的 ϕ 和(7.217)中的 ψ 写成(利用(7.63.2)式和(7.19)式):

$$\phi = \phi(p) = (p-p_d)\sqrt{\frac{2V_d}{(k+1)p+(k-1)p_d}} \tag{7.221}$$

$$\psi = \psi(p) = \frac{2a_d}{k-1}\left[\left(\frac{p}{p_d}\right)^{\frac{k-1}{2k}}-1\right] \tag{7.222}$$

在冲击波的"v 与 p 的关系曲线"与稀疏波的"v 与 p 的关系曲线"的连接处 d 点上

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p}\right)_d = \frac{a_d}{kp_d}\quad,\quad\left(\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}p^2}\right)_d = -\frac{k+1}{2k^2}\frac{a_d}{p_d^2} \tag{7.223}$$

7.19.3 在(v,p)平面上两波相互作用的图解法与采用的符号

我们将利用(v,p)平面上的关于冲击波和稀疏波的 v 与 p 关系曲线来图解两波相互作用问题。

由于问题是一维的,不管波作用前,还是作用后,总是一个波在左边,另一个波在右边;同时这两个波不是向左传播,就是向右传播。为了表述方便,用 w_r 表示在右边的冲击波或稀疏波;用 w_l 表示在左边的冲击波或稀疏波。具体地:

$\vec{w}_r$—— 表示波在右边并向右传播的波;

$\overleftarrow{w}_r$—— 表示波在右边并向左传播的波;

w_r—— 表示波在右边但传向未定

$\vec{w}_l$—— 表示波在左边并向右传播的波；

$\overleftarrow{w}_l$—— 表示波在左边并向左传播的波；

w_l—— 表示波在左边但传向未定

用(r)表示 w_r 右边的状态；用(l)表 w_l 左边的状态；用(m)表 w_r 与 w_l 之间的状态。

两波在作用之前，各波所处的位置与相邻的状态区，排列次序如下

$$\xrightarrow[\text{其中中间状态区}(m)\text{是个速度 } v_m\text{、压力 } p_m \text{ 为常值的状态区}]{(l) - w_l - (m) - w_r - (r)} x$$

当两波作用开始时，状态(m)消失，同时立即地（或者经过一段相互作用时间，如果有稀疏波参与的话），产生一个向(r)状态传播的 $\vec{w}_r$ 波；一个向(l)状态传播的 $\overleftarrow{w}_l$ 波（按 7.19.1 段的论述，新生的两个波一定反向传播）；并形成一个新的中间状态(m_*)，在该区速度为 v_*、压力为 p_*. 在作用之后，各波的位置与邻接状态的次序为

$$\xrightarrow[(\text{符号 } \overleftarrow{w}\text{—— 代表 } \overleftarrow{S} \text{ 或 } \overleftarrow{R}\ ;\vec{w}\text{—— 代表 } \vec{S} \text{ 或 } \vec{R})]{(l) - \overleftarrow{w}_l - (m_*) - \vec{w}_r - (r)} x$$

现在我们将利用(7.210)式和(7.215)式所示的 v 与 p 关系曲线来图解波的相互作用，这些曲线都是假定与一个“已知状态 d”相联系的，现在这个“状态 d”可能是状态(r)、状态(l)或状态(m)。如下，为了研究方便，我们用 L_r——表示与(r)态相联系的向右传播波 $\vec{w}_r$ 的 v 与 p 关系曲线，即

$$L_r \sim \begin{cases} v = v_r + \phi_r(p) \quad , \quad p > p_r, (\vec{w}_r = \vec{S}, \text{且 } \vec{S} \text{ 在右方}) \\ v = v_r + \psi_r(p) \quad , \quad p < p_r, (\vec{w}_r = \vec{R}, \text{且 } \vec{R} \text{ 在右方}) \end{cases}$$

用 L_l——表示与(l)态相联系的向左传播波 $\overleftarrow{w}_l$ 的 v 与 p 关系曲线，即

$$L_l \sim \begin{cases} v = v_l - \phi_l(p) \quad , \quad p > p_l, (\overleftarrow{w}_l = \overleftarrow{S}, \text{且 } \overleftarrow{S} \text{ 在左方}) \\ v = v_l - \psi_l(p) \quad , \quad p < p_l, (\overleftarrow{w}_l = \overleftarrow{R}, \text{且 } \overleftarrow{R} \text{ 在左方}) \end{cases}$$

而用 L_m^+ 和 L_m^-——表示与(m)态相联系的向右和向左传播的波的 v 与 p 关系曲线，即

$$L_m^+ \sim \begin{cases} v = v_m + \phi_m(p), & (\vec{S}) \\ v = v_m + \psi_m(p), & (\vec{R}) \end{cases}$$

$$L_m^- \sim \begin{cases} v = v_m - \phi_m(p), & (\overleftarrow{S}) \\ v = v_m - \psi_m(p), & (\overleftarrow{R}) \end{cases}$$

有了如上的曲线与符号，在(v,p)平面上图解两波作用后的状态区(m^*)很简单，在状态(r)和状态(l)已确定的情况下，画出曲线 L_r 和 L_l，它俩的交点便是要确定的(m^*)状态，参见下节的各图。

此外，还须提一下，两波相互作用后可能产生一个接触间断面（contact discontinuity surface），所谓接触间断面就是在曲面两边压力相等、法向速度分量相等（对于一维情形，就是速度相等）、而在两边其密度等不同的分界面（interface）。接触间断面用符号 J 表示。

7.20 两个冲击波的相互作用

本节研究两个一维冲击波相互作用。

7.20.1 两个冲击波迎面碰撞(head-on collision)

有两个强度不同、迎面而来的冲击波 $\vec{S}$和 $\overleftarrow{S}$，在 Q 点相撞后产生一个向左冲击波 $\overleftarrow{S}$和一个向右冲击波 $\vec{S}$，如图 7.62(a)所示，在 $\overleftarrow{S}$和 $\vec{S}$之间有一个常压力 p_* 和常速度 v_* 的新状态区(m_*)，但在(m_*)区中有一条从 Q 点开始的接触间断线 J，它将(m_*)分成密度不同的两个区(关于 J 的存在，见 § 7.22 分析)。所述的两个波相碰撞及其作用的结果，可用如下符号表示：

$$\vec{S}\overleftarrow{S} \longrightarrow \overleftarrow{S}\mathrm{J}\vec{S} \tag{7.224}$$

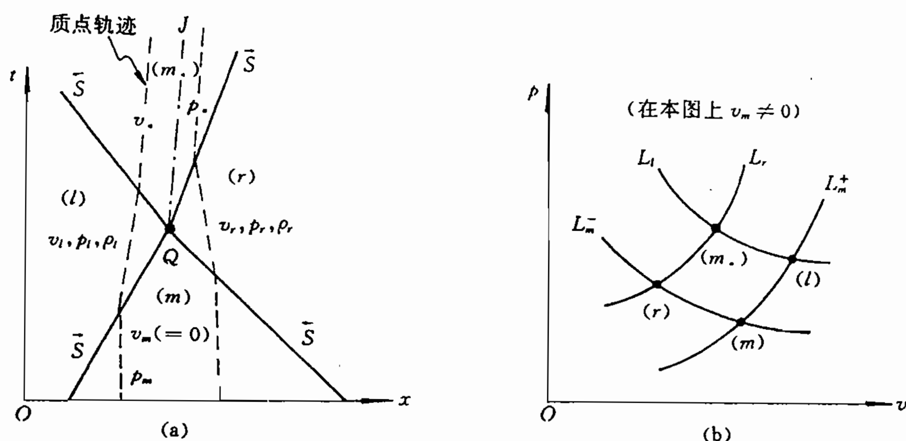


图 7.62

在(x,t)平面上的(m_*)区的压力 p_* 和速度 v_* 可以在(v,p)平面上图解。已知在(x,t)平面上联系(m)区与(l)区的为 $\vec{S}$，故在(v,p)平面上这个(l)区的状态落在 L_m^+ 曲线上；在(x,t)平面上联系(m)区与(r)区为 $\overleftarrow{S}$，故在(v,p)平面上这个(r)区的状态落在 L_m^- 曲线上。在(v,p)平面上，过(r)态点作曲线 L_r，过(l)态点作曲线 L_l，这两条曲线的交点(m_*)就是所求的状态点，如图 7.62(b)所示。

如果相向传播的两上冲击波的强度相等，则相当平面冲击波撞击与它平行的刚壁，如同 § 7.18 所处理的问题。

7.20.2 两个同向冲击波的追赶碰撞(overtaking collision)

有两个向右传播的冲击波 $\vec{S}_1$ 和 $\vec{S}_2$，如图 7.63 所示，两波邻接的状态区为：(l)、(m)、(r)，则应有：

$$p_l > p_m > p_r$$
$$v_l > v_m > v_r$$

在图示的 Q 点两波发生了碰撞，于是产生了两个反向传播的波：向右一定为冲击波 $\vec{S}$，向左为 $\overleftarrow{w_l}$ 波，这是由向左的反射波有两种可能：或为冲击波 $\overleftarrow{S}$，或为稀疏波 $\overleftarrow{R}$(在后将作具体分析)。这种作用用符号表示为

$$\vec{S}_2\vec{S}_1 \longrightarrow \begin{cases} \overleftarrow{S}\mathrm{J}\vec{S} \\ \quad 或 \\ \overleftarrow{R}\mathrm{J}\vec{S} \end{cases} \tag{7.225}$$

两波相互作用后生成一个新区(m_*),该区的状态可以图解。由于$\vec{S}_1$和$\vec{S}$都是与状态(r)相邻的在右方向前冲击波,所以(m)区和(m_*)区的状态都在(v,p)平面上的L_r线上;在(x,t)平面上连接(l)区与(m)区为向前冲击波$\vec{S}_2$,所以(l)区的状态应在从(m)态点出发的L_m^+线上;而$\overleftarrow{w}_l$在左方又是向左传播,它的左边为(l)区右边为(m_*)区,故(m_*)区的状态又应落在(v,p)平面上从(l)态点出发的L_l线上。具体的步骤是:在(v,p)平面上过状态点(r)作曲线L_r,然后在L_r上确定出状态点(m),再过(m)点作曲线L_m^+,在L_m^+上定出(l)区的状态点(l),再过(l)点作曲线L_l,曲线L_l与L_r的交点(m_*)就是所求的状态。各曲线和各状态点如图7.64所示(该图表示一般情况,$v_r \neq 0$)。

图 7.63

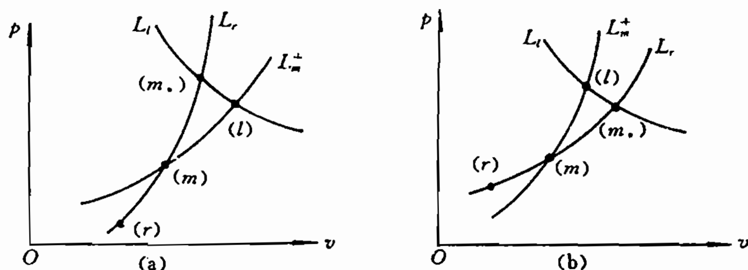


图 7.64

从图 7.64 看出,可能出现两种可能:或L_r在L_m^+之上,见图(a);或L_r在L_m^+之下,见图(b),这对应着式(7.225)。若L_r在L_m^+之上,则(m_*)点的压力p_*大于(l)点的压力p_l,所以反射的向后波$\overleftarrow{w}_l$为冲击波$\overleftarrow{S}$;若L_r在L_m^+之下,则(m_*)点的压力p_*小于(l)点的压力p_l,所反射的$\overleftarrow{w}_l$为稀疏波$\overleftarrow{R}$。之所以造成这种后果是由于绝热指数的取值大小及两入射波的强弱程度所致。

如下将以多方气体为例,来分析确定反射可能出现的情况。

1. 对于 $k<5/3$ 时的情形

对于多方气体,若$k<5/3$,不管两入射的冲击波强弱,反射波一定是稀疏波。如下将分析论证这一事实,推证是繁琐冗长的。

对于多方气体,根据(7.215)式和(7.221)式,则同从(r)态出发的$\vec{S}_1$和$\vec{S}$共同对应的v与p关系曲线L_r为

$$v = F_r(p) = v_r + (p - p_r)\sqrt{\frac{2V_r}{(k+1)p + (k-1)p_r}} \tag{7.226}$$

因状态(m)在L_r上，故由上式得出

$$v_m = v_r + (p_m - p_r)\sqrt{\frac{2V_r}{(k+1)p_m + (k-1)p_r}} \tag{7.227}$$

根据(7.215)式和(7.221)式，则从(m)态出发的$\vec{S}_2$所对应的v与p关系曲线L_m^+为

$$v = F_m(p) = v_m + (p - p_m)\sqrt{\frac{2V_m}{(k+1)p + (k-1)p_m}} \tag{7.228}$$

利用(7.226)和(7.228)式，定义一个函数F：

$$\begin{aligned} F = F(p) &= F_r(p) - F_m(p) \\ &= (p - p_r)\sqrt{\frac{2V_r}{(k+1)p + (k-1)p_r}} - (p - p_m) \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{2V_m}{(k+1)p + (k-1)p_m}} - (p_m - p_r)\sqrt{\frac{2V_r}{(k+1)p_m + (k-1)p_r}} \end{aligned}$$

由于(m)态和(r)态是激波$\vec{S}_1$两边的状态，则根据(7.63.2)或(7.185)式有

$$\frac{V_m}{V_r} = \frac{(k+1)p_r + (k-1)p_m}{(k+1)p_m + (k-1)p_r}$$

利用上式可从函数$F(p)$中消去V_m，将$F(p)$化成

$$F = F(p)$$

$$= \sqrt{\frac{2V_r}{k+1}}\left\{\frac{p - p_r}{\sqrt{p + \frac{k-1}{k+1}p_r}} - \frac{p - p_m}{\sqrt{p + \frac{k-1}{k+1}p_m}}\sqrt{\frac{p_r + \frac{k-1}{k+1}p_m}{p_m + \frac{k-1}{k+1}p_r}} - \frac{p_m - p_r}{\sqrt{p_m + \frac{k-1}{k+1}p_r}}\right\} \tag{7.229}$$

要判断L_r与L_m^+线的相对位置，只需比较在同一压力p值下L_r线和L_m^+线所对应的各自v值的大小即可，即只需要判断$F=F(p)$的正负。

$$F = F(p) > 0 \longrightarrow \overleftarrow{R}J\vec{S} \tag{7.229.1}$$

$$F = F(p) < 0 \longrightarrow \overleftarrow{S}J\vec{S} \tag{7.229.2}$$

为了判定F的正负、先对它求导：

$$F' = F'(p) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2V_r}{(k+1)p_m + (k-1)p_r}}\left\{\sqrt{\frac{p_m + \frac{k-1}{k+1}p_r}{p + \frac{k-1}{k+1}p_r}}\,\frac{p + \frac{3k-1}{k+1}p_r}{p + \frac{k-1}{k+1}p_r}\right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{p_r + \frac{k-1}{k+1}p_m}{p + \frac{k-1}{k+1}p_m}}\,\frac{p + \frac{3k-1}{k+1}p_m}{p + \frac{k-1}{k+1}p_m}\right\} \tag{7.230}$$

为了判断F'的正负，将F'改写，将上式中后项从括号中抽出，上式改写成

$$F'(p) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2V_r}{(k+1)p_m + (k-1)p_r}}\,\eta(G-1) \tag{7.231}$$

其中

$$\eta=\eta(p)=\sqrt{\frac{p_r+\frac{k-1}{k+1}p_m}{p+\frac{k-1}{k+1}p_m}\cdot\frac{p+\frac{3k-1}{k+1}p_m}{p+\frac{k-1}{k+1}p_m}} \tag{7.232}$$

$$G=G(p)=\left[\frac{p_m+\frac{k-1}{k+1}p_r}{p_r+\frac{k-1}{k+1}p_m}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{p+\frac{k-1}{k+1}p_m}{p+\frac{k-1}{k+1}p_r}\right]^{\frac{3}{2}}\cdot\left[\frac{p+\frac{3k-1}{k+1}p_r}{p+\frac{3k-1}{k+1}p_m}\right] \tag{7.233}$$

F'的正负，又取决 G 是否大于 1，为了判断 G 的大小，对 G 求导

$$G'=G'(p)=\left[\frac{p_m+\frac{k-1}{k+1}p_r}{p_r+\frac{k-1}{k+1}p_m}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(p+\frac{k-1}{k+1}p_m\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(p+\frac{k-1}{k+1}p_r\right)^{\frac{5}{2}}}\frac{p_m-p_r}{p+\frac{3k-1}{k+1}p_m}\frac{3k+1}{2(k+1)}\xi \tag{7.234}$$

其中

$$\xi=\xi(p)=p^2-\frac{k-1}{k+1}\frac{3k-1}{k+1}(p_m+p_r)p-\frac{k-1}{k+1}\frac{3k-1}{3k+1}\frac{7k-1}{k+1}p_mp_r \tag{7.235.1}$$

G'的正负取决于 ξ 的正负。函数 ξ 只在 $p=p_*$ 处取极值(最小值)，其 p_* 为

$$p_*=\frac{1}{2}\frac{k-1}{k+1}\frac{3k-1}{3k+1}(p_m+p_r)$$

由于：$p_m>p_r, k\geqslant 1$，所以有

$$p_*=\frac{1}{2}\frac{k-1}{k+1}\frac{3k-1}{3k+1}(p_m+p_r)<\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{3k-1}{3k+1}\cdot p_m<p_m$$

由于两波相互作用后的区中压力 p 至少等于 p_m，故对函数 $F(p)$有意义的 p 值应在$[p_m,+\infty)$，所以函数 $\xi=\xi(p)$应取在$[p_m,+\infty)$区，在该区它是单调递增的，因此在该区间 ξ 的最小值 $\xi_{\min}$则为：

$$\xi_{\min}=\xi(p_m)=p_m^2-\frac{k-1}{k+1}\frac{3k-1}{3k+1}(p_m+p_r)p_m-\frac{k-1}{k+1}\frac{3k-1}{3k+1}\frac{7k-1}{k+1}p_mp_r$$

$$\geqslant p_m^2\left[1-\frac{k-1}{k+1}\frac{3k-1}{k+1}\frac{9k+1}{k+1}\right]=p_m^2\frac{8k^2}{(k+1)^2(3k+1)}[5-3k] \tag{7.235.2}$$

由此看出，当 $k\leqslant\frac{5}{3}$时，$\xi_{\min}\geqslant 0$。所以在如下条件下，即当

$$1\leqslant k\leqslant\frac{5}{3},\quad p_m\leqslant p<+\infty \tag{7.236}$$

则推出

$$\xi\geqslant\xi_{\min}>0$$

于是得出在式(7.236)的条件下，式(7.234)所示的 G' 为

$$G'=G'(p)>0 \tag{7.237}$$

即函数 $G=G(p)$在(7.236)式条件下是单调递增的。在该区间 G' 的最小值 $G_{\min}$为：

$$G_{\min} = G(p_m) = H(Z) = \sqrt{\frac{k}{2(k+1)}} \frac{1 + \frac{3k-1}{k+1}Z}{\sqrt{Z + \frac{k-1}{k+1}(1 + \frac{k-1}{k+1}Z)}} \tag{7.238}$$

其中

$$Z = \frac{p_r}{p_m} \tag{7.239}$$

这个所谓的最小值 $G_{\min}$，其大小还随 Z 变化，即取决于 Z 的值，而 Z 的取值范围为

$$0 \leqslant Z \leqslant 1 \tag{7.240}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{当 } Z = 0 \text{ 时}, G_{\min} = H(0) = \sqrt{\frac{k}{2(k-1)}} > 1 \\ &\text{当 } Z = 1 \text{ 时}, G_{\min} = H(1) = 1 \end{aligned}\right\} \tag{7.241}$$

如下证明当 $0<Z<1$ 时，$G_{\min}$也大于 1，为此对 $H(Z)$求导

$$\begin{aligned} H' = H'(Z) &= \sqrt{\frac{k}{2(k+1)}}(Z + \frac{k-1}{k+1})^{-\frac{3}{2}}(1 + \frac{k-1}{k+1}Z)^2 \\ &\quad \cdot \left\{-\frac{1}{2}\frac{3k-1}{k+1}\frac{k-1}{k+1}Z^2 + \frac{1}{k+1}Z + \frac{3k^2-6k-1}{2(k+1)^2}\right\} \\ &= \sqrt{\frac{k}{2(k+1)}}(Z + \frac{k-1}{k+1})^{-\frac{3}{2}}(1 + \frac{k-1}{k+1}Z)^2\zeta \end{aligned} \tag{7.242}$$

其中

$$\zeta = \zeta(Z) = -\frac{1}{2}\frac{3k-1}{k+1}\frac{k-1}{k+1}Z^2 + \frac{1}{k+1}Z + \frac{3k^2-6k-1}{2(k+1)^2} \tag{7.243}$$

H'的正负取决于 ζ，已知二次函数 $\zeta=\zeta(Z)$在 $Z=Z_0$ 处取极大值。其中 Z_0

$$Z_0 = \frac{k+1}{(3k-1)(k-1)} \tag{7.244}$$

则对于 ζ 而言，

$$\begin{cases} \text{当 } Z > Z_0 \text{ 时}, \zeta = \zeta(Z) \text{ 单调递减} \\ \text{当 } Z < Z_0 \text{ 时}, \zeta = \zeta(Z) \text{ 单调递增} \end{cases}$$

按(7.236)式，$1<k<\frac{5}{3}$，则由(7.244)式推出

$$Z_0 > 1$$

而对于我们有意义的 Z 取值范围为：$0\leqslant Z\leqslant 1$，在这个范围函数 $\zeta(Z)$单调递增。当 $Z=1$ 时，从(7.243)推出 $\zeta=\zeta(1)=0$(从而由(7.242)式得到 $H'=H'(1)=0$)。由于 $\zeta=\zeta(Z)$在 $0\leqslant Z\leqslant 1$ 范围内是单调递增的，所以

$$\text{在 } 0 \leqslant Z \leqslant 1 \text{ 时} \quad , \quad \zeta = \zeta(Z) < 0$$

从而由(7.242)式推出：

$$H' = H'(Z) < 0$$

即 $H=H(Z)$在 $0\leqslant Z\leqslant 1$ 区间是单调的，而据(7.241)式 H 在这个区间的两个端点上取值又大于或等于 1，所以

$$\text{在 } 0 \leqslant Z \leqslant 1 \text{ 区间} \quad , \quad H = H(Z) \geqslant 1$$

由于 $H=H(Z)=G_{\min}\geqslant 1$，因此(7.233)式所示的 G 在所考虑区域

$$G=G(p)\geqslant 1 \quad ,(\infty>p\geqslant p_m)$$

于是由(7.231)式推出

$$F'(p)\geqslant 0 \quad , \quad (\infty>p\geqslant p_m)$$

而(7.229)式所示的 $F(p)$ 在

$$p=p_m \text{ 时}, F(p_m)=0; \quad p\to\infty \text{ 时}, F(p)\to\infty$$

所以
$$F(p)>0 \quad , \quad (p_m<p<\infty)$$

故据(7.229.1)式，则推出对于多方气体，当：$1<k\leqslant\frac{5}{3}$时

$$\vec{S}_2\vec{S}_1\longrightarrow\overleftarrow{R}J\vec{S}$$

如上证明冗长繁杂，总结其简要步骤如下：

① 为证 $F(p)>0\to$先证 $F'(p)>0\to$等价证 $G>1\to$为此证明 $G'>0\to$等价证 $\xi>0$。

② 在限定：$1<k<\frac{5}{3}$的情况下，$\xi_{\min}>0$。(于是$\Rightarrow\xi>0\Rightarrow G'>0$，即 $G(p)$单调递增。)

③ 再证：$G(p_m)=G_{\min}=H(Z)\geqslant 1$，(其中 $0\leqslant Z\leqslant 1$，在 $k<\frac{5}{3}$时，$H(0)>1$，$H(1)=1$)，为此证明 $H'(Z)<0$，即 $H(Z)$单调递减。

④ 由于 $G_{\min}=G(p_m)\geqslant 1\Rightarrow G>1\Rightarrow F'(p)>0$，而 $F(p_m)=0\Rightarrow F(p)>0$. 从而 $\vec{S}_2\vec{S}_1\to\overleftarrow{R}J\vec{S}$.

如上结论的证明是 Von Neumann 在 1943 年推证出来的。

2. 对于 $k>5/3$ 时的情形

对于多方气体，当 $k>5/3$ 时情况不像 $k<5/3$ 那样单纯、明确，情况比较复杂。随着两入射波强度的不同，反射波的类型亦在变化，有时为稀疏波；有时为冲击波。如下只粗略地分析几种特殊情况。

① 入射波极强的情形

这种情况则相当在(7.229)式中 $p\to\infty$，而当 $p\to\infty$时，$F(p)\to\infty$，当然反射波则为 $\overleftarrow{R}$，即有

$$\vec{S}_2\vec{S}_1\to\overleftarrow{R}J\vec{S}$$

从而得出结论：在入射冲击波极强的情况下，对于多方气体，不管 k 的取值如何，反射波均为稀疏波。

② 入射激波不太强的情形

对于这种情况，为判断反射为何波，仍从对 $k<5/3$ 时所定义的 $F(p)$出发(见(7.229)式)，研究它的正负。

根据(7.243)式，函数 $\zeta(Z)$在 $Z=Z_0$ 取极大值，其中 Z_0(见(7.244)式)为

$$Z_0=\frac{k+1}{(3k-1)(k-1)}$$

当 $k>\frac{5}{3}$时，显然有

$$Z_0<1$$

所以 $\zeta(Z)$在 $Z_0<Z\leqslant 1$ 段应单调递减。而据(7.242)式：

$$\text{若}\zeta<0\rightarrow H'<0\quad;\quad\text{若}\zeta>0\rightarrow H'>0$$

$$\zeta(1)=0\rightarrow H'(1)=0 \tag{7.245}$$

由于 $\zeta(Z)$在 $Z=1$ 附近单调递减且 $\zeta(1)=0$,$H'(1)=0$,故有

$$\zeta(1-\Delta Z)>0\rightarrow H'(1-\Delta Z)>0$$

$$\zeta(1+\Delta Z)<0\rightarrow H'(1+\Delta Z)<0$$

(ΔZ 是个大于零的小量)

从而推出

$$H''(1)<0 \tag{7.246}$$

于是由(7.245)和(7.246)式得知:$Z=1$ 是 $H=H(Z)$的最大极值点,而据(7.241)式:$H(1)=1$,从而有(即对 $\vec{S}_1$ 较弱情形):

$$H(Z)=G(p_m)<1\quad,\quad 1-\Delta Z\leqslant Z\leqslant 1 \tag{7.247}$$

于是则存在

$$G(p)=G(p_m+\Delta p)<1\quad,\quad(\Delta p\text{ 是个小量})$$

从而,据(7.231)式则有

$$F'(p)=F'(p_m+\Delta p)<0$$

而 $F(p_m)=0$,所以存在

$$F(p)=F(p_m+\Delta p)<0$$

即当 $\vec{S}_1$ 和 $\vec{S}_2$ 都不是很强时,存在反射波为激波的情况,即

$$\vec{S}_2\vec{S}_1\longrightarrow\overleftarrow{S}J\vec{S}$$

③ 波 S_1 很强、S_2 较弱的情形

如上考虑 $Z\sim 1$ 的情形,即入射波较弱的情形。现考虑 $Z\sim 0$ 的情形,即 $\vec{S}_1$ 很强情形。据(7.238)式:

$$H(0)=\sqrt{\frac{k}{2(k-1)}}\begin{cases}<1 & ,\text{当 }k>2\text{ 时}\\ >1 & ,\text{当}\frac{5}{3}<k<2\text{ 时}\end{cases} \tag{7.248}$$

而据(7.242)式,有

$$H'(0)=\sqrt{\frac{k}{2(k+1)}}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{3k^2-6k-1}{(3k-1)(k-1)}$$

$$=\sqrt{\frac{k}{2(k+1)}}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{3[k-(1+\frac{3}{\sqrt{3}})][k+(1+\frac{2}{\sqrt{3}})]}{(3k-1)(k-1)}$$

即有

$$H'(0)\begin{cases}<0, & \text{当 }k<1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\text{ 时}\\ \geqslant 0, & \text{当 }k\geqslant 1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\text{ 时}\end{cases} \tag{7.249}$$

由(7.248)和(7.249)式看出,在 $k>5/3$ 的情况下,当 $\vec{S}_1$ 很强(即 $Z=p_r/p_m\sim 0$)时,总会有

$$H(Z) = G(p_m) < 1, \quad Z \sim 0$$

从而则存在

$$G(p) = G(p_m + \Delta p) < 1$$

于是存在

$$F'(p) = F'(p_m + \Delta p) < 0$$

而 $F(p_m)=0$，所以在 $Z=0$ 或 $Z=0$ 附近总可能存在

$$F(p) = F(p_m + \Delta p) < 0$$

即在 $k \geqslant 5/3$ 的情况下，当 $\vec{S}_1$ 很强，而 $\vec{S}_2$ 较弱($p \sim p_m$)，则会出现

$$\vec{S}_2\vec{S}_1 \longrightarrow \overleftarrow{S}J\vec{S}$$

3. 例外

从前面的分析讨论中还可以看出这样的事实：经过(m)态的曲线 L_r 和 L_m^+(见图7.64)有可能再相交，即出现 $v_l=v_*$、$p_l=p_*$ 的情形，也就是说 $\vec{S}_2$ 追上 $\vec{S}_1$ 没有反射波，即有

$$\vec{S}_2\vec{S}_1 \longrightarrow J\vec{S} \tag{7.250}$$

7.21 冲击波与分界面的相互作用

设在两种介质的接触间断面(contact discontinuity surface)J_0 左边为(m)区、右边为(r)区，两区的状态为：$v_r=v_m=v_0=0$、$p_r=p_m=p_0$、V_r、V_m，(下标"m"和"r"表示各区的物理量，V_r 与 V_m 不一定相等)。现有一个自左向右传播的冲击波 $\vec{S}_0$，在 $t=t_0$ 时刻遇到分界面 J_0，于是发生了反射和透射(reflection and transmission)，即向右传出一个冲击波 $\vec{S}$，向左反射一个波 $\overleftarrow{w}$，见图 7.65 所示，$\overleftarrow{w}$可能为激波 $\overleftarrow{S}$亦可能为稀疏波 $\overleftarrow{R}$，这取决于两种介质的性质。$\vec{S}_0$ 与分界面 J_0 作用后形成一个新区(m_*)和一个新的分界面 J，关于(m_*)的状态可以图解，见图 7.66。在(v,p)平面上图解(m_*)区的压力 p_* 和密度 v_*，可能给出两种结果：(m_*)态点在(l)态点之上，如图 7.66(a)所示，——这对应着反射波为 $\overleftarrow{S}$的情形；(m_*)态点在(l)态点之下，如图 7.66(b)所示，——这对应着反射波为 $\overleftarrow{R}$的情形。

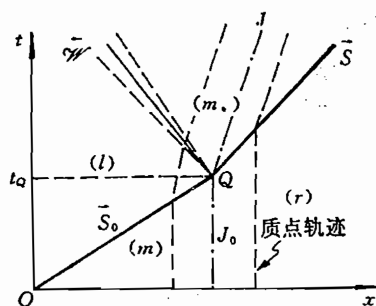


图 7.65

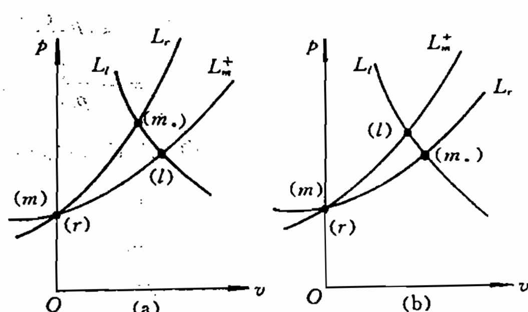


图 7.66

关于(m_*)状态的图解确定。其关键是先要确定 $\overleftarrow{w}$为 $\overleftarrow{S}$？还是 $\overleftarrow{R}$？亦即要先确定 L_r 和

L_m^+ 的相对位置。

7.21.1　对于入射激波 $\vec{S}_0$ 较弱时

从图 7.65 得知，($m.$)区与(r)区的分界为 $\vec{S}$，所以在(v,p)平面上($m.$)态点应在从(r)态点发出的 L_r 线上，曲线 L_r(参见(7.215)式)：

$$L_r:\begin{cases}v=v_r+\sqrt{(V_r-V)(p-p_r)}\\V=f(p,p_r,V_r)=f_r(p)\end{cases}\tag{7.251}$$

则有(参见(7.216)式)：

$$\lim_{p\to p_r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p}=\left(\sqrt{-\frac{\mathrm{d}f_r}{\mathrm{d}p}}\right)_{p=p_r}\tag{7.252}$$

而过(r)态点的等熵线及其斜率分别为

$$V=g(p,S_r)=g_r(p)\tag{7.253}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}g_r}{\mathrm{d}p}\right|_{p=p_r}=-\frac{1}{\rho_r^2a_r^2}\quad,\quad a_r^2=\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\rho=\rho_r}\tag{7.254}$$

根据在(V,p)平面上过同点的等熵线与冲击绝热线相切，故由(7.252)式和(7.254)式得到 L_r 在(r)态点的斜率

$$\lim_{p\to p_r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p}=\left(\sqrt{-\frac{\mathrm{d}f_r}{\mathrm{d}p}}\right)_{p=p_r}=\left(\sqrt{-\frac{\mathrm{d}g_r}{\mathrm{d}p}}\right)_{p=p_r}=\frac{1}{\rho_ra_r}\tag{7.255}$$

在(x,t)平面上，(l)区与(m)区的分界为 $\vec{S}_0$，所以在(v,p)平面上(l)态应在从(m)态出发的 L_m^+ 上，曲线 L_m^+ 为

$$L_m^+:\begin{cases}v=v_m+\sqrt{(V_m-V)(p-p_m)}\\V=f(p,p_m,V_m)=f_m(p)\end{cases}\tag{7.256}$$

则有

$$\lim_{p\to p_m}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p}=\left(\sqrt{\frac{\mathrm{d}f_m}{\mathrm{d}p}}\right)_{p=p_m}\tag{7.257}$$

而过(m)态点的等熵线及其斜率分别为

$$V=g(p,S_m)=g_m(p)\tag{7.258}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}p}\right|_{p=p_m}=-\frac{1}{\rho_m^2a_m^2}\quad,\quad a_m^2=\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\rho=\rho_m}\tag{7.259}$$

于是由(7.257)式和(7.259)式得 L_m^+ 在(m)态点的斜率

$$\lim_{p\to p_m}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p}=\left(\sqrt{-\frac{\mathrm{d}f_m}{\mathrm{d}p}}\right)_{p=p_m}=\left(\sqrt{-\frac{\mathrm{d}g_m}{\mathrm{d}p}}\right)_{p=p_m}=\frac{1}{\rho_ma_m}\tag{7.260}$$

已知 L_r 线与 L_m^+ 线在(v,p)平面上过同一点(v_0,p_0)，即过(r)态点或者说过(m)态点，所以 L_r 与 L_m^+ 在公共点(v_0,p_0)附近的上下关系，则由它们在该点的斜率(7.255)式和(7.260)式决定。

①如果 $\rho_ma_m<\rho_ra_r$(这时将符号 J 写成 $\overleftarrow{J}$)，则在公共点以右的附近处 L_r 在 L_m^+ 之上。

于是在 $\vec{S}_0$ 不太强的情况下，即 (l) 态点在公共点附近，从而 (m_*) 态点亦在公共点附近，形成图 7.66(a)所示情况，即

$$\vec{S}_0\overleftarrow{J}_0 \longrightarrow \overleftarrow{S}\overleftarrow{J}\vec{S} \tag{7.261}$$

②如果 $\rho_m a_m > \rho_r a_r$（这时将符号 J 写成 $\overrightarrow{J}$），则在公共点以右的附近处 L_r 在 L_m^+ 之下。这时在 $\vec{S}_0$ 不太强的情况下，形成图 7.66(b)所示情形，即

$$\vec{S}_0\overrightarrow{J}_0 \longrightarrow \overleftarrow{R}\overrightarrow{J}\vec{S} \tag{7.262}$$

在如上所引用的量 ρa——称作声阻抗(sonic impedance)。

7.21.2 **对于一般情况**

如上研究的是入射激波较弱情形。现不加此限制，而讨论普遍情况，作为初始条件同上一部分，即 (m) 区和 (r) 区的状态为

$$V_m = \frac{1}{\rho_m},\quad V_r = \frac{1}{\rho_r},\quad p_m = p_r = p_0,\quad v_m = v_r = v_0$$

尽管 ρ_m 与 ρ_r 可能不同，但在 (v,p) 平面上 (m) 态与 (r) 态则为同一个点，即公共点 (v_0,p_0)，(在此 v_0 不一定取零，而在图 7.65 和图 7.66 上取 $v_0=0$)。

将表示过公共点的 L_r 线的表达式(7.251)改写成

$$L_r:\begin{cases} v = F_r(p) = F_r \\ V = f_r(p) = f_r \\ F_r - v_0 = (p-p_0)\sqrt{\dfrac{v_r - f_r}{p - p_0}} \end{cases} \tag{7.263}$$

将表示过公共点 (v_0,p_0) 的 L_m^+ 线的表达式(7.256)改写成

$$L_m^+:\begin{cases} v = F_m(p) = F_m \\ V = f_m(p) = f_m \\ F_m - v_0 = (p-p_0)\sqrt{\dfrac{V_m - f_m}{p - p_0}} \end{cases} \tag{7.264}$$

现在假定分界面 J 的左、右均为多方气体、绝热指数分别为 k_m 和 k_r. 于是(7.263)的最后一式和(7.264)的最后一式改写成(参见(7.221)式)：

$$L_r:\quad F_r - v_0 = (p-p_0)\sqrt{\frac{2V_r}{(k_r+1)p + (k_r-1)p_0}} \tag{7.265}$$

$$L_m^+:\quad F_m - v_0 = (p-p_0)\sqrt{\frac{2V_m}{(k_m+1)p + (k_m-1)p_0}} \tag{7.266}$$

令函数 $y=y(p)$ 为：

$$y = y(p) = \frac{F_r - v_0}{F_m - v_0} = \sqrt{\frac{V_r[(k_m+1)p + (k_m-1)p_0]}{V_m[(k_r+1)p + (k_r-1)p_0]}} \tag{7.267}$$

$$(p_0 \leqslant p \leqslant \infty)$$

函数 $y(p)$ 大于或小于 1，则决定了曲线 L_r 和 L_m^+ 的上下关系。当：$p=p_0$ 时

$$a_m^2 = k_m p_m/\rho_m = k_m p_0/\rho_m$$

$$a_r^2 = k_r p_r/\rho_r = k_r p_0/\rho_r$$

$$y = y(p_0) = \sqrt{\frac{V_r k_m}{V_m k_r}} = \frac{\rho_m a_m}{\rho_r a_r} \tag{7.268}$$

当：$p \to \infty$时

$$y = y(\infty) = \sqrt{\frac{V_r(k_m + 1)}{V_m(k_r + 1)}} = \frac{\sqrt{1 + \mu_r^2}}{\rho_r a_r} \cdot \frac{\rho_m a_m}{\sqrt{1 + \mu_m^2}} \tag{7.269}$$

其中

$$\mu_r^2 = \frac{k_r - 1}{k_r + 1} \quad , \quad \mu_m^2 = \frac{k_m - 1}{k_m + 1}$$

为了考察 $y = y(p)$在 $p_0 \leqslant p < \infty$区间的变化情况，将 $y(p)$平方之后再求导，给出

$$y(p)y'(p) = \frac{V_r}{V_m} \cdot \frac{(k_r - k_m)p_0}{[(k_r + 1)p + (k_r - 1)p_0]^2} \tag{7.270}$$

由此看出 y 是 p 的**单调函数**(monotonic function)，$y'(p)$的正负只取决于常量 k_r 和 k_m 的大小，即

$$\operatorname{sgn} y'(p) = \operatorname{sgn}(k_r - k_m) \tag{7.271}$$

根据(7.268)、(7.269)和(7.271)式，我们便可以讨论 y 的大小问题：

1. 当 $y(p_0) < 1$ 时，即 $\rho_m a_m < \rho_r a_r$

①若 $y(\infty) > 1$，即

$$\frac{\rho_m a_m}{\sqrt{1 + \mu_m^2}} > \frac{\rho_r a_r}{\sqrt{1 + \mu_r^2}} \quad ，而\ \rho_m a_m < \rho_r a_r \tag{7.272}$$

从而限定：$\sqrt{1+\mu_m^2} < \sqrt{1+\mu_r^2}$，即要求：$k_r > k_m$，于是由(7.271)式推出：$y'(p) > 0$，即函数 $y(p)$从小于 1 单调上升到大于 1，所以有

$$\vec{S}_0 \overset{<}{J}_0 \longrightarrow \begin{cases} \overleftarrow{S} \overset{<}{J} \vec{S}, & (当\ p_0 < p < p_*，即\ y(p) < 1，激波不太强) \\ \overleftarrow{R} \overset{<}{J} \vec{S}, & (当\ p_* < p < \infty，即\ y(p) > 1，激波充分强) \end{cases}$$

其中 p_*为：$y(p) = 1$ 方程的解。在(7.272)式的条件下，不会出现 $y'(p) < 0$ 的情况。

②若 $y(\infty) < 1$，即

$$\frac{\rho_m a_m}{\sqrt{1 + \mu_m^2}} < \frac{\rho_r a_r}{\sqrt{1 + \mu_r^2}} \quad , \quad 而\ \rho_m a_m < \rho_r a_r \tag{7.273}$$

由于 $y(p)$是单调的，所以在如上条件下，不管 $y'(p)$取正还是取负，总有 $y(p)$小于 1，从而

$$\vec{S}_0 \overset{<}{J}_0 \longrightarrow \overleftarrow{S} \overset{<}{J} \vec{S} \quad , \quad (p_0 < p < \infty)$$

2. 当 $y(p_0) > 1$ 时，即 $\rho_m a_m > \rho_r a_r$

①. 若 $y(\infty) > 1$，即

$$\frac{\rho_m a_m}{\sqrt{1 + \mu_m^2}} > \frac{\rho_r a_r}{\sqrt{1 + \mu_r^2}} \quad , \quad 而\ \rho_m a_m > \rho_r a_r \tag{7.274}$$

同样，由于 $y(p)$是单调的，所以在如上条件下，不管 $y'(p)$是正还是负，总有 $y(p)$大于 1，从而

$$\vec{S}_0 \overset{>}{J}_0 \longrightarrow \overleftarrow{R} \overset{>}{J} \vec{S} \quad , \quad (p_0 < p < \infty)$$

②. 若 $y(\infty)<1$,即

$$\frac{\rho_m a_m}{\sqrt{1+\mu_m^2}}<\frac{\rho_r a_r}{\sqrt{1+\mu_r^2}}\quad,\quad 而\ \rho_m a_m>\rho_r a_r \tag{7.275}$$

从而限定:$\sqrt{1+\mu_m^2}>\sqrt{1+\mu_r^2}$,即要求:$k_r<k_m$,于是由(7.271)式推出:$y'(p)<0$,即函数 $y(p)$ 从大于 1 单调下降到小于 1,所以有

$$\overrightarrow{S}_0\overset{>}{J}_0\longrightarrow\begin{cases}\overleftarrow{R}\overset{>}{J}\,\overrightarrow{S},(当\ p_0<p<p_*,即\ y(p)>1,激波不太强)\\ \overleftarrow{S}\overset{>}{J}\,\overrightarrow{S},(当\ p_*<p<\infty,即\ y(p)<1,激波充分强)\end{cases}$$

其中 p_* 为:$y(p)=1$ 方程的解。据(7.267)式,它为

$$p_*=\frac{V_m(k_r-1)-V_r(k_m-1)}{V_r(k_m+1)-V_m(k_r+1)}$$

3. 当 $p=p_*$ 时

这时入射的激波在分界面上不反射,即有

$$\overrightarrow{S}_0\overset{<}{J}_0\longrightarrow\overset{<}{J}\,\overrightarrow{S}$$

$$\overrightarrow{S}_0\overset{>}{J}_0\longrightarrow\overset{>}{J}\,\overrightarrow{S}$$

7.22 稀疏波相互作用・关于两波作用后是否存在分界面问题

7.22.1 两个稀疏波的相互作用

在两个波相互作用过程中,如果没有稀疏波参加,相互作用后立即产生两个新波,并不需要一段相互作用的时间。如果有稀疏波参与,则需要有相互作用的时间,在这段时间之后才出现相互作用的结果,如图 7.67(a)所示。

现有一个向左的稀疏波 $\overleftarrow{R}_1$ 和一个向右的稀疏波 $\overrightarrow{R}_2$ 相向传播,两波之间为恒态区 (m)。$\overrightarrow{R}_2$ 与 $\overleftarrow{R}_1$ 作用之后又生成一个向左稀疏波 $\overleftarrow{R}$和一个向右稀疏波 $\overrightarrow{R}$,并形成一个新状态区(m_*)。

$$\overrightarrow{R}_2\overleftarrow{R}_1\longrightarrow\overleftarrow{R}\overrightarrow{R}$$

新区(m_*)的状态(p_*,v_*)可以在(v,p)平面上图解。从均匀区(l)到均匀区(m)穿过一个右传的稀疏波 $\overrightarrow{R}_2$,在(v,p)平面上(l)态应在从(m)态出发的 L_m^+ 线上而且在(m)态点之下,如图 7.67(b)所示;从均匀区(m)到均匀区(r)穿过一个左传的稀疏波 $\overleftarrow{R}_1$,在(v,p)平面上(r)态应在从(m)态出发的 L_m^- 线上而且在(m)态点之下。当然在(l)态和(r)态为已知的情况下,便可确定(m_*)态。从(l)区到(m_*)区穿过 $\overleftarrow{R}$,在(v,p)平面上(m_*)态应在从(l)态出发的 L_l 线上;从(m_*)区到(r)区穿过 $\overrightarrow{R}$,在(v,p)平面上(m_*)态应在从(r)态出发的 L_r 线上。L_l 线与 L_r 线的交点便是所要求的新区(m_*)的状态,如图 7.67 所示。

如果两个迎面相碰的稀疏波是对称的,则其作用过程等价于一个稀疏波同固壁相作用。如果两个波为同向传播的稀疏波,不会发生相撞。

两个稀疏波相互作用,结果不会生成接触间断面,因整流动是等熵的。关于两波作用生成接触间断的问题,如下将做分析。

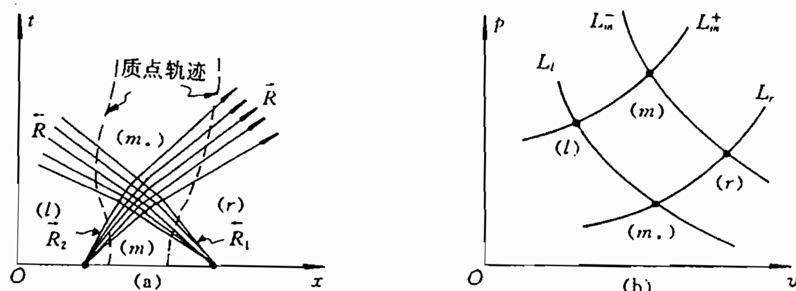


图 7.67

7.22.2 关于两波相互作用能否生成接触间断面的问题

不管是冲击波与冲击波、冲击波与稀疏波或分界面，还是稀疏波与稀疏波，稀疏波与接触间断，其作用后都将生成一个向右传的波 $\overrightarrow{w}_r$ 和一个向左传的波 $\overleftarrow{w}_l$，还可能生成一个接触间断面 J，如图 7.68 所示。

如下分析这个 J 面何时存在。假定在 $\overrightarrow{w}_r$ 之右的 (r) 区和 $\overleftarrow{w}_l$ 之左的 (l) 区的状态均已知；同时以多方气体为例进行分析。

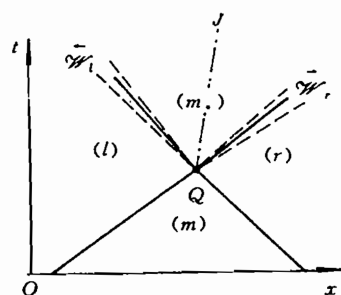


图 7.68

1. 冲击波与冲击波作用，要生成接触间断面

不管两个冲击波是同向传播还是相向传播，亦不管这两个波之间已存在接触间断与否，两波作用后都能生成接触间断。

这是因为两冲击波作用后生成的波至少有一个是冲击波。

① 若 $\overrightarrow{w}_r$ 与 $\overrightarrow{S}_r$、$\overleftarrow{w}_l$ 为 $\overleftarrow{R}_l$

穿过 $\overrightarrow{S}_r$ 的相容关系式为(见(7.58)式)

$$\left.\begin{aligned}&N_r - v_r = V_r\sqrt{\frac{p_* - p_r}{V_r - V_{r*}}}\\&v_* - v_r = \sqrt{(p_* - p_r)(V_r - V_{r*})}\\&\frac{1}{k-1}(p_* V_{r*} - p_r V_r) = \frac{1}{2}(p_* + p_r)(V_r - V_{r*})\end{aligned}\right\}\tag{7.276}$$

穿过 $\overleftarrow{R}_l$ 波区有：

$$v_* + \frac{2}{k-1}\sqrt{kp_* V_{l*}} = v_l + \frac{2}{k-1}\sqrt{kp_l V_l}\tag{7.277.1}$$

(参见(7.122)式)以及等熵关系式

$$p_* V_{l*}^k = p_l V_l^k\tag{7.277.2}$$

将(7.276)和(7.277.1)及(7.277.2)式联立，共五个方程五个未知量：N_r、p_*、v_*、V_{r*}、V_{l*}，故物理量的关系相容。从这组方程可解出：V_{r*} 与 V_{l*}，当然在一般情况下

$$V_{r*} = \frac{1}{\rho_{r*}} \neq V_{l*} = \frac{1}{\rho_{l*}}$$

即在(m_*)区出现了接触间断线 J,接触间断线的斜率为:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_*$$

在以上诸式中 V_{r*} 和 V_{l*} 分别为(m_*)区的分界 J 之右和之左区中的比容。

② 若 $\vec{w}_r$ 为 $\vec{S}_r$、$\overleftarrow{w}_l$ 为 $\overleftarrow{S}_l$

穿过 $\overleftarrow{S}_l$ 的相容关系式为

$$\left.\begin{aligned} & N_l - v_l = -V_l\sqrt{\frac{p_* - p_l}{V_l - V_{l*}}} \\ & v_* - v_l = -\sqrt{(p_* - p_l)(V_l - V_{l*})} \\ & \frac{1}{k-1}(p_* V_{l*} - p_l V_l) = \frac{1}{2}(p_* + p_l)(V_l - V_{l*}) \end{aligned}\right\} \tag{7.278}$$

将上式与穿过 $\vec{S}_r$ 的关系式(7.276)联立,共六个方程六个未知量:N_r、N_l、p_*、v_*、V_{r*}、V_{l*},故物理量的关系相容。从这组方程可解出 V_{r*} 与 V_{l*},在一般情况下则有

$$V_{r*} \neq V_{l*}$$

即在(m_*)区出现了接触间断线 J。

2. 冲击波与接触间断面作用后,要生成新的接触间断面

由于在这种相互作用后,生成的波有一个为冲击波,而另一个或为稀疏波或为冲击波,不管出现哪种情况,则按如上分析,均可断定在(m_*)区有接触间断存在。

3. 冲击波与稀疏作用后,要生成接触间断面

在后面的分析研究中我们将看到,这种作用的结果所生成的 $\overleftarrow{w}_l$ 和 $\vec{w}_r$ 中有一个稀疏波另一个为冲击波,于是由上面的分析,可以断定在(m_*)区存在接触间断面。

4. 稀疏波与稀疏波相互作用后,没有接触间断面生成

由于 $\vec{R}_2\overleftarrow{R}_1 \longrightarrow \overleftarrow{R}_l\vec{R}_r$,即 $\vec{w}_r = \vec{R}_r$、$\overleftarrow{w}_l = \overleftarrow{R}_l$,所以穿过波区 $\vec{R}_r$ 等熵,穿过波区 $\overleftarrow{R}_l$ 也等熵。于是从图 7.68 所示的(l)区到(m_*)区的左半部有

$$p_l V_l^k = p_* V_{l*}^k \tag{7.279}$$

从(r)区到(m_*)区的右半部有

$$p_r V_r^k = p_* V_{r*}^k \tag{7.280}$$

而

$$p_l V_l^k = p_m V_m^k = p_r V_r^k \tag{7.281}$$

将式(7.279)、(7.280)和(7.281)联立,则推出

$$V_{r*} = \frac{1}{\rho_{r*}} = V_{l*} = \frac{1}{\rho_{l*}} \tag{7.282}$$

即在(m_*)区不存在分界面。

5. 稀疏波与接触间断面作用后,要生成新的接触间断面

在下一节我们将研究稀疏波与接触间断面的相互作用。这种作用结果若生成两个稀

疏波 $\overleftarrow{R}_l$ 和 $\overrightarrow{R}_r$，穿过这两个波仍有(7.279)和(7.280)式成立，但(7.281)式不成立，这时

$$p_l V_l^k = p_m V_m^k \neq p_r V_r^k \quad , p_m = p_r = p_0 \tag{7.283}$$

于是由式(7.279)和(7.280)以及上式推出存在接触间断，即有

$$V_{r*} = \frac{1}{\rho_{r*}} \neq V_{l*} = \frac{1}{\rho_{l*}} \tag{7.284}$$

关于稀疏波与分界面作用的图像，见下节。

如若稀疏波与分界面作用生成冲击波，则按第一部分的分析，得出在(m_*)区亦存在分界 J。

7.23 稀疏波与分界面的相互作用

设在初始时刻在分界面 J_0 的两边的气体均处于均匀状态，在(m)区和(r)区的速度、压力、密度和音速为

$$v_m = v_r = v_0 \quad , p_m = p_r = p_0 \quad , \rho_m , \rho_r , a_m , a_r$$

有一稀疏波 $\overrightarrow{R}_0$ 自左向右传向分界面 J_0，并与 J_0 发生作用，产生了反射和透射，由于 J_0 两边气体的声阻抗不同，结果可能出现图 7.69 所示的两种情况(在该图上假定 $v_0=0$)。

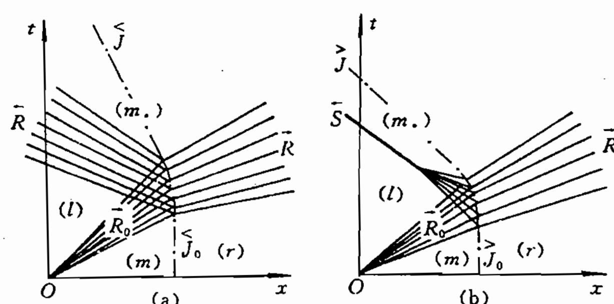


图 7.69

$\overrightarrow{R}_0$ 与 J_0 作用结果形成了(m_*)区，(m_*)区的压力 p_* 和速度 v_* 可以在(v,p)平面上图解。从(l)区到(m)区通过右传波 $\overrightarrow{R}_0$，在(v,p)平面上(l)区的状态则在从(m)态出发的 L_m^+ 线上，设(l)态的压力 p_l 速度 v_l 等均已知，当然在(v,p)平面上(l)态点是确定的。对于图 7.69(a)所示的(m_*)区，在(v,p)平面上它在从(l)出发的 L_l 线与从(r)出发的 L_r 线的交点上，如图 7.70(a)所示。对于图 7.69(b)所示的(m_*)区，在(v,p)平面上它亦在从(l)出发的 L_l 线与从(r)出发的 L_r 线的交点上，但它对应着如图 7.70(b)所示。

如下，从定性到定量来判断上述的两种可能在何条件下出现。

7.23.1 初略分析、判断

现在我们按图 7.70 所示的情况反推，即研究 L_m^+ 线和 L_r 线的相对位置。L_m^+ 线和 L_r 线都是表示右传稀疏波，故有(参见(7.211)式)：

$$L_r:\begin{cases} v = h_r(p) \\ h_r - v_0 = \displaystyle\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p,S_r)\cdot a(p,S_r)} \end{cases} \tag{7.285}$$

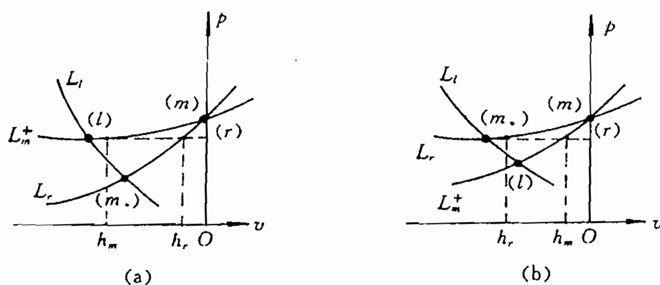


图 7.70

$$L_m^+:\begin{cases} v = h_m(p) \\ h_m - v_0 = \int_{p_0}^{p} \dfrac{\mathrm{d}p}{\rho(p,S_m)\cdot a(p,S_m)} \end{cases} \tag{7.286}$$

从如上两式得出，对于同一压力 p 而言（$0\leqslant p\leqslant p_0$），若 $\rho(p,S_r)\cdot a(p,S_r)>\rho(p,S_m)\cdot a(p,S_m)$，则 $h_r>h_m$，即 L_m^+ 线在 L_r 线之上，对应着图 7.70(a)情况，这时

$$\overrightarrow{R}_0\overset{<}{J}_0 \longrightarrow \overleftarrow{R}\overset{<}{J}\,\overrightarrow{R} \tag{7.287}$$

若 $\rho(p,S_r)\cdot a(p,S_r)<\rho(p,S_m)\cdot a(p,S_m)$，则 $h_r<h_m$，即 L_m^+ 线在 L_r 线之下，对应着图 7.70(b)情况，这时

$$\overrightarrow{R}_0\overset{>}{J}_0 \longrightarrow \overleftarrow{S}\overset{>}{J}\,\overrightarrow{R} \tag{7.288}$$

实际上的反射初为压缩波，继而变成冲击波，如图 7.70(b)所示。

如上的分析只能算作定性地、初步地，并没有彻底解决问题，除非从(p_0,v_0)态出发沿 L_m^+ 的 $\rho(p,S_r)\cdot a(p,S_r)$和沿 L_r 的 $\rho(p,S_m)\cdot a(p,S_m)$的大小处处已知。

7.23.2 具体分析、判断

如下只针对多方气体等熵流动情形，深入分析。对于这种流动则有

$$a^2 = \frac{kp}{\rho} = kA\rho^{k-1} = kA^{\frac{1}{k}}p^{\frac{k-1}{k}}$$

$$\rho a = k^{\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2k}}p^{\frac{k+1}{2k}}$$

设分界面 J_0 两边的多方气体的绝热指数分别为 k_r 和 k_m，则由上式可以推出

$$\left.\begin{aligned} a_r^2 &= k_r p_r/\rho_r = k_r p_0/\rho_r \\ \rho(p,S_r)\cdot a(p,S_r) &= \rho_r a_r\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k_r+1}{2k_r}} \end{aligned}\right\} \tag{7.289}$$

$$\left.\begin{aligned} a_m^2 &= k_m p_m/\rho_m = k_m p_0/\rho_m \\ \rho(p,S_m)\cdot a(p,S_m) &= \rho_m a_m\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k_m+1}{2k_m}} \end{aligned}\right\} \tag{7.290}$$

如上两式中的压力 p 取值范围以及两式中的指数之差为

$$\left.\begin{aligned} & 0\leqslant p\leqslant p_0 \\ & \frac{k_m+1}{2k_m} - \frac{k_r+1}{2k_r} = \frac{k_r-k_m}{2k_rk_m} \end{aligned}\right\} \tag{7.291}$$

利用(7.289)和(7.290)式,可以将(7.285)和(7.286)式积分,给出

$$L_r:\quad \begin{cases} v = h_r(p) \\ h_r - v_0 = \dfrac{2a_r}{k_r - 1}\left[\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{\frac{k_r-1}{2k_r}} - 1\right] \end{cases} \tag{7.292}$$

$$L_m^+:\quad \begin{cases} v = h_m(p) \\ h_m - v_0 = \dfrac{2a_m}{k_m - 1}\left[\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{\frac{k_m-1}{2k_m}} - 1\right] \end{cases} \tag{7.293}$$

1. 对于特殊情况

①. 当:$\rho_r a_r > \rho_m a_m$,$k_r \geqslant k_m$ 时,则根据(7.289)、(7.290)和(7.291)式,可由(7.285)和(7.286)式推出

$$h_r(p) > h_m(p)$$

从而断定

$$\vec{R}_0\overset{<}{J}_0 \longrightarrow \overleftarrow{R}\overset{<}{J}\vec{R} \tag{7.294}$$

当:$\rho_r a_r < \rho_m a_m$, $k_r \leqslant k_m$ 时,则可推出

$$h_r(p) < h_m(p)$$

从而断定

$$\vec{R}_0\overset{>}{J}_0 \longrightarrow \overleftarrow{S}\overset{>}{J}\vec{R} \tag{7.295}$$

②当:$k_m = k_r = k$ 时,则由(7.292)和(7.293)式推出

$$h_r - h_m = \frac{2}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\right](a_m - a_r) \tag{7.296}$$

如果:$a_r < a_m$,并考虑到 $0 \leqslant p \leqslant p_0$,则由上式推出

$$h_r - h_m > 0$$

从而断定

$$\vec{R}_0\overset{<}{J}_0 \longrightarrow \overleftarrow{R}\overset{<}{J}\vec{R} \tag{7.297}$$

如果:$a_r > a_m$,并考虑到 $0 \leqslant p \leqslant p_0$,则由(7.296)式推出

$$h_r - h_m < 0$$

从而断定

$$\vec{R}_0\overset{>}{J}_0 \longrightarrow \overleftarrow{S}\overset{>}{J}\vec{R} \tag{7.298}$$

2. 对于一般情况

为了考察 L_r 线和 L_m^+ 线的上下关系,特令

$$F(p) = h_r(p) - h_m(p) = \frac{2a_r}{k_r - 1}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k_r-1}{2k_r}} - 1\right] - \frac{2a_m}{k_m - 1}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k_m-1}{2k_m}} - 1\right] \tag{7.299}$$

$$F(p_0) = 0 \tag{7.300}$$

为了考察在 $0 \leqslant p \leqslant p_0$ 的范围内,$F(p)$的正负,再构造一个函数 $y(p)$:

$$y(p) = \frac{\dfrac{2a_r}{k_r - 1}\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{\frac{k_r-1}{2k_r}} - \dfrac{2a_m}{k_m - 1}\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{\frac{k_m-1}{2k_m}}}{\dfrac{2a_r}{k_r - 1} - \dfrac{2a_m}{k_m - 1}} \tag{7.301}$$

$$y(p_0) = 1 \tag{7.302}$$

函数 $F(p)$与 $y(p)$的关系为

$$F(p) = \left(\frac{2a_r}{k_r - 1} - \frac{2a_m}{k_m - 1}\right)[y(p) - 1] \tag{7.303}$$

对(7.301)式微分:给出

$$y'(p) = \frac{\frac{1}{\rho_r a_r}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{k_m+1}{2k_m}}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k_r-k_m}{2k_rk_m}} - \frac{\rho_r a_r}{\rho_m a_m}\right]}{\frac{2a_r}{k_r - 1} - \frac{2a_m}{k_m - 1}} \tag{7.304}$$

如下,从(7.299)—(7.304)式出发讨论各种情况。

① 当 $k_r = k_m = k$ 时,则由(7.304)式推出

$$y'(p) = \frac{1}{2\rho_r a_r^2}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{k+1}{2k}}(k-1) > 0$$

而 $0 \leqslant p \leqslant p_0$,$y(p_0) = 1$,从而推出

$$y(p) \leqslant 1$$

因此据(7.303)式,当$\frac{2}{k-1}(a_r - a_m) < 0$时则推出(7.297)式所示的情况,即

$$F(p) > 0 \quad ,\vec{R}_0\overset{>}{J}_0 \longrightarrow \overleftarrow{R}\overset{>}{J}\vec{R}$$

当$\frac{2}{k-1}(a_r - a_m) > 0$,则推出(7.298)式所示的情况,即

$$F(p) < 0 \quad ,\vec{R}_0\overset{<}{J}_0 \longrightarrow \overleftarrow{S}\overset{<}{J}\vec{R}$$

② 当 $\rho_r a_r > \rho_m a_m$,$k_r > k_m$ 时,则推出(7.294)式的情况,即

$$F(p) > 0 \quad ,\vec{R}_0\overset{<}{J}_0 \longrightarrow \overleftarrow{R}\overset{<}{J}\vec{R}$$

这里由于在此种情况下,式(7.304)的"分子<0",而其分母$\left(\frac{2a_r}{k_r-1} - \frac{2a_m}{k_m-1}\right)$不管正负,都可由(7.303)式推出:$F(p) > 0$。

因为若:$\frac{2a_r}{k_r-1} - \frac{2a_m}{k_m-1} > 0$,则由(7.304)式推出:$y'(p) < 0$。而 $y(p_0) = 1$,$0 \leqslant p < p_0$,于是推出:$y(p) \geqslant 1$,从而由(7.303)式得出:$F(p) \geqslant 0$;若:$\frac{2a_r}{k_r-1} - \frac{2a_m}{k_m-1} < 0$,则由(7.304)式推出:$y'(p) > 0$,而 $y(p_0) = 1$,$0 \leqslant p \leqslant p_0$,于是推出:$y(p) \leqslant 1$,从而由(7.303)式亦得出:$F(p) \geqslant 0$.

同理可证当 $\rho_r a_r < \rho_m a_m$,$k_r < k_m$ 时,亦可推出(7.295)式所示的情形,即

$$F(p) < 0 \quad ,\vec{R}_0\overset{>}{J}_0 \longrightarrow \overleftarrow{S}\overset{>}{J}\vec{R}$$

③ 当 $\rho_r a_r > \rho_m a_m$,$k_r < k_m$,并且入射稀疏波较弱时,反射波为稀疏波,即

$$\vec{R}_0\overset{<}{J}_0 \longrightarrow \overleftarrow{R}\overset{<}{J}\vec{R} \tag{7.305}$$

这是因为入射波较弱,故有 $p \sim p_0$,即 $p_0 - \delta \leqslant p \leqslant p_0$,其中 δ 是某个正的小量,亦即压力 p 在在此范围内可保证:$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k_r-k_m}{2k_rk_m}} - \frac{\rho_r a_r}{\rho_m a_m} < 0$,从而保证式(7.304)的"分子<0",在此条件

下，不管其分母如何，都可按上一段所述的逻辑，从(7.303)式推出：$F(p)>0$.

④ 当 $\rho_r a_r<\rho_m a_m$，$k_r>k_m$，并且入射稀疏波较弱时，反射波为冲击波，即

$$\overrightarrow{R}_0\overset{>}{J}_0 \longrightarrow \overleftarrow{S}\overset{>}{J}\overrightarrow{R} \tag{7.306}$$

这是由于入射波较弱，故有 $p\sim p_0$，即 $p_0-\delta\leqslant p\leqslant p_0$，其中 δ 是某个正的小量，它可保证：$\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{\frac{k_r-k_m}{2k_m k_r}}-\dfrac{\rho_r a_r}{\rho_m a_m}>0$，从而保证式(7.304)的"分子>0"，在此条件下，若(7.304)式的"分母>0"，则推出：$y'(p)>0$，而 $y(p_0)=1$，$p_0-\delta\leqslant p\leqslant p_0$，于是推出：$y(p)\leqslant 1$，这样根据(7.303)式便得出：$F(p)\leqslant 0$；若(7.304)式的分母 $\dfrac{2a_r}{k_r-1}-\dfrac{2a_m}{k_m-1}<0$，则推出 $y'(p)<0$，从而推出：$y(p)\geqslant 1$，于是由(7.303)式又得到：$F(p)\leqslant 0$.

当然，还有一些其他情况，就不再一一讨论了。

7.24 冲击波与稀疏波的相互作用

稀疏波与冲击波的相互作用分为：冲击波与稀疏波迎头撞击、冲击波追赶上稀疏波、稀疏波追赶上冲击波三种情况。

7.24.1 冲击波与稀疏波迎面相撞

冲击波与稀疏波迎面相互作用，分为冲击波在左稀疏波在右，即 $\overrightarrow{S}_0\overleftarrow{R}_0$；稀疏波在左冲击波在右，即 $\overrightarrow{R}_0\overleftarrow{S}_0$。这两种情况完全是对称的，所以如下只考虑 $\overrightarrow{S}_0\overleftarrow{R}_0$ 情形。

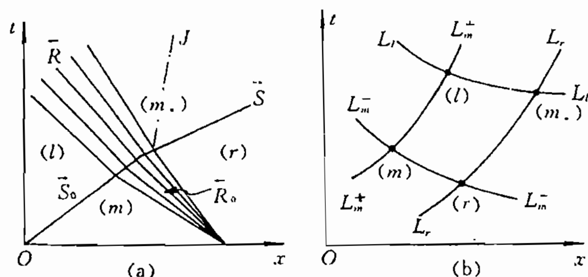


图 7.71

图 7.71 所示的 $\overrightarrow{S}_0\overleftarrow{R}_0$ 情况，这两个波将(l)、(m)、(r)三个状态分开，其中有

$$p_l>p_m>p_r,\quad v_l>v_m,\quad v_r>v_m$$

在(v,p)平面上，从(m)态到(l)态穿过 $\overrightarrow{S}_0$，故(l)态在从(m)态出发的 L_m^+ 线上；从(m)态到(r)态穿过 $\overleftarrow{R}_0$，故(r)态在从(m)态出发的 L_m^- 线上。而这两个入射波作用的结果生成(m_*)态，它在从(l)态出发的 L_l 线与从(r)态出发的 L_r 线的交点上，从而便由图解确定了(m_*)状态。在(m_*)区可能形成一个接触间断面(见§7.22中的分析)。这样的两个波的相互结果表成

$$\overrightarrow{S}_0\overleftarrow{R}_0 \longrightarrow \overleftarrow{R}\mathrm{J}\overrightarrow{S} \tag{7.307}$$

同样

$$\overrightarrow{R}_0\overleftarrow{S}_0 \longrightarrow \overleftarrow{S}\mathrm{J}\overrightarrow{R} \tag{7.308}$$

在如上的分析中，都是假定两波相互作用是在有限时间结束的，所以才有相互作用的结果。如若相互作用的时间是无限地进行的话，就不会出现相互作用的结果了。对于如下将要研究的冲击波追上稀疏波后相互作用、或稀疏波追上冲击波相互作用亦是如此。

7.24.2　**冲击波追上稀疏波的相互作用**

现考虑 $\vec{S}_0\vec{R}_0$，它们的前后与中间状态满足

$$p_l > p_m,\quad v_l > v_m;\quad p_r > p_m,\quad v_r > v_m$$

图 7.72(a)表示出 $\vec{S}_0$ 与 $\vec{R}_0$ 相互作用，以及一种作用结果。在分析冲击波追赶稀疏波的相互作用结果时，所面临的情况与前面诸节所碰到的问题不同，不但要分析反射什么波；而且还要考虑透射什么波，这与稀疏波之前的状态有关。

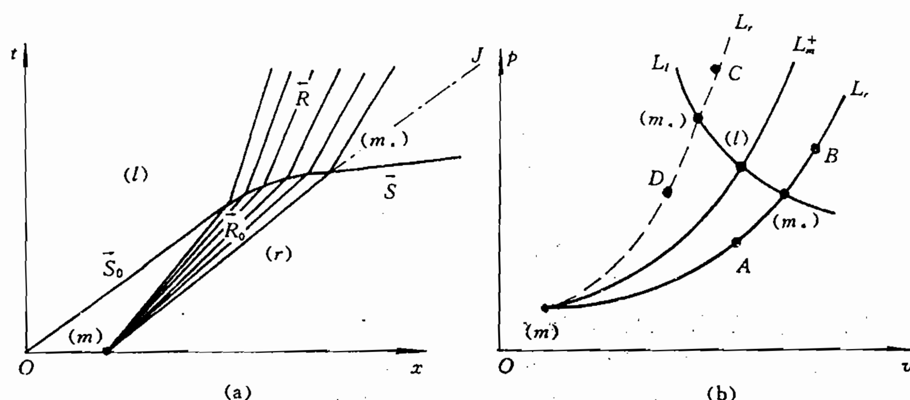


图 7.72

从(m)状态区穿过入射波 $\vec{R}_0$ 到(r)状态区，在(v,p)平面上对应着 L_r 曲线的一段；从(m)状态区穿过入射波 $\vec{S}_0$ 到(l)状态区，在(v,p)平面上对应着 L_m^+ 曲线的一点。在(m)点上曲线 L_r 与 L_m^+ 是二级密接的(参见(7.220)式)，当然从任何一个状态点出发的表示同向传播的稀疏波和冲击波的(v,p)曲线亦是二级密接的。

对应 $\vec{R}_0$ 的曲线 L_r 的方程为(参见(7.217)式)：

$$\left.\begin{aligned} &v = h_R(p) = v_m + \psi(p) = v_m + \int_{p_m}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p,S_m)\cdot a(p,S_m)} \\ &\rho^{-1} = V = g(p,S_m),\quad p_r \geqslant p \geqslant p_m \end{aligned}\right\} \tag{7.309}$$

对应 $\vec{S}_0$ 的曲线 L_m^+ 的方程为(参见(7.215)式)：

$$\left.\begin{aligned} &v = h_S(p) = v_m + \phi(p) = v_m + \sqrt{(V_m - V)(p - p_m)} \\ &V = f(p)\quad,\quad p_l \geqslant p \geqslant p_m \end{aligned}\right\} \tag{7.310}$$

为了判断上述两条曲线的相对位置，特令函数 $F=F(p)$

$$\begin{aligned} F = F(p) &= h_S(p) - h_R(p) = \phi(p) - \psi(p) \\ &= \sqrt{(V_m - V)(p - p_m)} - \int_{p_m}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p,S_m)\cdot a(p,S_m)} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{(V_m - f(p))(p - p_m)} - \int_{p_m}^{p} \sqrt{-\frac{\partial g(p, S_m)}{\partial p}} \mathrm{d}p \tag{7.311}$$

如若 $p \to \infty$ 时，$F(p) \to +\infty$（这从多方气体的情形可知），当 $p = p_m$ 时：

$$F(p_m) = F'(p_m) = F''(p_m) = 0$$

$$F'''(p_m) = \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f(p_m)}{\partial p^3}\left(-\frac{\partial f(p_m)}{\partial p}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f(p_m)}{\partial p^2}\right)^2\left(-\frac{\partial f(p_m)}{\partial p}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]$$
$$- \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g(p_m)}{\partial p^3}\left(-\frac{\partial g(p_m)}{\partial p}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 g(p_m)}{\partial p^2}\right)^2\left(-\frac{\partial g(p_m)}{\partial p}\right)^{-\frac{3}{2}}\right] \tag{7.312}$$

而据(7.219)式可知

$$\left(-\frac{\partial f(p_m)}{\partial p}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(-\frac{\partial g(p_m)}{\partial p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f(p_m)}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 g(p_m)}{\partial p^2}$$

故(7.312)式可写成

$$F'''(p_m) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial g(p_m)}{\partial p}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial^3 g(p_m)}{\partial p^3} - \frac{\partial^3 f(p_m)}{\partial p^3}\right] \neq 0 \tag{7.313}$$

$F'''(p_m)$的正负号取决于 $\partial^3 g(p_m)/\partial p^3$ 和 $\partial^3 f(p_m)/\partial p^3$，而 $F'''(p_m)$的正负则决定了曲线 L_r 和 L_m^+ 在(m)点，附近的上下关系，显然 $F'''(p_m)$可正可负。

当 $F'''(p_m)<0$ 时，L_m^+ 线在 L_r 线之上，这时 L_r 为图 7.72(b)所示的实线，过 L_m^+ 线上的(l)态点作 L_l 线，它与 L_r 的交点(m_*)便是所求的状态点。若(r)态点落在图示的 A 点，即有

$$\overleftarrow{S}_0\overrightarrow{R}_0 \longrightarrow \overleftarrow{R}J\overrightarrow{S} \tag{7.314.1}$$

若(r)态点落在图示的 B 点，即有

$$\overleftarrow{S}_0\overrightarrow{R}_0 \longrightarrow \overleftarrow{R}J\overrightarrow{R} \tag{7.314.2}$$

当 $F'''(p_m)>0$ 时，L_m^+ 线在 L_r 线之下，这时 L_r 为图 7.72(b)所示的虚线，过 L_m^+ 线上的(l)态点作 L_l 线，它与 L_r 线的交点(m_*)便是所求的状态点。若(r)态点落在图示的 D 点，即有

$$\overleftarrow{S}_0\overrightarrow{R}_0 \longrightarrow \overleftarrow{S}J\overrightarrow{S} \tag{7.314.3}$$

若(r)态点落在图示的 C 点，即有

$$\overleftarrow{S}_0\overrightarrow{R}_0 \longrightarrow \overleftarrow{S}J\overrightarrow{R} \tag{7.314.4}$$

注意，图 7.72(b)所示的 L_m^+、L_r、L_l 线，它们有的区段对应冲击波，有的区段对应稀疏波。但由于过同一点的冲击绝热曲线与等熵曲线是二级密接，所以 L_m^+、L_r、L_l 都成了“光滑”曲线，显不出分段光滑而成为“同一条”曲线了。当然波的类型不同，曲线的形状亦不同。不过，作为抽象讨论，就不再细分啦。

如果气体为多方气体，利用(7.222)和(7.221)式，则(7.311)式写成

$$F = F(p) = (p - p_m)\sqrt{\frac{2V_m}{(k+1)p + (k-1)p_m}} - \frac{2a_m}{k-1}\left[\left(\frac{p}{p_m}\right)^{\frac{k-1}{2k}} - 1\right]$$

不难看出，当 $p\to\infty$ 时，$F(p)\to+\infty$；而在 $p=p_m$ 时

$$F(p_m)=F'(p_m)=F''(p_m)=0$$

$$F'''(p_m)=\sqrt{\frac{2V_m}{k+1}}\left\{\frac{9}{4}\left(p+\frac{k-1}{k+1}p_m\right)^{-\frac{5}{2}}-\frac{15}{8}(p-p_m)\left(p+\frac{k-1}{k+1}p_m\right)^{-\frac{7}{2}}\right\}\Bigg|_{p=p_m}$$

$$-\frac{2a_m}{k-1}\frac{k-1}{2k}\frac{k+1}{2k}\frac{3k+1}{2k}\left(\frac{p}{p_m}\right)^{-\frac{5k+1}{2k}}\frac{1}{p_m^3}\Bigg|_{p=p_m}$$

$$=\frac{a_m}{kp_m^3}\frac{9}{4}\left(\frac{k+1}{2k}\right)^2-\frac{a_m}{kp_m^3}\frac{k+1}{2k}\frac{3k+1}{2k}=\frac{a_m}{p_m^3}\frac{k+1}{16k^3}(-3k+5) \quad (7.315)$$

$$F^{(4)}(p_m)=\sqrt{\frac{2V_m}{k+1}}\frac{15}{2}\left(\frac{k+1}{2k}\frac{1}{p_m}\right)^{\frac{7}{2}}-\frac{2a_m}{k-1}\frac{k-1}{2k}\frac{k+1}{2k}\frac{3k+1}{2k}\frac{5k+1}{2k}\frac{1}{p_m^4}$$

$$=\frac{a_m}{p_m^4}\frac{k+1}{16k^4}[15(k+1)^2-2(3k+1)(5k+1)]$$

$$=\frac{a_m}{p_m^4}\frac{k+1}{16k^4}[-15k^2+14k+13] \quad (7.316)$$

由如上两式看出：

当 $k<\frac{5}{3}$ 时，$F'''(p_m)>0$

当 $k=\frac{5}{3}$ 时，$F'''(p_m)=0$ ，$F^{(4)}(p_m)<0$

当 $k>\frac{5}{3}$ 时，$F'''(p)<0$

所以可以断定在 $p_m<p<p_m+\varepsilon$ 上(其中 ε 为大于零的某个小量)：

当 $k\geqslant\frac{5}{3}$ 时，$F(p)<0$ 或 $h_s(p)<h_R(p)$

当 $k<\frac{5}{3}$ 时，$F(p)>0$ 或 $h_s(p)>h_R(p)$

因此，当冲击波与稀疏波都不是太强时，则有

$$\left.\begin{aligned}&\text{当 } k\geqslant\frac{5}{3}\text{ 时，}\begin{cases}\text{稀疏波较弱，} & \vec{S}_0\vec{R}_0\longrightarrow\overleftarrow{S}J\vec{S}\\ \text{冲击波较弱，} & \vec{S}_0\vec{R}_0\longrightarrow\overleftarrow{S}J\vec{R}\end{cases}\\ &\text{当 } k<\frac{5}{3}\text{ 时，}\begin{cases}\text{稀疏波较弱，} & \vec{S}_0\vec{R}_0\longrightarrow\overleftarrow{R}J\vec{S}\\ \text{冲击波较弱，} & \vec{S}_0\vec{R}_0\longrightarrow\overleftarrow{R}J\vec{R}\end{cases}\end{aligned}\right\} \quad (7.317)$$

当冲击波与稀疏波都很强时

$$\left.\begin{aligned}&\text{对于稀疏波更强的情况：}\ \vec{S}_0\vec{R}_0\longrightarrow\overleftarrow{S}J\vec{R}\\ &\text{对于冲击波更强的情况：}\ \vec{S}_0\vec{R}_0\longrightarrow\overleftarrow{R}J\vec{S}\end{aligned}\right\} \quad (7.318)$$

对于稀疏波赶上冲击波的相互作用情况，完全与冲击波赶上稀疏波的相互作用情况一样。$\vec{R}_0\vec{S}_0$ 的作用结果同样有：$\overleftarrow{S}J\vec{S}$、$\overleftarrow{S}J\vec{R}$、$\overleftarrow{R}J\vec{R}$、$\overleftarrow{R}J\vec{S}$四种情况，并且在同样的条件下会产生同样的结果。

7.25 黎曼问题——初始间断的分解

在实际应用中有一种比单纯两个波相互作用更为广泛、更为重要的一维问题，——这就是所谓的黎曼问题(Riemann problems)。该问题的提法是这样：在$t=0$时刻，以$x=0$为界。在$x\geqslant 0$那部分的气体状态为(r)，即压力为p_r、密度为ρ_r、速度为v_r；在$x\leqslant 0$那部分气体状态为(l)，即压力为p_l、密度为ρ_l、速度为v_l。当然在$x=0$面的两边的介质不一定是气体，亦可为两块高速碰撞的物体(固体)。

黎曼问题与两个波(如两个冲击波)的相互作用问题的差别在于：黎曼问题问题除了在$t=0$时，左右两部分气体在$x=0$处接触外，状态完全是独立的，即p_r、ρ_r、v_r与p_l、ρ_l、v_l之间没有任何关系；而两波相互作用，在两波之间有个中间状态区，它将p_r、ρ_r、v_r与p_l、ρ_l、v_l联系起来。

黎曼问题之所以又称作初始间断分解问题，是由于在作用开始之后($t>0$)在$x=0$处的那个"强间断面"立即变成一个有限的压力与速度连续的区域。

7.25.1 特殊的黎曼问题——激波管

所谓激波管(shock tube)是在一个一维长管中以一个薄膜(图7.73(a)中的AB)为界，左边为静止高压气体，右边为静止低压气体，两种气体并不一定为同种气体。在$t=0$时其薄膜突然破裂，于是产生图7.73(a)所示的图像，向右边低压气体中传出一个向前冲击波$\vec{S}$，向左传出一个向后的稀疏波$\overleftarrow{R}$，之间形成一个相互作用区(m_*)。该问题之所以特殊，是因为在$t=0$时在$x=0$处$v_l=v_r=0$，而作为一般的黎曼问题，v_l与v_r不一定有关系。

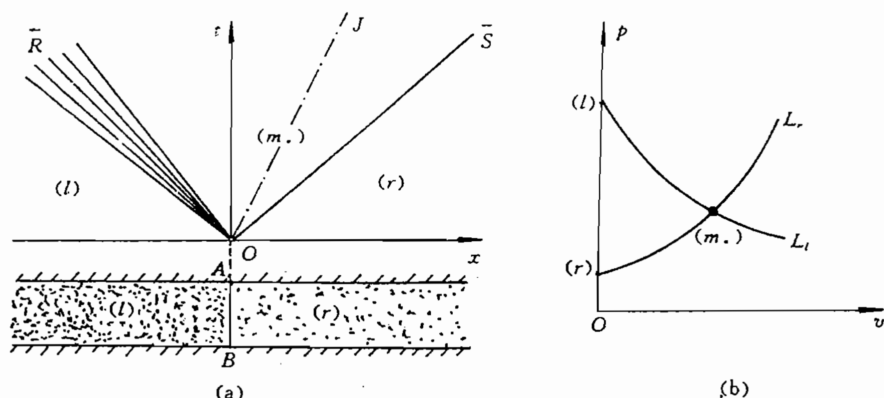


图 7.73

这两个不同状态区(l)与(r)相互作用则以"$(l)(r)$"来表示，作用结果表示为

$$(l)(r)\longrightarrow \overleftarrow{R}J\vec{S} \tag{7.319}$$

状态区(m_*)可以在(v,p)平面上图解，见图7.73(b)。如果(l)和(r)区的气体都是多方气体，(m_*)区的状态，v_*、p_*在分析上可以解如下方程组(参见(7.221)和(7.222)式)

$$v=-\frac{2a_l}{k_l-1}\left[\left(\frac{p}{p_l}\right)^{\frac{k_l-1}{2k_l}}-1\right] \tag{7.320.1}$$

$$v = (p - p_r)\sqrt{\frac{2V_r}{(k_r+1)p + (k_r-1)p_r}} \tag{7.320.2}$$

7.25.2 一般的黎曼问题

对于一般的黎曼问题，在 $t=0$ 时左右两部分气体在 $x=0$ 处发生作用，结果向左边的气体传出一个波 $\overleftarrow{w}_l$，向右边的气体也传出一个波 $\overrightarrow{w}_r$，并形成一个相互作用区 $(m.)$，$\overleftarrow{w}_l$ 和 $\overrightarrow{w}_r$ 可能为冲击波亦可能为稀疏波，这要视情况而定。

黎曼问题可以图解。在 (v,p) 平面上 $\overrightarrow{w}_r$ 以 L_r 曲线表示，L_r 线的方程为（参见式(7.215)和(7.217)）：

$$\left.\begin{aligned} v &= h_r(p) = v_r + \varphi_r(p) = v_r + \sqrt{(V_r - V)(p - p_r)} \\ V &= f_r(p, p_r, V_r), \quad (p \geqslant p_r) \end{aligned}\right\} \tag{7.321.1}$$

或

$$\left.\begin{aligned} v &= h_r(p) = v_r + \psi_r(p) = v_r + \int_{p_r}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p,S_r)\cdot a(p,S_r)} \\ \rho^{-1} &= V = g_r(p,S_r), \quad (p \leqslant p_r) \end{aligned}\right\} \tag{7.321.2}$$

在 (v,p) 平面上 $\overleftarrow{w}_l$ 以 L_l 曲线表示，L_l 线的方程为

$$\left.\begin{aligned} v &= h_l(p) = v_l - \varphi_l(p) = v_l - \sqrt{(V_l - V)(p - p_l)} \\ V &= f_l(p, p_l, V_l), \quad (p \geqslant p_l) \end{aligned}\right\} \tag{7.322.1}$$

或

$$\left.\begin{aligned} v &= h_l(p) = v_l - \psi_l(p) = v_l - \int_{p_l}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p,S_l)\cdot a(p,S_l)} \\ \rho^{-1} &= V = g_l(p,S_l), \quad (p \leqslant p_l) \end{aligned}\right\} \tag{7.322.2}$$

一旦 (l) 态和 (r) 态的压力和速度值给定，我们便可作出 L_l 和 L_r 曲线并确定出 $(m.)$ 状态。然而，由于 v_l, p_l, v_r, p_l 等取值大小不同，出现的情况亦不同。如下先分析两部分气体碰撞何时产生冲击波？何时产生稀疏波，然后再具体论证这两部分气体相互作用可能产生的若干情况与条件。

1. 分析 $\overleftarrow{w}_l$ 与 $\overrightarrow{w}_r$ 何时为冲击波，何时为稀疏波

① 状态 (r) 给出，于是在 (v,p) 平面上可按(7.321.1)和(7.321.2)成作出曲线 L_r，如图 7.74(a)所示。L_r 以 (r) 点为界，上一段对应方程(7.321.1)；下一段对应方程(7.321.2)。

如果状态 (l) 即点 (v_l, p_l) 在 L_r 的右边，则有

$$v_l > h_r(p_l) = v_r + \sqrt{(V_r - f_r(p_l))(p_l - p_r)}, \quad (p_l \geqslant p_r) \tag{7.323.1}$$

或

$$v_l > h_r(p_l) = v_r + \int_{p_r}^{p_l} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p,S_r)\cdot a(p,S_r)}, \quad (p_l \leqslant p_r) \tag{7.323.2}$$

过 (l) 点作曲线 L_l，它与 L_r 线的交点 $(m.)$ 显然在 (l) 点之上，即 $p. > p_l$，所以向 $x<0$ 的气体中传播的为左向冲击波，即 $\overleftarrow{w}_l = \overleftarrow{S}$。

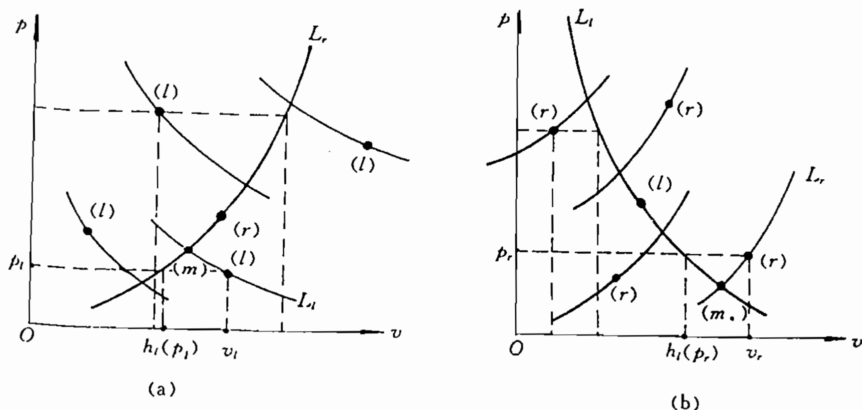


图 7.74

如果状态(l)在 L_r 的左边,则有

$$v_l < h_r(p_l) = v_r + \sqrt{(V_r - f_r(p_l))(p_l - p_r)}, \quad (p_l \geqslant p_r) \tag{7.324.1}$$

或

$$v_l < h_r(p_l) = v_r + \int_{p_r}^{p_l} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p,S_r)\cdot a(p,S_r)}, \quad (p_l \leqslant p_r) \tag{7.324.2}$$

过(l)点作曲线 L_l,它与 L_r 线的交点显然在(l)点之下,即 $p_* < p_l$,所以向 $x<0$ 的气体中传播的为左向稀疏波,即 $\overleftarrow{w}_l = \overleftarrow{R}$.

②状态(l)给出,于是在(v,p)平面上可按(7.322.1)和(7.322.2)式作出曲线 L_l,如图 7.74(b)所示。L_l 以(l)点为界,上一段对应方程(7.322.1);下一段对应方程(7.322.2)。

如果状态(r)即点(v_r,p_r)在 L_l 的右边,则有

$$v_r > h_l(p_r) = v_r - \sqrt{(V_l - f_l(p_r))(p_r - p_l)}, \quad (p_r \geqslant p_l) \tag{7.325.1}$$

或

$$v_r > h_l(p_r) = v_l - \int_{p_l}^{p_r} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p,S_l)\cdot a(p,S_l)}, \quad (p_r \leqslant p_l) \tag{7.325.2}$$

过(r)点作曲线 L_r,它与 L_l 线的交点(m_*)显然在(r)点之下,即 $p_* < p_r$,所以向 $x>0$ 的气体中传播的为稀疏波,即 $\vec{w}_r = \vec{R}$.

如果状态(r)在 L_l 的左边,则有

$$v_r < h_l(p_r) = v_l - \sqrt{(V_l - f_l(p_r))(p_r - p_l)}, \quad (p_r \geqslant p_l) \tag{7.326.1}$$

或

$$v_r < h_l(p_r) = v_l - \int_{p_l}^{p_r} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p,S_l)\cdot a(p,S_l)}, \quad (p_r \leqslant p_l) \tag{7.326.2}$$

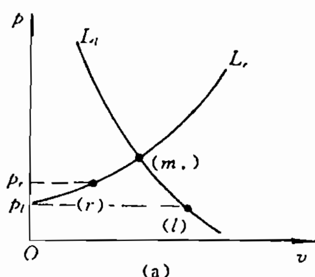
过(r)点作曲线 L_r,它与 L_l 线的交点显然在(r)点之上,即 $p_* > p_r$,所以向 $x>0$ 的气体中传播的为冲击波,即 $\vec{w}_r = \vec{S}$.

2. 具体分析两部分气体碰撞出现的几种可能与条件

①如果在(v,p)平面上(l)态在 L_r 的右边,而(r)态在 L_l 的左边,如图 7.75 所示,则按

如上分析，则向右、向左的气体中均传播冲击波，如图 7.76 所示，即有

$$(l)(r) \to \overleftarrow{S}J\overrightarrow{S} \tag{7.327}$$



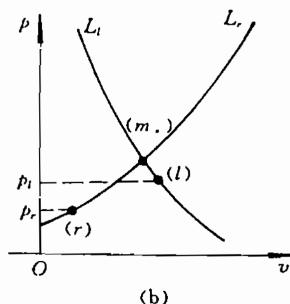


图 7.75

图 7.76

如下确定$(m.)$区的状态，并具体分析在这种情况下：p_l、p_r、v_l、v_r 应该满足的条件。在 $p_l \geqslant p_r$ 时，如图 7.75(b)所示，v_l 与 v_r 之间应满足什么关系？

由于(l)在 L_r 的右边、(r)在 L_l 的左边，且 $p_l \geqslant p_r$，则据(7.321.1)和(7.323.1)式、(7.322.2)和(7.326.2)式有

$$v_l > v_r + \varphi_r(p_l) \quad , \quad v_r < v_l - \psi_l(p_r)$$

即有

$$v_l - v_r > \varphi_r(p_l), \quad v_l - v_r > \psi_l(p_r)$$

而因

$$p_l \geqslant p_r, \quad \psi_l(p_r) = \int_{p_l}^{p_r} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p,S_l) \cdot a(p,S_l)} \leqslant 0, \quad \varphi_r(p_l) \geqslant 0$$

故在：$p_l \geqslant p_r$ 条件下，v_l 与 v_r 之间应满足

$$v_l - v_r > \varphi_r(p_l) \tag{7.328}$$

在如上条件下，初始间断分解后所产生的中间状态为$(m.)$，如图(7.76)所示，状态$(m.)$中的 $v.$、$p.$满足如下方程组(依据(7.321.1)和(7.322.1)式)

$$\left.\begin{aligned} v &= v_r + \varphi_r(p) \\ v &= v_l - \varphi_l(p) \end{aligned}\right\} \tag{7.329}$$

在 $p_l \leqslant p_r$ 时，如图 7.75(a)所示，v_l 与 v_r 之间应满足什么关系？

由于(l)在 L_r 的右边，(r)在 L_l 的左边，且 $p_l \leqslant p_r$，则据(7.321.2)和(7.323.2)式、(7.322.1)和(7.326.1)式有

$$v_l > v_r + \psi_r(p_l) \quad , \quad v_r < v_l - \varphi_l(p_r)$$

即有

$$v_l - v_r > \psi_r(p_l) \quad , \quad v_l - v_r > \varphi_l(p_r)$$

而因

$$p_l \leqslant p_r \quad , \quad \psi_r(p_l) \leqslant 0 \quad , \quad \varphi_l(p_r) \geqslant 0$$

故在：$p_l \leqslant p_r$ 条件下，v_l 与 v_r 之间应满足

$$v_l - v_r > \varphi_l(p_r) \tag{7.330}$$

在此条件下，v_* 和 p_* 满足如下方程组，(见(7.329)式)

$$\left.\begin{aligned} v &= v_r + \varphi_r(p) \\ v &= v_l - \varphi_l(p) \end{aligned}\right\} \tag{7.331}$$

②如果在(v,p)平面上(l)在 L_r 的右边，而(r)态也在 L_l 的右边，如图 7.77(a)所示，则按前面的分析，向左边的气体中传播的为冲击波；向右边的气体中传播的为稀疏波，如

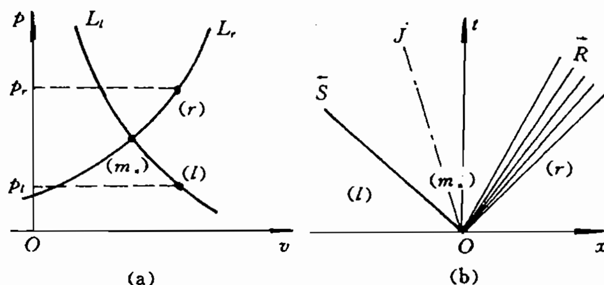


图 7.77

图 7.77(b)所示，即有

$$(l)(r) \longrightarrow \overleftarrow{S}J\overrightarrow{R} \tag{7.332}$$

由于(l)在 L_r 的右边，(r)亦在 L_l 的右边，故 $p_r > p_l$，则据(7.322.1)和(7.325.1)式、(7.321.2)和(7.323.2)有

$$v_r > v_l - \varphi_l(p_r) \qquad , v_l > v_r + \psi_r(p_l)$$

即 v_l 与 v_r 之间应满足

$$\varphi_l(p_r) > v_l - v_r > \psi_r(p_l) \tag{7.333}$$

其中

$$\varphi_r(p_l) = \int_{p_r}^{p_l} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p,S_r)\cdot a(p,S_r)} < 0$$

在如上的条件下，初始间断分解成的状态(m_*)中的 p_*、v_* 值满足如下方程组(依据(7.321.2)和(7.322.1)式)

$$\left.\begin{aligned} v &= v_r + \psi_r(p) \\ v &= v_l - \varphi_l(p) \end{aligned}\right\} \tag{7.334}$$

③如果在(v,p)平面上(l)在 L_r 的左边，而(r)亦在 L_l 的左边，如图 7.78(a)所示，在此情况下向左边的气体中传播的为稀疏波；向右边的气体中传播的为冲击波，如图 7.78(b)所示，即有

$$(l)(r) \longrightarrow \overleftarrow{R}J\overrightarrow{S} \tag{7.335}$$

由于(l)在 L_r 的左边、(r)亦在 L_l 的左边，故 $p_l > p_r$，则据(7.321.1)和(7.324.1)式、(7.322.2)和(7.326.2)式有

$$v_l < v_r + \varphi_r(p_l) \qquad , \quad v_r < v_l - \psi_l(p_r)$$

即 v_l 与 v_r 之间满足

$$\varphi_r(p_l) > v_l - v_r > \psi_l(p_r) \tag{7.336}$$

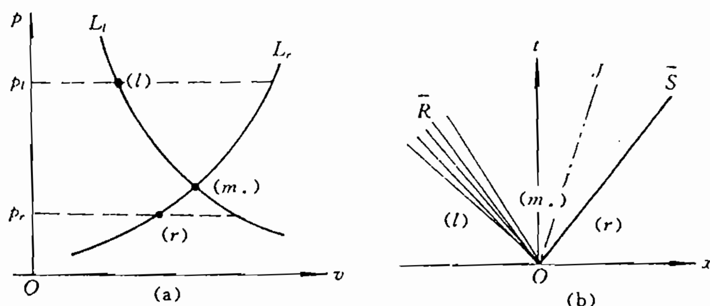


图 7.78

其中

$$\psi_l(p_r) < 0 \quad , \quad (p_l > p_r)$$

在此条件下，状态(m_*)中的v_*、p_*应满足如下方程组（依据(7.321.1)和(7.322.2)式）：

$$\left.\begin{aligned} v &= v_r + \varphi_r(p) \\ v &= v_l - \psi_l(p) \end{aligned}\right\} \tag{7.337}$$

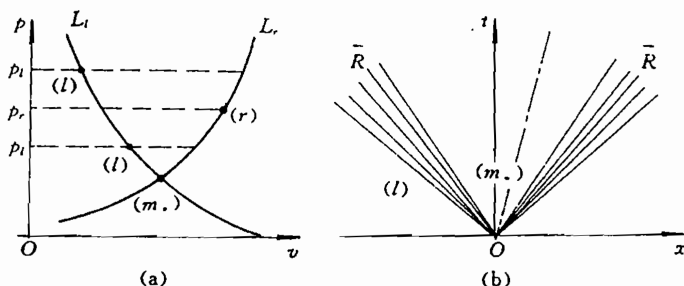


图 7.79

④如果在$(v、p)$平面上(l)在L_r的左边、(r)在L_l的右边，如图 7.79(a)所示，这时向左右两部分的气体中传入的均为稀疏波，但在这两个波之间可能形成相互作用区(m_*)，如图 7.79(b)所示；亦可能形成真空，如图 7.80(b)所示，如下分别研究：

a. 形成相互作用区(m_*)的条件

如果两部分气体相互作用能形成(m_*)区，则L_l曲线与L_r曲线在(v,p)的上半平面上有交点。而有无交点只须判断这两条曲线在v轴的交点左右就够了。由于L_r和L_l的下段都表示的为稀疏波，所以有（见(7.321.2)和(7.322.2)式）

$$\left.\begin{aligned} h_r(p) &= v_r + \psi_r(p) \\ h_l(p) &= v_l - \psi_l(p) \end{aligned}\right\}$$

当$p=0$时，则有

$$\left.\begin{aligned} h_r(0) &= v_r + \psi_r(0) \\ h_l(0) &= v_l - \psi_l(0) \end{aligned}\right\}$$

如果下式成立，则有交点，即满足

$$h_l(0) > h_r(0) \quad 即有 \quad v_l - v_r > \psi_r(0) + \psi_l(0) \tag{7.338}$$

如果下式满足，则无交点，即满足

$$h_l(0) < h_r(0) \quad 即有 \quad v_l - v_r < \psi_r(0) + \psi_l(0) \tag{7.339}$$

b. 在 $v_l - v_r > \psi_r(0) + \psi_l(0)$ 的条件下

在此条件下，L_l 与 L_r 在 (v, p) 的上半平面有交点。从而有如图 7.79(b)所示的结果：

$$(l)(r) \longrightarrow \overleftarrow{R}J\overrightarrow{R} \tag{7.340}$$

这两部分气体作用所形成中间状态区(m_*)中的 v_*、p_* 由如下方程组确定(见(7.321.2)和(7.322.2)式)

$$\left.\begin{aligned} v &= v_r + \psi_r(p) \\ v &= v_l - \psi_l(p) \end{aligned}\right\} \tag{7.341}$$

在这种条件下，v_r、v_l、p_r、p_l 之间应满足的关系。当 $p_l \geqslant p_r$ 时，据(7.321.1)和(7.324.1)式、(7.322.2)和(7.325.2)式，则有

$$v_l < v_r + \varphi_r(p_l) \quad , \quad v_r > v_l - \psi_l(p_r)$$

而因：$p_l \geqslant p_r$，　$\psi_l(p_r) < 0$，　$\varphi_r(p_l) > 0$，故由上式推出 v_l 与 v_r 之间应满足

$$\psi_r(0) + \psi_l(0) < v_l - v_r < \psi_l(p_r) \tag{7.342}$$

当 $p_l \leqslant p_r$ 时，据(7.321.2)和(7.324.2)式、(7.322.1)和(7.325.1)式，则有

$$v_l < v_r + \psi_r(p_l) \quad , \quad v_r > v_l - \varphi_l(p_r)$$

而因 $p_l \leqslant p_r$，　$\psi_r(p_l) < 0$，　$\varphi_l(p_r) > 0$，故由上式推出 v_l 与 v_r 之间应满足

$$\psi_r(0) + \psi_l(0) < v_l - v_r < \psi_r(p_l) \tag{7.343}$$

c. 在 $v_l - v_r < \psi_r(0) + \psi_l(0)$ 的条件下

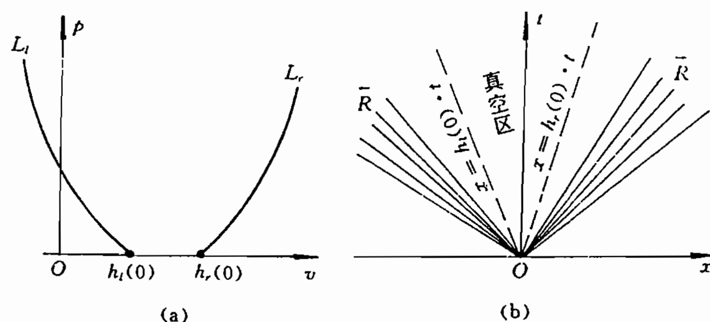


图 7.80

在此条件下，线 L_l 与 L_r 无交点，即两种气体之间形成真空，现以符号“V”表示真空，于是有

$$(l)(r) \longrightarrow \overleftarrow{R} \vee \overrightarrow{R} \tag{7.344}$$

⑤特殊情况。如上对两部分气体碰撞的四种情况做了研究，虽然在研究中隐含了特殊情况，但不明确，现专门考虑。

a. 当 $p_r = p_l$，$v_r < v_l$ 时，曲线 L_r 与 L_l 的交点在(r)态和(l)态点之上，如图 7.81(a)所示，这时两个区域作用的结果为

$$(l)(r) \longrightarrow \overleftarrow{S}J\overrightarrow{S} \tag{7.345}$$

b. 当 $p_r = p_l, v_r > v_l$ 时，曲线 L_r 与 L_l 的可能交点在 (r) 态和 (l) 态点之下，如图 7.81(b)所示，这时两个区域作用的结果为

$$(l)(r) \longrightarrow \begin{cases} \overleftarrow{R}J\overrightarrow{R}, & (L_r \text{ 与 } L_l \text{ 有交点}) \\ \overleftarrow{R} \vee \overrightarrow{R}, & (L_r \text{ 与 } L_l \text{ 无交点}) \end{cases} \tag{7.346}$$

c. 当 $v_r = v_l, p_r > p_l$ 时，曲线 L_r 与 L_l 的交点在 (r) 态和 (l) 态点之左，如图 7.81(c)所示，这时两个区域作用的结果为

$$(l)(r) \longrightarrow \overleftarrow{S}J\overrightarrow{R} \tag{7.347}$$

d. 当 $v_r = v_l, p_r \leqslant p_l$ 时，曲线 L_r 与 L_l 的交点在 (r) 态和 (l) 态点之右，如图 7.81(d)所示，这时两个区域作用的结果为

$$(l)(r) \longrightarrow \overleftarrow{R}J\overrightarrow{S} \tag{7.348}$$

e. 当 $v_r = v_l, p_r = p_l$ 时，初始间断（接触间断，密度等可能不等）始终保持，在左右两部分气体中不会形成波。

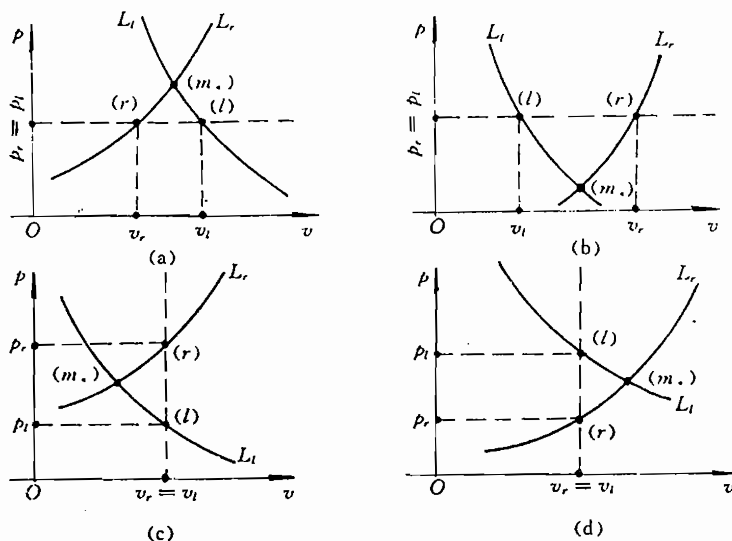


图 7.81

3. 碰撞的两部分气体为多方气体时的情况

如上研究的为作为一般气体的相互作用，现在考虑它们为多方气体。设 k_r、k_l 分别为右、左两部分气体的多方指数。在此情况下 $\varphi(p)$ 和 $\psi(p)$ 可表成（参见(7.320)两式）

$$\left.\begin{aligned} \varphi_r(p) &= (p - p_r)\sqrt{\frac{2V_r}{(k_r+1)p + (k_r-1)p_r}}, \quad (p \geqslant p_r) \\ \text{和} \quad \varphi_l(p) &= (p - p_l)\sqrt{\frac{2V_l}{(k_l+1)p + (k_l-1)p_l}}, \quad (p \geqslant p_l) \end{aligned}\right\} \tag{7.349}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi_r(p) &= \frac{2a_r}{k_r-1}\left[\left(\frac{p}{p_r}\right)^{\frac{k_r-1}{2k_r}}-1\right] \quad ,(p \leqslant p_r) \\ \text{和} \qquad \psi_l(p) &= \frac{2a_l}{k_l-1}\left[\left(\frac{p}{p_l}\right)^{\frac{k_l-1}{2k_l}}-1\right] \quad ,(p \leqslant p_l)\end{aligned}\right\} \tag{7.350}$$

由(7.350)式得到

$$\psi_r(0)+\psi_l(0) = -\left(\frac{2a_r}{k_r-1}+\frac{2a_l}{k_l-1}\right) \tag{7.351}$$

以下在多方气体的前提下，重新考虑上一段所述的各种情况。

①对于在(v,p)平面上(l)态在L_r的右边、(r)态在L_l的左边的情形，即：$(l)(r)\longrightarrow \overleftarrow{S}J\overrightarrow{S}$的情形。这时，保证此状态的$v_l$与$v_r$间应满足的关系式为(据(7.328)、(7.330)和(7.349)式)

$$v_l - v_r > (p_l - p_r)\sqrt{\frac{2V_r}{(k_r+1)p_l+(k_r-1)p_r}} \quad , \quad (p_l > p_r) \tag{7.352}$$

或

$$v_l - v_r > (p_r - p_l)\sqrt{\frac{2V_l}{(k_l+1)p_r+(k_l-1)p_l}} \quad , \quad (p_l < p_r) \tag{7.353}$$

相互作用区(m_*)中v_*、p_*所满足的方程(7.329)式变成

$$\left.\begin{aligned}v &= v_r + (p-p_r)\sqrt{\frac{2V_r}{(k_r+1)p+(k_r-1)p_r}} \\ v &= v_l - (p-p_l)\sqrt{\frac{2V_l}{(k_l+1)p+(k_l-1)p_l}}\end{aligned}\right\} \tag{7.354}$$

②对于在(v,p)平面上(l)在L_r的右边、(r)亦在L_l的右边的情形，即：$(l)(r)\longrightarrow \overleftarrow{S}J\overrightarrow{R}$的情形。这时，保证此状态的$v_l$与$v_r$间应满足的关系式为(据(7.333)、(7.349)和(7.350)式)

$$(p_r - p_l)\sqrt{\frac{2V_l}{(k_l+1)p_r+(k_l-1)p_l}} > v_l - v_r > \frac{2a_r}{k_r-1}\left[\left(\frac{p_l}{p_r}\right)^{\frac{k_r-1}{2k_r}}-1\right] \tag{7.355}$$

区域(m_*)中v_*、p_*所满足的方程(7.334)变为

$$\left.\begin{aligned}v &= v_r + \frac{2a_r}{k_r-1}\left[\left(\frac{p}{p_r}\right)^{\frac{k_r-1}{2k_r}}-1\right] \\ v &= v_l - (p-p_l)\sqrt{\frac{2V_l}{(k_l+1)p+(k_l-1)p_l}}\end{aligned}\right\} \tag{7.356}$$

③对于在(v,p)平面上(l)在L_r的左边、(r)亦在L_l的左边的情形，即：$(l)(r)\longrightarrow \overleftarrow{R}J\overrightarrow{S}$的情形。这时，保证此状态的$v_r$与$v_l$间应满足的关系式为(据(7.336)、(7.349)和(7.350)式)

$$(p_l - p_r)\sqrt{\frac{2V_r}{(k_r+1)p_l+(k_r-1)p_r}} > v_l - v_r > \frac{2a_l}{k_l-1}\left[\left(\frac{p_r}{p_l}\right)^{\frac{k_l-1}{2k_l}} - 1\right] \tag{7.357}$$

区域(m_*)中 v_*、p_* 所满足的方程(7.337)式成为

$$\left.\begin{aligned} v &= v_r + (p - p_r)\sqrt{\frac{2V_r}{(k_r+1)p+(k_r-1)p_r}} \\ v &= v_l - \frac{2a_l}{k_l-1}\left[\left(\frac{p}{p_l}\right)^{\frac{k_l-1}{2k_l}} - 1\right] \end{aligned}\right\} \tag{7.358}$$

④对于在(v,p)平面上(l)在 L_r 的左边、(r)在 L_l 的右边的情形，该情形分成两种情况。

a. 当有相互作用区(m_*)生成时，即有：$(l)(r)\longrightarrow \overleftarrow{R}J\overrightarrow{R}$的情形。这时，保证此状态的 v_l 与 v_r 间应满足的关系式(7.342)和(7.343)变成(参见(7.351)式)

$$-\left(\frac{2a_r}{k_r-1} + \frac{2a_l}{k_l-1}\right) < v_l - v_r < \frac{2a_l}{k_l-1}\left[\left(\frac{p_r}{p_l}\right)^{\frac{k_l-1}{2k_l}} - 1\right], \quad (p_l \geqslant p_r) \tag{7.359}$$

$$-\left(\frac{2a_r}{k_r-1} + \frac{2a_r}{k_r-1}\right) < v_l - v_r < \frac{2a_r}{k_r-1}\left[\left(\frac{p_l}{p_r}\right)^{\frac{k_r-1}{2k_r}} - 1\right], \quad (p_l \leqslant p_r) \tag{7.360}$$

区域(m_*)中的 v_*、p_* 所满足的方程(7.341)变成

$$\left.\begin{aligned} v &= v_r + \frac{2a_r}{k_r-1}\left[\left(\frac{p}{p_r}\right)^{\frac{k_r-1}{2k_r}} - 1\right] \\ v &= v_l - \frac{2a_l}{k_l-1}\left[\left(\frac{p}{p_l}\right)^{\frac{k_l-1}{2k_l}} - 1\right] \end{aligned}\right\} \tag{7.361}$$

b. 当无相互作用区(m_*)形成时，即：$(l)(r)\longrightarrow \overleftarrow{R} \vee \overrightarrow{R}$的情形，这时，保证此状态的 v_l 与 v_r 间应满足的关系式(7.339)变成(参见(7.351)式)

$$v_l - v_r < -\left(\frac{2a_r}{k_r-1} + \frac{2a_l}{k_l-1}\right) \tag{7.362}$$

7.26 活塞推动气体运动

在一个一维的无限长管中充满气体，管中有一活塞，它将以不同的变恒速推动右边的静止多方气体，气体的初始状态为状态(0)，该状态区中物理量为

$$v_0 = 0, p = p_0, \rho = \rho_0$$

7.26.1 第一种情况

在 $t=0$ 时刻，活塞先以 $u_1=\text{const}$ 的速度推动右边的多方气体，在 $t=t_0$ 时又改为以 $u_2=\text{const}$ 的速度，如图 7.82 所示。其中 $u_2>u_1$，求气体的运动。

在 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 期间，活塞的运动轨迹 $\mathscr{P}_1$：

$$x = u_1 t$$

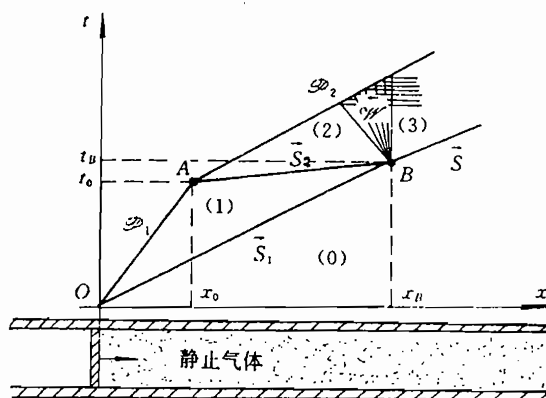


图 7.82

在 $t \geqslant t_0$ 之后活塞的运动轨迹 $\mathscr{P}_2$:

$$x = u_2(t - t_0) + x_0 = u_2(t - t_0) + u_1 t_0$$

在气体中首先产生一个以 N_1 速度传播的右行冲击波 $\vec{S}_1$,于是可以给出 $\vec{S}_1$ 的速度(参见(7.183)式)

$$N_1 = \frac{k+1}{4}u_1 + \sqrt{\frac{(k+1)^2}{16}u_1^2 + a_0^2}, \quad a_0^2 = kp_0/\rho_0 \tag{7.363}$$

以及 $\vec{S}_1$ 之后的区域(1)中的速度、压力、密度等

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= u_1 \\
p_1 &= -\frac{k-1}{k+1}p_0 + \frac{2}{k+1}\rho_0\left[\frac{k+1}{4}u_1 + \sqrt{\frac{(k+1)^2}{16}u_1^2 + a_0^2}\right]^2 \\
&= p_0 + \rho_0 u_1\left[\frac{k+1}{4}u_1 + \sqrt{\frac{(k+1)^2}{16}u_1^2 + a_0^2}\right] = p_0 + \rho_0 u_1 N_1 \\
\rho_1 &= \rho_0 + \frac{2\rho_0^2 u_1 N_1}{2kp_0 + (k-1)\rho_0 u_1 N_1} = \rho_0\left[1 + \frac{u_1 N_1}{a_0 + \frac{k-1}{2}u_1 N_1}\right] \\
a_1^2 &= a_0^2 + \frac{k-1}{2}u_1[2N_1 - u_1]
\end{aligned}\right\} \tag{7.364}$$

在 $t = t_0$ 时活塞的速度突变为 u_2,于是在气体中又产生第二个右行冲波 $\vec{S}_2$、同样可以给出冲击波速度 N_2 以及 $\vec{S}_2$ 之后的状态(参见(7.183)式)

$$N_2 = u_1 + \frac{k+1}{4}(u_2 - u_1) + \sqrt{\frac{(k+1)^2}{16}(u_2 - u_1)^2 + a_1^2} \tag{7.365}$$

$$v_2 = u_2$$

$$\left.\begin{aligned}p_2 &= p_1 + \rho_1(u_2 - u_1)N_2 \\ \rho_2 &= \rho_1\left[1 + \frac{(u_2 - u_1)N_2}{a_1^2 + \dfrac{k-1}{2}(u_2 - u_1)N_2}\right]\end{aligned}\right\} \tag{7.366}$$

如上可求得 $\vec{S}_1$ 和 $\vec{S}_2$ 的速度，从而可以写出它们的轨迹

$$x = N_1 t$$

$$x = u_1 t_0 + N_2(t - t_0)$$

于是可以确定 $\vec{S}_2$ 追上 $\vec{S}_1$ 的交点 B 的坐标为

$$\begin{cases} t_B = t_0 \dfrac{N_2 - u_1}{N_2 - N_1} \\ x_B = N_1 t_0 \dfrac{N_2 - u_1}{N_2 - N_1} \end{cases}$$

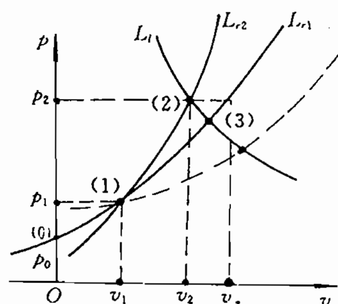


图 7.83

$\vec{S}_2$ 追上 $\vec{S}_1$ 后发生相互作用，产生反射波 $\overleftarrow{w}$ 和透射波 $\vec{S}$，并形成区域(3)，见图 7.82。由于 $\vec{S}_1$ 的波前状态(0)和 $\vec{S}_2$ 的波前状态(1)已知，故可在(v,p)平面上作图图解状态(3)，如图 7.83 所示。在(v,p)平面上过(0)点和(1)点所作的曲线分别为

$$L_{r1}:\quad v = (p - p_0)\sqrt{\frac{2V_0}{(k+1)p + (k-1)p_0}},\quad V_0 = \frac{1}{\rho_0} \tag{7.367}$$

$$L_{r2}:\quad v = v_1 + (p - p_1)\sqrt{\frac{2V_1}{(k+1)p + (k-1)p_1}},\quad V_1 = \frac{1}{\rho_1} \tag{7.368}$$

状态(2)当然在 L_{r2}上。由于 L_{r2}可能在 L_{r1}之上亦可能在 L_{r1}之下，因此生成的状态区(3)和反射波 $\overleftarrow{w}$均有两种可能(图 7.83 中实线代表一种可能，虚线代表另一种可能)。L_{r2}的上下取决于已知点(2)在 L_{r1}的左或右，判断点(2)的左、右可根据下式：

$$\begin{cases}\text{若 } v_2 < v_*\text{，则 } L_{r2} \text{ 在 } L_{r1} \text{ 之上，反射波为稀疏波 } \overleftarrow{w} = \overleftarrow{R}\text{，即图 7.82 所示} \\ \text{若 } v_2 > v_*\text{，则 } L_{r2} \text{ 在 } L_{r1} \text{ 之下，反射波为冲击波 } \overleftarrow{w} = \overleftarrow{S}\end{cases}$$

其中

$$v_* = (p_2 - p_0)\sqrt{\frac{2V_0}{(k+1)p_2 + (k-1)p_0}},\quad v_2 = u_2 \tag{7.369}$$

7.26.2 第二种情况

活塞先以 u_1 的速度运动，于是在静止气体中形成一个向前冲击波 $\vec{S}_1$，其波速 N_1 如式(7.363)所示。在 $t=t_0$ 时刻，即在图 7.84 的 A 点，活塞又以 u_2 的速度运动，$u_2<u_1$，于是在 A 点形成了一个向前的中心简单波，在该中心简单波区中有如下关系式成立

$$\left.\begin{aligned}x &= u_1 t_0 + (v + a)(t - t_0) \\ v - \frac{2a}{k-1} &= u_1 - \frac{2a_1}{k-1}\end{aligned}\right\} \tag{7.370}$$

中心稀疏波的波头 AB 和波尾 AC 为

$$AB: \quad x = u_1 t_0 + (v_1 + a_1)(t - t_0) = (u_1 + a_1)t - a_1 t_0 \qquad (7.371)$$

$$(v_1 = u_1, \quad a_1^2 = kp_1/\rho_1)$$

$$AC: \quad x = \left(a_1 + \frac{k+1}{2}v_2 - \frac{k-1}{2}u_1\right)t - \left[a_1 + \frac{k+1}{2}(v_2 - u_1)\right]t_0 \quad (7.372)$$

($v_2 = u_2$,在 $\mathscr{P}_2$ 附近无真空时)

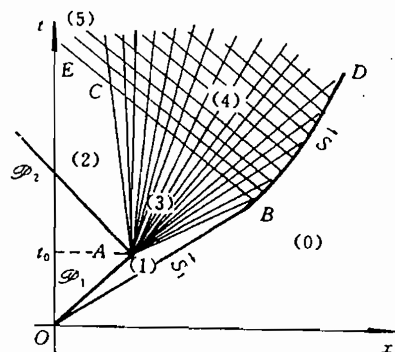


图 7.84

将方程(7.371)式与 $\vec{S}_1$ 的方程:$x=N_1 t$ 联立,可以求得 AB 与 $\vec{S}_1$ 的交点 B 的坐标

$$\left.\begin{aligned} x_B &= N_1 t_0 \frac{a_1}{u_1 + a_1 - N_1} \\ t_B &= t_0 \frac{a_1}{u_1 + a_1 - N_1} \end{aligned}\right\} \qquad (7.373)$$

在 B 点之后激波 $\vec{S}_1$(即 AB)由直线变成了曲线 BD(即 $\vec{S}$),在 BE 之上形成了相互作用区(4)。如下研究区域(4)的边界等,为了方便计,取:

$$k = 3 \qquad (7.374)$$

于是不管任何流动区,其特征线都是直线,图 7.84 所示的正是 $k=3$ 的情形。区域(4)的一条边界 BE 为左行特征线:

$$x - \frac{N_1 a_1 t_0}{u_1 + a_1 - N_1} = (u_1 - a_1)\left(t - \frac{a_1 t_0}{u_1 + a_1 - N_1}\right) \qquad (7.375)$$

将(7.372)式与上式联立起来,可以确定 AC 与 BE 的交点 C,然而可能存在三种情况:

a. 当 $u_2 > u_1 - a_1$ 时,联立方程有解,即 AC 与 BE 相交,交点为 C.

b. 当 $u_2 = u_1 - a_1$ 时,联立方程无解,即 AC 与 BE 平行。

c. 当 $u_2 < u_1 - a_1$ 时,联立方程无解,即 AC 与 BE 不相交,且在活塞轨迹 p_2 附近形成真空。这是由于右行中心简单波的波尾 AC 的极限斜率 $\left(\frac{dx}{dt}\right)_l$ 为

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_l = v_{\max} + a_{\min}, \qquad v_{\max} = u_1 - a_1, \qquad a_{\min} = 0$$

所以当活塞的速度:$u_2 < v_{\max} = u_1 - a_1$ 时,$\mathscr{P}_2$ 与 AC 之间为真空,而且这时:

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{AC} = v_{\max} = u_1 - a_1 = \frac{dx}{dt}\Big|_{BC}$$

即 AC 与 BE 平行不相交。

区域(4)的另一条边界 BD 为向前冲击波 $\vec{S}$,设该曲线的方程与其斜率即速度 N 为

$$x = g(t) = g, \quad N = \frac{dx}{dt} = g'(t) = g' \qquad (7.376)$$

冲击波 $\vec{S}$ 之前后的状态分别为

$$v_+ = v_0 = 0, \quad p_+ = p_0, \quad \rho_+ = \rho_0, \quad a_+ = a_0, \quad U_+ = N$$

$$v_- = v, \quad p_- = p, \quad \rho_- = \rho, \quad a_- = a = \sqrt{kp/\rho}, \quad U_- = N - v$$

根据冲击波的相容关系式，可以给出(参见(7.61.13)和(7.61.11)式，并考虑列 $k=3$)

$$\left.\begin{aligned} \frac{v}{a_0} &= \frac{1}{2}\left(\frac{N}{a_0} - \frac{a_0}{N}\right) \\ N^2 + a_0^2 &= (N - v)^2 + a^2 \end{aligned}\right\} \tag{7.377}$$

冲击波 $\vec{S}$上任一点也是从 A 点发出的一条 C_+特征线与它的交点，故在 $\vec{S}$上任一点有

$$\left.\begin{aligned} x &= g(t) \\ x &= x_0 + (v + a)(t - t_0) = u_1 t_0 + (v + a)(t - t_0) \end{aligned}\right\} \tag{7.378}$$

将(7.376)、(7.377)和(7.378)式联立起来，则推出 $\vec{S}$的轨迹微分方程

$$[(g')^2 - a_0^2] + \sqrt{[3(g')^2 - a_0^2][(g')^2 + a_0^2]} = 2g' \frac{g - u_1 t_0}{t - t_0} \tag{7.379}$$

将上式改成：

$$\frac{g - u_1 t_0}{t - t_0} = \frac{1}{2g'}\{[(g')^2 - a_0^2] + \sqrt{[3(g')^2 - a_0^2][(g')^2 + a_0^2]}\} = f(g')$$

将上式对 t 微分，得出

$$(t - t_0)g'' = \frac{g' - f(g')}{f'(g')}$$

而 $g' = N$，将上式积分

$$\int_{t_B}^{t} \frac{\mathrm{d}t}{t - t_0} = \int_{N_1}^{N} \frac{f'(N)}{N - f(N)}\mathrm{d}N$$

给出

$$\ln\left[\frac{a_1 + u_1 - N_1}{N_1 - u_1} \cdot \frac{t - t_0}{t_0}\right] = \int_{N_1}^{N} \frac{f'(N)}{N - f(N)}\mathrm{d}N \tag{7.380}$$

由此可求得 $N = g' = N(t)$函数，从而得到 $\vec{S}$的轨迹，即曲线 BD 的方程

$$x = \int_{t_B}^{t} N(t)\mathrm{d}t + N_1 t_B = g(t) \tag{7.381}$$

同时在 $N = N(t)$已知的情况下，便可由(7.377)式求得冲击波阵面上的 $v = v(t)$，$a = a(t)$. 在(4)区域中任何一条左行特征线 C_-都是 BD 上发出的。为了描述诸 C_-线，将 $x = g(t)$中的时间 t 换成 ξ，于是 $\vec{S}$的轨迹和波阵面上的 v 和 a，以及 C_-特征线表成

在 $\vec{S}$ 上：　　$t = \xi$，　$x = g(\xi)$、　$v = v(\xi)$、　$a = a(\xi)$

C_- 线方程：　　$x - g(\xi) = [v(\xi) - a(\xi)](t - \xi)$　　(7.382)

沿 C_- 线：　　$v(x,t) - a(x,t) = v(\xi) - a(\xi)$　　(7.383)

将如上两式与(7.378)式联立，便可求得区域(4)中的 $v = v(x,t)$和 $a = a(x,t)$. 然而式(7.380)和(7.381)很难积分，一般需要数值解。

7.26.3 第三种情况

活塞先以 $u_1 = \text{const} < 0$ 速度后撤，于是从 0 点发出一个向前的中心稀疏波。在 $t = t_0$ 时刻活塞又以 $u_2 = \text{const} > 0$ 速度向前推进，于是又产生一向前冲击波 AC，冲击波又与稀疏波相互作用，从而形成一系列的流动区域，如图 7.85 所示。

在如下的论述中，仍假定为多方气体，但不假定 k 为 3，即：$k\neq 3$. 在中心简单波区(1)中

$$\left.\begin{aligned} x &= (v+a)t \\ v-\frac{2a}{k-1} &= -\frac{2a_0}{k-1} \end{aligned}\right\} \qquad (7.384)$$

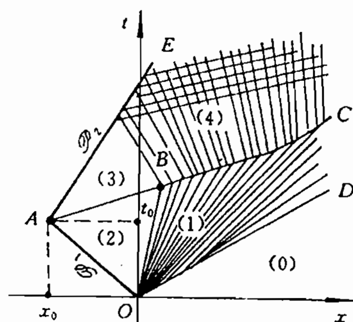


图 7.85

活塞的轨迹 $\mathscr{P}_1$、中心波的波头 OD、波尾 OB 分别为

$$\left.\begin{aligned} & x = u_1 t, \quad x = a_0 t, \\ & x = (v_2+a_2)t = \left(a_0+\frac{k+1}{2}u_1\right)t, \\ & v_2 = u_1 \end{aligned}\right\} \qquad (7.385)$$

在 $t=t_0$ 时刻，从 A 点形成一个向前冲击波 AB，已知该波前、后的几个量为

$$v_+ = v_2 = u_1, \quad a_+ = a_2 = a_0+\frac{k-1}{2}v_2 = a_0+\frac{k-1}{2}u_1, \quad v_- = v_3 = u_2$$

于是利用(7.365)式，可求得 AB 的速度 N_0 以及 AB 的方程

$$N_0 = u_1+\frac{k+1}{4}(u_2-u_1)+\sqrt{\frac{(k+1)^2}{16}(u_2-u_1)^2+\left(a_0+\frac{k-1}{2}u_1\right)^2} \qquad (7.386)$$

$$x = u_1 t_0 + N_0(t-t_0) \qquad (7.387)$$

区域(3)的状态，即冲击波后的状态为

$$\left.\begin{aligned} & v_3 = u_2 \\ & a_3^2 = \left(a_0+\frac{k-1}{2}u_1\right)^2+\frac{k-1}{2}\left[(u_1-N_0)^2-(u_2-N_0)^2\right] \end{aligned}\right\} \qquad (7.388)$$

利用(7.385)和(7.387)式可求得 AB 与 OB 的交点 B 的坐标

$$\left.\begin{aligned} x_B &= \frac{\left(a_0+\frac{k+1}{2}u_1\right)(N_0-u_1)t_0}{N_0-a_0-\frac{k+1}{2}u_1} \\ t_B &= \frac{t_0(N_0-u_1)}{N_0-a_0-\frac{k+1}{2}u_1} \end{aligned}\right\} \qquad (7.389)$$

在 B 点之后，由于冲击波与中心波相互作用，形成了简单波区(4)，同时冲击波亦由直线变成了曲线 BC，设 BC 的方程与运动速度 N 为

$$x = g(t), \quad N = N(t) = g'(t) \qquad (7.390)$$

区域(4)是个向后简单波，故在整个波区有下式成立

$$v+\frac{2}{k-1}a = v_3+\frac{2}{k-1}a_3 = u_2+\frac{2}{k-1}a_3 \qquad (7.391)$$

利用(7.384)式可以求解出冲击波 BC 之前的 v_+ 和 a_+ 的分布为

$$\left.\begin{aligned} v_+ &= \frac{2}{k+1}\left(\frac{x}{t} - a_0\right) \\ a_+ &= \frac{k-1}{k+1}\frac{x}{t} + \frac{2a_0}{k+1} \end{aligned}\right\} \tag{7.392}$$

于是利用(7.61.13)式，可推出 BC 之后的速度 v 的关系式

$$v = \frac{\frac{2}{k+1}\left(\frac{x}{t} - a_0\right) + \frac{2}{k+1}\left\{\left[N - \frac{2}{k+1}\left(\frac{x}{t} - a_0\right)\right]^2 - \left(\frac{k-1}{k+1}\frac{x}{t} + \frac{2a_0}{k+1}\right)^2\right\}}{N - \frac{2}{k+1}\left(\frac{x}{t} - a_0\right)} \tag{7.393}$$

在(7.392)和(7.393)式中的 x 和 t 当然均取在曲线 BC 上。利用(7.61.12)式又可写出 BC 之后侧的音速 a 与 N 和 v 的关系式

$$a^2 = \left(\frac{k-1}{k+1}\frac{x}{t} + \frac{2a_0}{k+1}\right)^2 + \frac{k-1}{2}\left\{\left[\frac{2}{k+1}\left(\frac{x}{t} - a_0\right) - N\right]^2 - (v - N)^2\right\} \tag{7.394}$$

将(7.391)式取在波阵面上并同(7.393)和(7.394)式联立，便可推出波阵面的微分方程。但为了简单起见，利用(7.392)式先将(7.393)和(7.394)式改写，则给出

$$\frac{v-N}{a_+} = -\left[\frac{k-1}{k+1}\frac{N-v_+}{a_+} + \frac{2}{k+1}\frac{a_+}{N-v_+}\right]$$

$$\begin{aligned} a^2 = \frac{1}{(k+1)^2(N-v_+)^2}\{&2k(k-1)(N-v_+)^4 \\ &- [4k - (k-1)^2]a_+^2(N-v_+)^2 - 2(k-1)a_+^4\} \end{aligned}$$

$$v = v_+ + \frac{2}{(k+1)(N-v_+)}[(N-v_+)^2 - a_+^2]$$

将如上两式代进(7.391)式中则给出 N 的方程

$$\begin{aligned} &u_2 + \frac{2a_3}{k-1} \\ &= v_+ + \frac{2}{(k+1)(N-v_+)}[(N-v_+)^2 - a_+^2] \\ &\quad + \frac{2}{k-1}\frac{1}{(k+1)(N-v_+)} \\ &\cdot\sqrt{2k(k-1)(N-v_+)^4 - [4k-(k-1)^2]a_+^2(N-v_+)^2 - 2(k-1)a_+^4} \end{aligned} \tag{7.395}$$

或者写利用(7.392)式、以及 $x=g=g(t)$、$N=g'=g'(t)$，则上式又可表成

$$\begin{aligned} u_2 + \frac{2a_3}{k-1} = \frac{2}{k+1}\left(\frac{g}{t} - a_0\right) + \frac{1}{\frac{k+1}{2}g' - \left(\frac{g}{t} - a_0\right)} \\ \cdot\left\{\left[g' - \frac{2}{k+1}\left(\frac{g}{t} - a_0\right)\right]^2 - \left(\frac{k-1}{k+1}\frac{g}{t} + \frac{2a_0}{k+1}\right)^2\right\} \\ + \frac{2}{k+1}\frac{1}{\frac{k+1}{2}g' - 2\left(\frac{g}{t} - a_0\right)} \end{aligned}$$

$$\cdot\left\{2k(k-1)[g'-\frac{2}{k+1}(\frac{g}{t}-a_0)]^4\right.$$

$$-[4k-(k-1)^2]\left(\frac{k-1}{k+1}\frac{g}{t}-\frac{2a_0}{k+1}\right)^2 \tag{7.396}$$

$$\left.\cdot[g'-\frac{2}{k+1}(\frac{g}{t}-a_0)]^2-2(k-1)(\frac{k-1}{k+1}\frac{g}{t}-\frac{2a_0}{k+1})^4\right\}^{\frac{1}{2}}$$

方程(7.395)或(7.396)式的初始条件为(7.389)式。

7.26.4 第四种情况

作为最后一种情况，活塞先以 $u_1=\text{const}<0$ 后撤，于是从 0 点发出一个向前的中心稀疏波 $\vec{R}_1$. 在 $t=t_0$ 时刻，活塞又改为 $u_2=\text{const}<u_1$ 更快后撤，于是从 A 点又发出第二个向前中心稀疏波 $\vec{R}_2$，如图 7.86 所示。由于 $\vec{R}_1$ 的波尾 OB 平行于 $\vec{R}_2$ 的波头 AC，所以两个稀疏波不会发生作用。

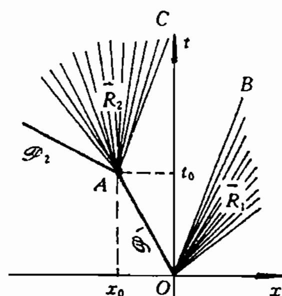


图 7.86

7.27 冲击波的形成

在 § 7.11 中我们曾简单提及活塞加速运动引起冲击波形成的问题，在那里只指出了形成冲击波的起点，本节将进一步研究形成的冲击波的轨迹。

同上一节一样，仍假定活塞推动右边的静止多方气体，气体的初态为

$$v_0=0, p=p_0, \rho=\rho_0, a=a_0$$

与上节不同的是活塞以加速运动，活塞的轨迹为

$$x=F(t),\quad F'(t)\geqslant 0,\quad F''(t)>0$$

在 $t=0$ 时

$$x=F(0)=0,\quad F'(0)=0$$

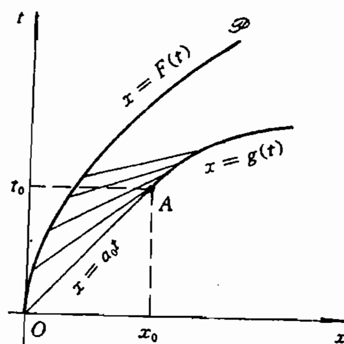


图 7.87

为了区别活塞轨迹 $\mathscr{P}$ 上的时间 t 与流场内任一点上的时间 t，将 $\mathscr{P}$ 上的 t 取成 w，于是活塞轨迹表成

$$x=F(w),\quad F'(w)\geqslant 0,\quad F''(w)>0$$

由于活塞前面的气体原为静止均匀的，当然也是等熵的，活塞运动后，将产生一个向前的简单波，所有的 C_+ 特征线都是从 $\mathscr{P}$ 上发出的直线，如图 7.87 所示，于是有

$$\begin{aligned}C_+:\quad x&=F(w)+(v+a)(t-w)\\&=F(w)+(a_0+\frac{k+1}{2}F'(w))(t-w)\end{aligned}\tag{7.397}$$

$$\text{沿 } C_+:\quad v(x,t)=\text{const}=v(w)=F'(w),\quad a(x,t)=\text{const}=a(w)\tag{7.398}$$

在整个波区有

$$v-\frac{2}{k-1}a=-\frac{2}{k-1}a_0\tag{7.399}$$

对(7.397)式所示的 x 求$\frac{\partial}{\partial v}$,则推出

$$\frac{\partial x}{\partial v}=\left[-\left(a_0+\frac{k-1}{2}F'\right)+\frac{k+1}{2}F''(t-w)\right]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}v} \tag{7.400}$$

当激波生成时,即$\frac{\partial x}{\partial v}=0$ 而$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}v}=1/F''(w)>0$,于是由上式推出激波生成的时间满足

$$\left[-(a_0+\frac{k-1}{2}F')+\frac{k+1}{2}F''(t-w)\right]=0$$

即有(亦可参见(7.126.2)式)

$$t=w+\frac{2}{k+1}\left[a_0+\frac{k-1}{2}F'(w)\right]/F''(w) \tag{7.401}$$

对于激波生成点,从诸 C_+特征线的走势来看,激波的起点则是诸 C_+特征线所形成的包络线的起点,而活塞从一开始就加速,所以从 0 点发出的首条特征线 OA 一定在激波起点与其相切,而 OA 特征线是从原点发出的,即该特征线对应 $w=0$,于是由上式推出激波起点的时间 t_0

$$t_0=\frac{2}{k+1}\left[a_0+\frac{k-1}{2}F'(0)\right]/F''(0)=\frac{2a_0}{(k+1)F''(0)} \tag{7.402.1}$$

激波的起点 x_0:

$$x_0=a_0t_0=\frac{2a_0^2}{(k+1)F''(0)} \tag{7.402.2}$$

7.27.1 对于弱激波情形的近似处理

现假定所形成的冲击波较弱。对于弱激波穿过它熵的跳跃为三级小量,因此在激波出现之后,在激波与活塞轨迹之间的流动区近似等熵,所以认为激波后的流动仍为右行简单波,因此式(7.399)依然成立;同时从 $\mathscr{D}$ 上的诸 C_+线都交于激波轨迹,从而在激波阵面的速度 v 和音速 a 满足

$$v=v(w)=F'(w),\quad a=a_0+\frac{k-1}{2}v=a_0+\frac{k-1}{2}F'(w) \tag{7.403}$$

将激波的轨迹:$x=g(t)$用参变量 w 表示,即将 x 写成 $x=Y(w)$、t 写成 $t=Z(w)$,而 x 与 w 的关系由(7.397)式已给出、但 t 与 w 的关系待定,总之

$$\left.\begin{aligned}&x=Y(w)=F(w)+\left[(a_0+\frac{k+1}{2}F'(w)\right][Z(w)-w]\\&t=Z(w)\end{aligned}\right\} \tag{7.404}$$

由上式可以得到以参数 w 表示的激波速度 N:

$$\begin{aligned}N=N(w)&=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{Y'(w)}{Z'(w)}\\&=\frac{\left(a_0+\frac{k+1}{2}F'\right)Z'+\frac{k+1}{2}F''Z-\left(a_0+\frac{k-1}{2}F'+\frac{k+1}{2}F''w\right)}{Z'}\end{aligned} \tag{7.405}$$

而根据激波阵面上的守恒关系式,N 又有如下关系(参见(7.363)式)

$$N=\frac{k+1}{4}F'+\sqrt{\left(\frac{k+1}{4}F'\right)^2+a_0^2} \tag{7.406}$$

将(7.405)和(7.406)式联立，则给未知函 $Z(w)$ 的方程如下

$$\left\{a_0+\frac{k+1}{4}F'-\sqrt{(\frac{k+1}{4}F')^2+a_0^2}\right\}Z'+\frac{k+1}{2}F''Z=a_0+\frac{k-1}{2}F'+\frac{k+1}{2}wF'' \tag{7.407}$$

该方程的初始条件，即(7.402.1)所给出的 t_0：

$$当\ w=0\ 时，\quad t=Z(0)=t_0=\frac{2a_0}{(k+1)F''(0)} \tag{7.408}$$

如下研究方程(7.407)的求解。在该方程中 $F=F(w)$ 当然是已知的，将该式两边同乘以因子 $\left\{a_0+\frac{k+1}{4}F'+\sqrt{(\frac{k+1}{4}F')^2+a_0^2}\right\}$，于是方程化成

$$F'Z'+F''\left[1+\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}+\sqrt{1+(\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0})^2}\right]Z$$

$$=\frac{2a_0}{k+1}\left[1+\frac{k-1}{2}\frac{F'}{a_0}+\frac{k+1}{2a_0}wF''\right]\left[1+\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}+\sqrt{1+\left(\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}\right)^2}\right] \tag{7.409}$$

令

$$\left.\begin{aligned}G=G(w)&=F''\left[1+\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}+\sqrt{1+\left(\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}\right)^2}\right]\\ H=H(w)&=\frac{2a_0}{k+1}\left[1+\frac{k-1}{2}\frac{F'}{a_0}+\frac{k+1}{2a_0}wF''\right]\\ &\quad\cdot\left[1+\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}+\sqrt{1+\left(\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}\right)^2}\right]\end{aligned}\right\} \tag{7.410}$$

于是(7.409)式写成

$$F'Z'+GZ=H \tag{7.411}$$

已知函数 $F=F(w)$：

$$\left.\begin{aligned}&在\ w=0\ 时，F(0)=0,F'(0)=0,F''(0)>0\\ &在\ w>0\ 时，F'(w)>0,F''(w)>0\end{aligned}\right\} \tag{7.412}$$

根据(7.412)式，可从(7.410)式看出

$$G=G(w)>2F''(w)>0,\quad H=H(w)>\frac{4a_0}{k+1}>0 \tag{7.413}$$

$$\frac{G(0)}{H(0)}=\frac{2a_0}{(k+1)F''(0)}=Z(0) \tag{7.414}$$

显然，由于 $F'(w)>0$，函数 $F(w)$ 还有如下性质

$$\int_0^w\frac{\mathrm{d}w}{F'(w)}=\infty,\quad (w>0) \tag{7.415}$$

方程(7.411)为一阶非齐次常微分方程，它的解为

$$Z=Z(w)=\mathrm{e}^{-\int_0^w\frac{G}{F'}\mathrm{d}w}\left(\int_0^w\frac{H}{F'}\mathrm{e}^{\int_0^w\frac{G}{F'}\mathrm{d}w}\mathrm{d}w+\text{const}\right)$$

利用函数 $F(w)$ 的(7.412)和(7.415)式的性质，通过比较繁杂的分析(详细推论过程，这

里从略，可参见文献[8]）可以确定出上式中的常数 const＝0，于是所要求的有意义的解为

$$Z = Z(w) = \exp\left(-\int_0^w \frac{G}{F'}\mathrm{d}w\right)\cdot\int_0^w\left[\frac{H}{F'}\exp\left(\int_0^w \frac{G}{F'}\mathrm{d}w\right)\right]\mathrm{d}w \tag{7.416}$$

将(7.410)式代进上式中，则给出

$$\begin{aligned}
Z= Z(w) &= \exp\left\{-\int_0^w \frac{F''}{F'}\left[1+\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}+\sqrt{1+\left(\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}\right)^2}\right]\mathrm{d}w\right\}\\
&\cdot\int_0^w\left\{\frac{2}{k+1}\frac{a_0}{F'}\left[1+\frac{k-1}{2}\frac{F'}{a_0}+\frac{k+1}{2a_0}wF'\right]\left[1+\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}+\sqrt{1+\left(\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}\right)^2}\right]\right.\\
&\left.\cdot\exp\left[\int_0^w\frac{F''}{F'}\left(1+\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}+\sqrt{1+\left(\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}\right)^2}\right)\mathrm{d}w\right]\right\}\mathrm{d}w
\end{aligned}\tag{7.417}$$

在上式中等式右边所含的两个指数的积分式可以积分出来，为此令函数 ξ 为：

$$\xi = \xi(w) = \frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}\quad ,\text{则 } \mathrm{d}\xi = \frac{k+1}{4}\frac{F''}{a_0}\mathrm{d}w$$

利用函数 ξ，式(7.417)中的指数积分式化为：

$$\begin{aligned}
&\int_0^w\frac{F''}{F'}\left[1+\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}+\sqrt{1+\left(\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}\right)^2}\right]\mathrm{d}w\\
&=\int_0^\xi\left[1+\xi+\sqrt{1+\xi^2}\right]\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}=\xi+\sqrt{1+\xi^2}+\ln\left(\sqrt{1+\xi^2}-1\right)\\
&=\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}+\sqrt{1+\left(\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}\right)^2}+\ln\left[\sqrt{1+\left(\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}\right)^2}-1\right]
\end{aligned}$$

将上式代进(7.417)式中并考虑到：$e^{\ln x}=x$ 的关系，则给出

$$\begin{aligned}
Z= Z(w) &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}\right)^2}-1}\cdot\exp\left[-\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}-\sqrt{1+\left(\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}\right)^2}\right]\\
&\cdot\int_0^w\left\{\frac{2}{k+1}\frac{a_0}{F'}\left[1+\frac{k-1}{2}\frac{F'}{a_0}+\frac{k+1}{2a_0}wF''\right]\left[1+\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}+\sqrt{1+\left(\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}\right)^2}\right]\right.\\
&\left.\cdot\left[\sqrt{1+\left(\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}\right)^2}-1\right]\exp\left[\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}+\sqrt{1+\left(\frac{k+1}{4}\frac{F'}{a_0}\right)^2}\right]\right\}\mathrm{d}w
\end{aligned}\tag{7.418}$$

将如上所求得的函数 $Z(w)$ 代进(7.404)式中，则给出了确定的冲击波轨迹的参数表达式，从而完成了问题的全部求解。

7.27.2 对于 $k=3$ 时的精确解法

如上所求得的分析解的前提是假定激波之后的整个区域等熵，这种近似只有在激波较弱时才成立。如果所形成的激波较强，连如上的那样的分析解也难求。然而，如果绝热指数

$$k = 3 \tag{7.419}$$

则不管所形成激波的强与弱，均可求得精确的分析解。

现所考虑的气体的初始状态与活塞的运动状况完全同上。在激波未形成之前，气体流

动依然等熵为简单波，即图 7.88 所示的 OAB 区为简单波，在整个 OAB 区域中或沿该区域中任一条 C_+ 特征线（如 QL），则有（参见（7.399）和（7.397）式，并考虑到 $k=3$）

$$v - a = - a_0 \tag{7.420}$$

$$\text{沿 } QL:\begin{cases} v = v(x,t) = v(w) = F'(w), \quad v + a = a(w) + v(w) & (7.421.1) \\ x = F(w) + (v + a)(t - w) = F(w) + (a_0 + 2F'(w))(t - w) & (7.421.2) \end{cases}$$

激波形成起点 A 的坐标为（参见（7.402.1）和（7.402.2）式，并考虑到 $k=3$）

$$\left.\begin{aligned} t_0 &= \frac{a_0}{2F''(0)} \\ x_0 &= \frac{a_0^2}{2F''(0)} \end{aligned}\right\} \tag{7.422}$$

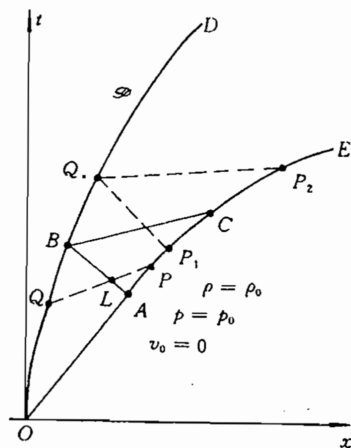


图 7.88

图 7.88 中的 AB 为一条 C_- 特征线，BC 为一条 C_+ 特征线。显然从激波轨迹 $x=g(x)$ 的 AC 段上任一点 P 向 t 减小方向作 C_+ 特征线均通过简单波区 OAB 而交于活塞轨迹 $\mathscr{P}$ 的 OB 段。反过来，从 $\mathscr{P}$ 的 OB 段上任一点作 C_+ 特征线均交于 OC 段。如上面所提到的 QL，它通过 ABC 区交于 AC 段于 P. 由于 $k=3$，则 LP 为直特征线 QL 的延长线，即有

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{LP} = (v + a)_{LP} = \text{const} = (v + a)_{QL} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{QL}$$

因此（7.421.2）式在 LP 段亦成立，当然交到 AC 上亦成立。于是问题归结成同 7.27.1 段一样，且仍将激波的 AC 段写成以 w 为参数的形式，即有（参见（7.404）和（7.421.2）式）

$$\left.\begin{aligned} t &= Z(w) \\ x &= Y(w) = F(w) + (a_0 + 2F'(w))(Z(w) - w) \end{aligned}\right\} \tag{7.423}$$

从而可按 7.27.1 段的做法，求得（参见（7.418）式）

$$\begin{aligned} Z(w) = &\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{F'}{a_0}\right)^2} - 1} \cdot \exp\left[-\frac{F'}{a_0} - \sqrt{1 + \left(\frac{F'}{a_0}\right)^2}\right] \\ &\cdot \int_0^w \left\{\frac{1}{2}\frac{a_0}{F'}\left[1 + \frac{F'}{a_0} + \frac{2wF''}{a_0}\right]\left[1 + \frac{F'}{a_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{F'}{a_0}\right)^2}\right]\right. \\ &\left.\cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{F'}{a_0}\right)^2} - 1\right] \cdot \exp\left[\frac{F'}{a_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{F'}{a_0}\right)^2}\right]\right\}\mathrm{d}w \end{aligned} \tag{7.424}$$

将上式代进（7.423）式中，则得到冲击波 AC 段的参数形式的方程。

在冲击波 AC 段的方程 $x=g(t)$ 求得后，当然就可求得激波速度 $N=N(t)$，然后根据激波关系式（7.183），便可求波阵面上的物理量。

关于 AC 之后那段的激波轨迹及其波阵面上的物理量，可以采用共轭方法（conjugate method）逐段求解，具体做法如下：

过 AC 的上任一点 P_1 作一条 C_- 特征线交 $\mathscr{P}$ 上于 Q_* 点，然后再过 Q_* 作一条 C_+ 特

征线交 CE 段于 P_2 点，如图 7.88 所示。点 P_2 的位置与激波阵面上的物理量便是我们要确定的。

P_1 点的位置及其波阵面上的物理量已知，它们为：

$$x = x_1,\quad t = t_1,\quad v = v_1,\quad p = p_1,\quad \rho = \rho_1,\quad a = a_1 = \sqrt{\frac{3p_1}{\rho_1}}$$

Q_* 点的坐标 (x_*, t_*) 由如下方程组确定

$$\left.\begin{aligned} x_* &= F(t_*) \\ x_* - x_1 &= (v_1 - a_1)(t_* - t_1) \end{aligned}\right\} \tag{7.425}$$

沿 P_1Q_* 有

$$v_* - a_* = v_1 - a_1,\quad v_* = F'(t_*)$$

即有

$$F'(t_*) - a_* = v_1 - a_1 \tag{7.426}$$

在 P_2 点激波阵面上的物理量与 Q_* 点上的物理量有如下关系

$$F'(t_*) + a_* = v_2 + a_2,\quad a_2 = \sqrt{\frac{3p_2}{\rho_2}} \tag{7.427}$$

而在 P_2 点上激波阵面上的物理量又满足（参见(7.183)式）

$$\left.\begin{aligned} &\rho_0(N_2 - v_0) = \rho_2(N_2 - v_2) \\ &p_0 + \rho_0(N_2 - v_0)^2 = p_2 + \rho_2(N_2 - v_2)^2 \\ &\frac{(N_2 - v_0)^2}{2} + \frac{kp_0}{(k-1)\rho_0} = \frac{(N_2 - v_2)^2}{2} + \frac{kp_2}{(k-1)\rho_2} \\ &v_0 = 0,\quad k = 3 \end{aligned}\right\} \tag{7.428}$$

将(7.426)、(7.428)和(7.427)式联立起来，便求得 P_2 点上的物理量：N_2、v_2、p_2、ρ_2、a_2. 即按此办法，可以求 AC 段之上的 CE 段上所有点上的物理量。

虽然 P_2 点的物理量连同激波轨迹在该点的斜率 N_2 已求得，但 P_2 点的坐标，即 CE 曲线还未确定。P_2 点的位置是这样确定的：首先将 P_1 取在 A 点附近，从而 P_2 点亦在 C 点附近，于是可按差分的办法确定出 P_2 点，因

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g'(t) = N,\text{而 } N_C = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_C = g(t_c) \text{ 已知}$$

于是 P_2 与 C 点之间有

$$x_2 - x_c = N_c(t_2 - t_c) \tag{7.429}$$

而 P_2 与 Q_* 点之间满足

$$x_2 - x_* = (v_2 + a_2)(t_2 - t_*) \tag{7.430}$$

将如上两式联立便求 P_2 点的位置。然后在 P_1 点附近再取一点 P_1'，从而在 P_2 点附近又有一待求点 P_2'，再做差分，并用 P_2' 与 Q_*' 之间的关系式（Q_*' 为过 P_1' 作 C_- 特征线与 $\mathscr{D}$ 的交点），即有

$$\left.\begin{aligned} x_2' - x_2 &= N_2(t_2' - t_2) \\ x_2' - x_*' &= (v_2' + a_2')(t_2' - t_*') \end{aligned}\right\} \tag{7.431}$$

上式求解，便确定出 P_2' 的位置。以此类推，便确定出 CE 曲线。

7.28　高压气体推动弹丸运动

设在一个无长管中，有一个单位截面的质量为 m_0 的固体（弹丸），固体的左边为高压气体 $v_0=0$，p_0、ρ_0、a_0，固体右边为真空，如图 7.89 所示。设活塞与管道之间没有摩擦，活塞在 $t=0$ 时刻，从 $x=0$ 处被气体推动，设固体的运动轨迹 OB 为

$$x = F(t)$$

为了区别轨迹 OB 上的时间 t 与流场中任一点上的时间 t，将取在 OB 上的 t 改为 w，即有

$$x = F(w), \quad F' = F'(w)$$

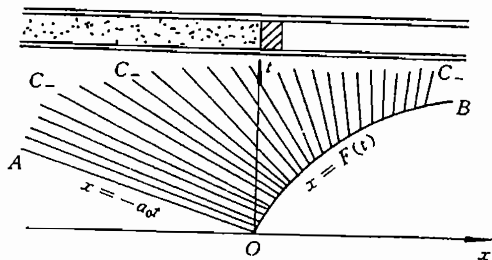


图 7.89

物体一运动，便在高压气体中产生一个左行简单波，在整个波区

$$v + \frac{2}{k-1}a = \frac{2}{k-1}a_0 \tag{7.432}$$

所有的 C_- 特征线都是从 OB 线上发出的，对于 C_- 特征线和沿 C_- 线则有

$$v = v(x,t) = F'(w) = F' \tag{7.433}$$

$$x - F(w) = (v-a)(t-w)$$
$$= \left(\frac{k+1}{2}F' - a_0\right)(t-w) \tag{7.434}$$

由于运动物体之后的气体等熵，从而存在

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{2k}{k-1}} \tag{7.435}$$

1. 求解弹丸的运动

由(7.432)、(7.433)和(7.435)式可以推出作用在弹丸(pellet)上的压力关系式：

$$p = p_0\left(1 - \frac{k-1}{2a_0}F'\right)^{\frac{2k}{k-1}} \tag{7.436}$$

于是可给出物体的运动方程为

$$m_0 F'' = p_0\left(1 - \frac{k-1}{2a_0}F'\right)^{\frac{2k}{k-1}} \tag{7.437}$$

该运动的初始条件为

$$w = 0 \text{ 时}\quad,\quad F(0) = 0\quad,\quad F'(0) = 0 \tag{7.438}$$

将(7.437)式作两次积分，并利用(7.438)式则给出固体的运动轨迹

$$x = F = F(w) = \frac{2a_0}{k-1}\left\{w + \frac{a_0 m_0}{p_0}\left[1 - \left(1 + \frac{k+1}{2a_0}\frac{p_0}{m_0}w\right)^{\frac{2}{k+1}}\right]\right\} \tag{7.439}$$

从上式可以看出物体运动的极限速度 N_L

$$N_L = \lim_{w\to\infty} F'(w) = \frac{2a_0}{k-1} \tag{7.440}$$

在 $F=F(w)$ 求得后，简单波区 AOB 的物理量分布可由如下关系式求得（参见

(7.432)——(7.435)式)

$$\left.\begin{aligned}
x &= F(w) + \left(\frac{k+1}{2}F'(w) - a_0\right)(t - w) \\
v &= F'(w) = \frac{2a_0}{k-1}\left[1 - \left(1 + \frac{k+1}{2a_0}\frac{p_0}{m_0}w\right)^{-\frac{k-1}{k+1}}\right] \\
a &= a_0 - \frac{k-1}{2}F'(w) \\
p &= p_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{2k}{k-1}} \\
\rho &= \rho_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{2}{k-1}}
\end{aligned}\right\} \tag{7.441}$$

在上式消去参数 w 后，便求得：$v=v(x,t)$、$a=a(x,t)$、$p=p(x,t)$ 和 $\rho=\rho(x,t)$ 函数关系。

2. 长管左端为固壁的情况

设在图 7.89 所示的长管左端为固壁，设固壁在 $x=-l$ 处。这时，在稀疏波波头 OA 在固壁反射的右行特征线 AE，在它之下的流动区域与物体运动的轨迹（见图 7.90），完全同如上所述的无限长管的情况。稀疏波头在固壁上反射时刻 t_0：

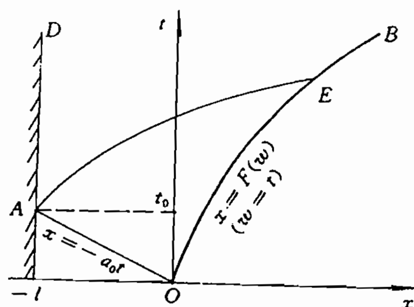


图 7.90

$$t_0 = l/a_0$$

现在确定稀疏波区 AOE 的边界，其中 AO 为：$x=-a_0t$、 OE 为：$x=F(t)=F(w)$，而 AE 为一条 C_+ 特征线：

$$\frac{dx}{dt} = v + a \tag{7.442}$$

将 x 和 t 看成以 w 为参数的形式，由于 AE 上的每一点亦是从 OE 上发出的一条 C_- 特征线的交点，故 x 可取成(7.434)式所示，$t=Y(w)$ 待定，即

$$\left.\begin{aligned}
x &= F(w) + \left(\frac{k+1}{2}F'(w) - a_0\right)(Y(w) - w) \\
t &= Y(w)
\end{aligned}\right\} \tag{7.443}$$

由式(7.432)、(7.433)、(7.442)和(7.443)，则推出 $Y(w)$ 所满足的方程

$$\begin{aligned}
&[2a_0 - (k-1)F'(w)]Y'(w) - \frac{k+1}{2}F''(w)Y(w) \\
&= -\frac{k+1}{2}F''(w)w - \frac{k-1}{2}F'(w) + a_0
\end{aligned} \tag{7.444}$$

其中 F' 和 F''，根据(7.439)式为

$$\left.\begin{aligned}
F'(w) &= \frac{2a_0}{k-1}\left[1 - \left(1 + \frac{k+1}{2a_0}\frac{p_0}{m_0}w\right)^{-\frac{k-1}{k+1}}\right] \\
F''(w) &= \frac{p_0}{m_0}\left(1 + \frac{k+1}{2a_0}\frac{p_0}{m_0}w\right)^{-\frac{2k}{k+1}}
\end{aligned}\right\} \tag{7.445}$$

将上式代进(7.444)式中给出

$$2a_0\left(1+\frac{k+1}{2a_0}\frac{p_0}{m_0}w\right)^{-\frac{k-1}{k+1}}Y'(w)-\frac{k+1}{2}\frac{p_0}{m_0}\left(1+\frac{k+1}{2a_0}\frac{p_0}{m_0}w\right)^{-\frac{2k}{k+1}}Y(w)$$
$$=-\frac{k+1}{2}\frac{p_0}{m_0}w\left(1+\frac{k+1}{2a_0}\frac{p_0}{m_0}w\right)^{-\frac{2k}{k+1}}+a_0\left(1+\frac{k+1}{2a_0}\frac{p_0}{m_0}w\right)^{-\frac{k-1}{k+1}}$$

上式化简后得出

$$\left.\begin{aligned}&2\left(1+\frac{k+1}{2a_0}\frac{p_0}{m_0}w\right)Y'-\frac{k+1}{2a_0}\frac{p_0}{m_0}Y=1\\&Y(0)=t_0=\frac{l}{a_0}\quad（初始条件）\end{aligned}\right\}\tag{7.446}$$

将如上方程积分则给出

$$t=Y(w)=-\frac{2a_0}{k+1}\frac{m_0}{p_0}+\left(t_0+\frac{2a_0}{k+1}\frac{m_0}{p_0}\right)\left(1+\frac{k+1}{2a_0}\frac{p_0}{m_0}w\right)^{\frac{1}{2}}\tag{7.447.1}$$

或写成

$$w=\frac{2a_0}{k+1}\frac{m_0}{p_0}\left[-1+\left[\frac{t+\dfrac{2a_0}{k+1}\dfrac{m_0}{p_0}}{t_0+\dfrac{2a_0}{k+1}\dfrac{m_0}{p_0}}\right]^2\right]\tag{7.447.2}$$

将如上两式与(7.443)的第一式联立，消去 w 后便求得图 7.90 所示的特征线 AE 的方程为

$$x=\frac{2a_0^2}{k-1}\frac{m_0}{p_0}\left[-\frac{2}{k+1}(1-\xi^2)+(1-\xi^{\frac{4}{k+1}})\right]$$
$$+a_0\frac{k+1}{k-1}\left[t+\frac{2a_0}{k+1}\frac{m_0}{p_0}(1-\xi^2)\right]\cdot\left[\frac{2}{k+1}-\xi^{-2\frac{k-1}{k+1}}\right]\tag{7.448.1}$$

或写成

$$x=\frac{2a_0}{k-1}\left[t-\frac{k+1}{2}t_0\xi^{\frac{3-k}{k+1}}\right]+\frac{2a_0^2}{k-1}\frac{m_0}{p_0}\left[1-\xi^{\frac{3-k}{k+1}}\right]\tag{7.448.2}$$

其中

$$\xi=\left(t+\frac{2a_0}{k+1}\frac{m_0}{p_0}\right)\left(t_0+\frac{2a_0}{k+1}\frac{m_0}{p_0}\right)^{-1}\tag{7.449.1}$$

特征线 AE 与物体轨迹 OB 的交点 E 的坐标为

$$t_E=w_E=2t_0+\frac{k+1}{2a_0}\frac{p_0}{m_0}t_0^2,\quad\left(t_0=\frac{l}{a_0}\right)\tag{7.449.2}$$

$$x_E=\frac{2a_0}{k-1}\left\{2t_0+\frac{k+1}{2a_0}\frac{p_0}{m_0}t_0^2+\frac{a_0m_0}{p_0}\left[1-\left(1+\frac{k+1}{2a_0}\frac{p_0}{m_0}t_0\right)^{\frac{4}{k+1}}\right]\right\}\tag{7.449.3}$$

从而简单波区 AOE 的各条边界就全部确了。物体轨迹的 OE 段同管左端无固壁情形一样仍由式(7.439)描述。但 EB 段则须另行处理，一般按数值解，特殊情形除外，如 § 7.30 所做。

7.29 敞口内弹道问题

在一个无限长管中的 OE_0 段即 $[-l,0]$ 区间装有高能炸药，炸药在 $t=0$ 时刻瞬时爆

轰(instantaneous detonation)，即立即变成爆轰产物，即变成如下状态的多方气体：

$$p = p_0、\rho = \rho_0、v = v_0、k = 3.$$

对于高能炸药(high-energy explosive)，爆轰产物(detonation products)的绝热指数 k 一般接近于 3. 在装药的左端($x=-l$)为真空，在装药的右端($x=0$)有一单位截面上的质量为 m_0 的弹丸，它的右边亦为真空，如图 7.91 所示。

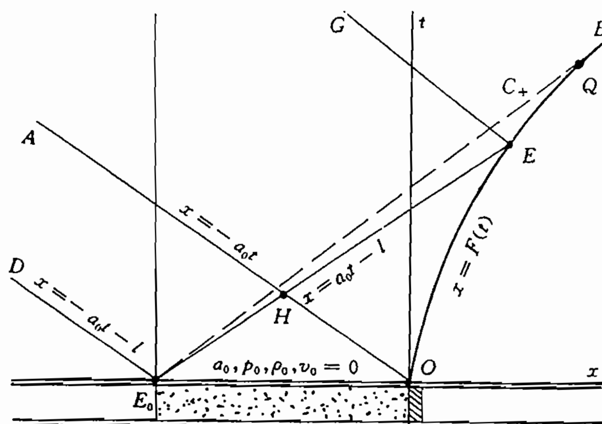


图 7.91

从 $t=0$ 开始产物气体向左面真空膨胀、向右推动弹丸，气体运动是等熵的，于是从 E_0 点形成一个向右的中心稀疏波；从 O 点开始产生一个向左简单波。由于波的相互作用再加上活塞运动则形成一系列的流动区，其中：E_0HO 为恒值区、DE_0HA 为中心简单波区、HOE 为简单波区、$AHEG$ 为一般流动区、GEB 亦为一般流动区。由于：$k=3$，故所有的特征线都是直线，不管它们处于何种流动区。

1. 在均匀区 E_0HO 中：$p=p_0$、 $\rho=\rho_0$、 $a=a_0$、 $v_0=0$；特征线 E_0E： $x=a_0t-l$；特征线 OA： $x=-a_0t$； H 点的坐标： $x=-l/2$、 $t=t_0/2=l/(2a_0)$；特征线 E_0D： $x=-a_0t-l$.

2. 弹丸在 OE 段运动，只受左行简单波作用，情况全同上节的情形，故(7.439)式成立，又考虑到 $k=3$，因而有

$$x = F(t) = a_0\left\{t + \frac{a_0m_0}{p_0}\left[1 - \left(1 + \frac{2p_0}{a_0m_0}t\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\} \tag{7.450}$$

从而有

$$F'(t) = a_0\left[1 - \left(1 + \frac{2p_0}{a_0m_0}t\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \tag{7.451}$$

$$F''(t) = \frac{p_0}{m_0}\left(1 + \frac{2p_0}{a_0m_0}t\right)^{-\frac{3}{2}} \tag{7.452}$$

直特征线 E_0E 与曲线 OE 的交点 E 的坐标为(参见(7.449.2)和(7.449.3)式，并注意 t_0 的取值，那里的 t_0 取值相当现在的一半)。

$$t_E = t_0 + \frac{1}{2a_0}\frac{p_0}{m_0}t_0^2,\quad x_E = \frac{p_0}{2m_0}t_0^2,\quad \left(t_0 = \frac{l}{a_0}\right) \tag{7.453}$$

3. 在左行简单波区 HOE 中

$$\left.\begin{aligned} &x = F(w) + [2F'(w) - a_0](t - w) \\ &v = F'(w) \\ &a = a_0 - F'(w) \\ &(\text{其中 } w \text{ 为取在 } OE \text{ 上的时间 } t) \end{aligned}\right\} \tag{7.454}$$

将(7.451)式中的 t 换成 w 后再代进(7.454)式的第三式中，则给出

$$1 + \frac{2p_0}{a_0 m_0}w = \left(\frac{a_0}{a}\right)^2,\quad w = \frac{a_0 m_0}{2p_0}\left[\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 - 1\right]$$

将(7.450)式中的 t 换成 w，并将上式代进该式中消去 w 后，则给出

$$x = F(w) = \frac{1}{2}\frac{a_0^2 m_0}{p_0}\left(\frac{a_0}{a} - 1\right)^2 \tag{7.455}$$

上式已把 $F(w)$ 化成 a 的函数，利用它可以把(7.454)式中的参数 w 换成 a，则有

$$\left.\begin{aligned} &v + a = a_0,\qquad a = \frac{1}{2}\left[a_0 - \frac{x - \dfrac{a_0^2 m_0}{2p_0}}{t + \dfrac{a_0 m_0}{2p_0}}\right] \\ &v - a = \frac{x - \dfrac{a_0^2 m_0}{2p_0}}{t + \dfrac{a_0 m_0}{2p_0}},\qquad v = \frac{1}{2}\left[a_0 + \frac{x - \dfrac{a_0^2 m_0}{2p_0}}{t + \dfrac{a_0 m_0}{2p_0}}\right] \end{aligned}\right\} \tag{7.456}$$

4. 在中心简单波区 DE_0HA 中有

$$x + l = (v + a)t,\qquad v - a = -a_0 \tag{7.457}$$

即有

$$v = \frac{1}{2}\left(\frac{x + l}{t} - a_0\right),\qquad a = \frac{1}{2}\left(\frac{x + l}{t} + a_0\right) \tag{7.458}$$

5. 现在研究 $AHEG$ 区。先求 GE 线，它是一条 C_- 特征线，利用(7.453)式和(7.456)式，便给出这条直线方程：

$$\begin{aligned} x &= x_E + (v_E - a_E)(t - t_E) \\ &= \frac{p_0}{2m_0}t_0^2 + \left(t - t_0 - \frac{1}{2a_0}\frac{p_0}{m_0}t_0^2\right)\frac{\dfrac{p_0}{2m_0}t^2 - \dfrac{a_0^2 m_0}{2p_0}}{t_0 + \dfrac{1}{2a_0}\dfrac{p_0}{m_0}t_0^2 + \dfrac{a_0 m_0}{2p_0}} \end{aligned}$$

化简之后便得到 GE 的方程为

$$x\left(t_0 + \frac{a_0 m_0}{p_0}\right) - a_0 t\left(t_0 - \frac{a_0 m_0}{p_0}\right) = \frac{a_0^2 m_0}{p_0}t_0 \tag{7.459}$$

在 $k=3$ 的情况下，在 $AHEG$ 区的两族特征线都是直线，它们可写成

$$x = (v + a)t + f_+(v + a) \tag{7.460.1}$$

$$x = (v - a)t + f_-(v - a) \tag{7.460.2}$$

如上的两个未定的积分函数 f_+和 f_-可以这样确定：将如上的第一式取在特征线 OA 的 HA 段上，这时据(7.457)式，则有

$$v+a=\frac{x+l}{t}$$

将上式代进(7.460.1)式中，则推出

$$x=x+l+f_+(v+a)$$
$$f_+(v+a)=-l$$

因而(7.460.1)式化成(化成下式是当然的，因它是中心简单波的 C_+特征线的延长线)

$$x=(v+a)t-l \tag{7.461.1}$$

将(7.460.2)式取在特征线 E_0E 的 HE 段上，这时该式中的 x 满足 $x=a_0t-l=a_0(t-t_0)$、而 v 和 a 满足(7.456)式，于是有

$$a_0(t-t_0)=\frac{a_0(t-t_0)-\dfrac{a_0^2m_0}{2p_0}}{t+\dfrac{a_0m_0}{2p_0}}t+f_-\left(\frac{a_0(t-t_0)-\dfrac{a_0^2m_0}{2p_0}}{t+\dfrac{a_0m_0}{2p_0}}\right)$$

从而推出

$$f_-\left(\frac{a_0(t-t_0)-\dfrac{a_0^2m_0}{2p_0}}{t+\dfrac{a_0m_0}{2p_0}}\right)=f_-(v-a)=\frac{a_0m_0}{2p_0}\left[a_0+\frac{a_0(t-t_0)-\dfrac{a_0^2m_0}{2p_0}}{t+\dfrac{a_0m_0}{2p_0}}\right]$$
$$=\frac{a_0m_0}{2p_0}[a_0+(v-a)]$$

将上式代进(7.460.2)中给出

$$x=(v-a)\left(t+\frac{a_0m_0}{2p_0}\right)+\frac{a_0^2m_0}{2p_0} \tag{7.461.2}$$

式(7.461.1)和(7.461.2)亦可写成

$$v+a=\frac{x+l}{t},\quad v-a=\frac{x-\dfrac{a_0^2m_0}{2p_0}}{t+\dfrac{a_0m_0}{2p_0}} \tag{7.462}$$

式(7.461.1)和(7.461.2)或者(7.462)便是相互作用区 $AHEG$ 的解。

6. 在一般流动区 GEB。在该区的两族特征线仍为(7.460.1)和(7.460.2)的形式，其中 $f_+=-l$，即 C_+特征线为(7.461.1)所示。但 f_-须弹丸在 EB 段的方程 $x=F(t)$确定之后才能确定。由于整个流动等熵且 $k=3$，故有

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{a}{a_0}\right)^3$$

所以弹丸的运动方程写成

$$m_0F''(t)=p_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^3$$

而在 EB 上任一点 Q 也是从 E_0 点发出的一条 C_+特征线的交点，故在 Q 点亦有

$$x=F(t)=(v+a)t-l,\quad v=F'(t)$$

将以上诸式联立消 a，则给出曲线 EB 的微分方程

$$p_0\left[\frac{F(t)+l}{t}-F'(t)\right]^3=m_0a_0^3F''(t) \tag{7.463}$$

曲线 EB 从 E 点出发；同时弹丸在 E 点即 t_E 时刻速度又是连续的，即 OE 段曲线在 E 点的斜率等于 EB 段曲线在 E 的斜率。所以上式中 $F(t)$ 的初始条件为：

在 $t=t_E=t_0+\dfrac{p_0}{2a_0m_0}t_0^2$ 时，有(参见(7.453)和(7.451)式)

$$\left.\begin{aligned}F(t_E)&=x_E=\frac{1}{2}\frac{p_0}{m_0}t_0^2\\F'(t_E)&=a_9\left[1-\left(1+\frac{2p_0}{a_0m_0}t_E\right)^{-\frac{1}{2}}\right]=\frac{\dfrac{p_0t_0}{m_0}}{1+\dfrac{p_0t_0}{a_0m_0}}\end{aligned}\right\} \tag{7.464}$$

下面求解方程(7.463)式。为了求解(7.463)式，需要作变换。先令

$$\xi=\frac{F(t)+l}{t}$$

则有

$$\left.\begin{aligned}\xi'&=\left(\frac{F(t)+l}{t}\right)'=-\frac{1}{t}\left[\frac{F(t)+l}{t}-F'(t)\right]\\\xi''&=\left(\frac{F(t)+l}{t}\right)''=-\frac{2}{t}\left(\frac{F(t)+l}{t}\right)'+\frac{F''(t)}{t}=-\frac{2}{t}\xi'+\frac{F''(t)}{t}\end{aligned}\right\} \tag{7.465}$$

利用如上两式可将(7.463)化成

$$t\xi''+2\xi'=-\frac{p_0t^3}{a_0^3m_0}(\xi')^3 \tag{7.466}$$

再作变换，并考虑到 $\xi'<0$，令

$$\eta=(\xi')^{-2},\quad 即\ \xi'=-\eta^{-\frac{1}{2}} \tag{7.467.1}$$

于是(7.466)式化成

$$\eta'-\frac{4}{t}\eta=\frac{2p_0}{a_0^3m_0}t^2 \tag{7.467.2}$$

将上式两边同除以 t^4 后则化成

$$\left(\frac{\eta}{t^4}\right)'=\frac{2p_0}{a_0^3m_0}\frac{1}{t^2}$$

将上式积分则求得

$$\eta=C_0t^4-\frac{2p_0}{a_0^3m_0}t^3 \tag{7.468}$$

其中 C_0 为未定的积分常数。根据 η 与 ξ、$F(t)$ 之间的关系再利用初始条件(7.464)式，则可定出常数 C_0，于是上式写成

$$\eta=t^4\left\{\frac{1}{a_0^2t_E^2}\left[2\left(1+\frac{p_0t_0}{a_0m_0}\right)^2-1\right]-\frac{2p_0}{m_0a_0^3}\frac{1}{t}\right\}$$

将上式代进(7.467)式中，再积分则给出

$$\frac{F(t)+l}{t}-a_0=\int_{t_E}^{t}\frac{-\mathrm{d}t}{t\sqrt{\frac{1}{a_0^2t_E^2}\left[2\left(1+\frac{p_0t_0}{m_0a_0}\right)^2-1\right]t^2-\frac{2p_0}{m_0a_0^3}t}} \tag{7.469}$$

上式积分后给出

$$\frac{F(t)+l}{t}-a_0=\frac{m_0a_0^2}{p_0t_E}\left\{-\frac{1}{t}\sqrt{\left[2\left(1+\frac{p_0t_0}{m_0a_0}\right)^2-1\right]t^2-\frac{2p_0t_E^2}{m_0a_0}t}+\left(1+\frac{p_0t_0}{m_0a_0}\right)\right\} \tag{7.470}$$

上式所求得的 $F(t)$，亦即 $x=F(t)$便是弹丸轨迹 EB 的方程。

根据上式和(7.462)式可以给出气体在 EB 线上的速度 v_*和音速 a_*：

$$\begin{aligned}v_*&=v(F(t),t)=F'(t)\\&=a_0+\frac{m_0a_0^2}{p_0t_E}(1+\frac{p_0t_0}{m_0a_0})\\&\quad-\frac{m_0a_0^2}{p_0t_E}\frac{[2(1+\frac{p_0t_0}{m_0a_0})^2-1]t-\frac{p_0t_E^2}{m_0a_0}}{\sqrt{[2(1+\frac{p_0t_0}{m_0a_0})^2-1]t^2-\frac{2p_0t_E^2}{m_0a_0}t}}\end{aligned} \tag{7.471}$$

$$\begin{aligned}a_*&=a(F(t),t)=\frac{F(t)+l}{t}-F'(t)\\&=\frac{a_0t_E}{\sqrt{[2(1+\frac{p_0t_0}{m_0a_0})^2-1]t^2-\frac{2p_0t_E^2}{m_0a_0}t}}\end{aligned} \tag{7.472}$$

现在来确定在 GEB 区中表示 C_-特征线的关系式(7.460.2)中的 $f_-(v-a)$：

因在该区诸 C_-特征线均发自 EB 曲线上，故将(7.460.2)式取在 EB 上，则有

$$x=F(t)=(v_*-a_*)t+f_-(v_*-a_*)$$

将从(7.470)式求得的 $F(t)$，连同(7.471)表示的 v_*及(7.472)表示的 a_*均代进上式便求得 $f_-(v_*-a_*)$，然后将 $f_-(v_*-a_*)=f_-(v-a)$代进(7.460.2)式中便给出在 GEB 区中的 C_-特征线的表达式为

$$\frac{x+l-\frac{B_2}{B_1}(a_0+B_3)}{t-\frac{B_2}{B_1}}=v-a \tag{7.473}$$

其中

$$B_1=2(1+\frac{p_0t_0}{m_0a_0})^2-1,\quad B_2=\frac{2p_0t_E^2}{m_0a_0},\quad B_3=\frac{m_0a_0^2}{p_0t_E})(1+\frac{p_0t_0}{m_0a_0}) \tag{7.474}$$

式(7.461.1)与(7.473)联立起来便确定了 GEB 区中的函数 $v(x,t)$和 $a(x,t)$。

7. 产物气体对弹丸 m_0 的冲量 I 和所做的功 W

由于管为无限长，则产物气体对弹丸作一维推动的时间亦是无限长的，由(7.471)式可以推出弹丸的极限速 v_L：

$$v_L = \lim_{t\to\infty} v_* = a_0 + \frac{m_0 a_0^2}{p_0 t_0} \cdot \frac{1 + \dfrac{p_0 t_0}{m_0 a_0} - \sqrt{2(1 + \dfrac{p_0 t_0}{m_0 a_0})^2 - 1}}{1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{p_0 t_0}{m_0 a_0}} \tag{7.475}$$

气体对弹丸的冲量为

$$I = \int_0^t p\mathrm{d}t = \int_0^t m_0 F''(t)\mathrm{d}t = m_0 F'(t) - m_0 F'(0) = m_0 F'(t) \tag{7.476}$$

(注:在如上积分中,如果 $t > t_E$, $F''(t)$ 为分段函数,但因在 $t = t_E$ 点 $F'(t_E)$ 是连续的,故对积分结果无影响,不须分段积分。)

由(7.476)式则推出气体给弹丸的极限冲量(即总冲量) I_L 为

$$I_L = \lim_{t\to\infty} I = m_0 \cdot \lim_{t\to\infty} F'(t) = v_L m_0$$

气体对弹丸所做的功 W 以及总功 W_L 为

$$W = \int_0^t pF'(t)\mathrm{d}t = \int_0^t m_0 F''(t)F'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}m_0[F'(t)]^2$$

$$W_L = \lim_{t\to\infty} W = \frac{1}{2}m_0 v_L^2$$

本节对于抛掷问题的处理是按装药瞬时炸轰;对于装药按正常炸轰的做法,请看§11.8的头一部分。

7.30 闭口内弹道问题

本节所研究的问题与上节的差别在于管的左端不再为真空,而是个固壁,即在 D 点($x = -l$ 处)为刚壁,如图 7.92 所示。除此之外全同上节,亦假定高压气体为绝热指数:$k = 3$ 的多方气体等熵流动,其初始始状态亦即在①区的状态为

$$p = p_0, \quad \rho = \rho_0, \quad a = a_0, \quad v = v_0 = 0$$

其中 OA 为一条左行特征线;$x = -a_0 t$

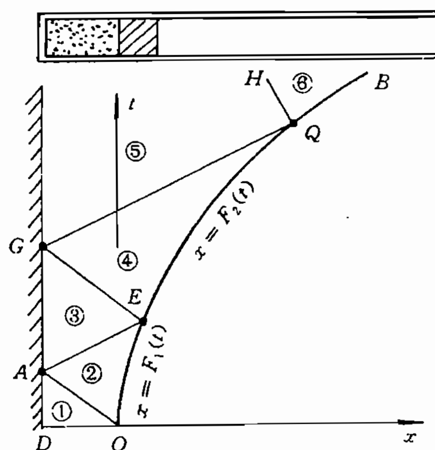


图 7.92

1. 区域②是个左行简单波区。在该区域中

$$v + a = a_0, \quad AE \text{ 为}: x + 2l = a_0 t$$

弹丸在 OE 段只受左行简单波的作用,情况同§7.28节,故(7.439)式成立,在 $k=3$ 时为

$$x = F_1(t) = a_0\left\{t + \frac{a_0 m_0}{p_0}\left[1 - (1 + \frac{2p_0}{a_0 m_0}t)^{\frac{1}{2}}\right]\right\} \tag{7.477}$$

直线 AE 与曲线 OE 的交点 E 的坐标为(见(7.449.2)和(7.449.3)式)

$$x_E = 2\frac{p_0 t_0^2}{m_0}, \quad t_E = 2t_0(1 + \frac{p_0 t_0}{a_0 m_0}), \quad (t_0 = \frac{l}{a_0})$$

于是按照上节的做法,在区域②中的状态可表成(见(7.456)式)

$$v+a=a_0,\quad v-a=\frac{x-\dfrac{a_0^2m_0}{2p_0}}{t+\dfrac{a_0m_0}{2p_0}} \tag{7.478}$$

而

$$v_E=F_1'(t_E)=a_0\frac{\dfrac{2p_0t_0}{a_0m_0}}{1+\dfrac{2p_0t_0}{a_0m_0}},\quad a_E=a(t_E)=a_0-v_E \tag{7.479}$$

直特征线 EG 的方程为 $x-x_E=(v_E-a_E)(t-t_E)$，亦即

$$x-2\frac{p_0t_0^2}{m_0}=a_0\frac{\dfrac{2p_0t_0}{a_0m_0}-1}{\dfrac{2p_0t_0}{a_0m_0}+1}\left(t-2t_0-2\frac{p_0t_0^2}{a_0m_0}\right) \tag{7.480}$$

该直线的斜率为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v-a=v_E-a_E=a_0\frac{\dfrac{2p_0t_0}{a_0m_0}-1}{\dfrac{2p_0t_0}{a_0m_0}+1} \tag{7.481}$$

若$\dfrac{2p_0t_0}{a_0m_0}\geqslant1$，则 EG 与端壁 $x=-l$ 无交点；如果$\dfrac{2p_0t_0}{a_0m_0}<1$，则 EG 与 $x=-l$ 直线交于 G 点，在该点的坐标与物理量为

$$\left.\begin{aligned}&x_G=-l,\quad t_G=t_0\frac{3+\dfrac{2p_0t_0}{a_0m_0}}{1-\dfrac{2p_0t_0}{a_0m_0}}\\&v_G=0,\quad a_G=a_0\frac{1-\dfrac{2p_0t_0}{a_0m_0}}{1+\dfrac{2p_0t_0}{a_0m_0}}\end{aligned}\right\} \tag{7.482}$$

2. 区域③是个一般流动区。由于 $k=3$，则在区域②的左行直特征线一直延续到该区域，即(7.478)的第二式在该区照样成立：

$$v-a=\frac{x-\dfrac{a_0^2m_0}{2p_0}}{t+\dfrac{a_0m_0}{2p_0}} \tag{7.483}$$

在该区的右行特征 C_+ 均发自固壁，故有

$$x=(v+a)(t-\xi)+l \tag{7.484}$$

其中 ξ 为取在固壁上的时间 t，它可利用(7.483)式来确定，将该式取在固壁上，即

$$x=-l,\quad t=\xi,\quad v=v_\Delta=0,\quad a=a_\Delta$$

将这些值代进(7.483)式中则推出

$$a_\Delta\xi+a_\Delta\frac{a_0m_0}{2p_0}=l+\frac{a_0^2m_0}{2p_0}$$

利用上式，再考虑 $k=3$ 时沿 C_+ 特征线：$v+a\equiv a_\Delta$，于是式(7.484)写成

$$v+a=\frac{x+2l+\dfrac{a_0^2m_0}{2p_0}}{t+\dfrac{a_0m_0}{2p_0}} \tag{7.485}$$

将(7.483)和(7.485)式联立起来，便确定区域③中的函数：$v(x,t)$和 $a(x,t)$。

3. 在一般流动区域④中。在区域③中表示 C_+ 特征线的(7.485)式在该区依然成立，并且这些 C_+ 特征线均交于弹丸的 EQ 段轨迹：$x=F_2(t)$. 将式(7.485)取 EQ 上，即有

$$x=F_2(t),\quad v=v_*=F_2'(t),\quad a=\frac{F_2(t)+2l+\dfrac{a_0^2m_0}{2p_0}}{t+\dfrac{a_0m_0}{2p_0}}-F'(t)=a_* \tag{7.486}$$

而流动等熵，故有

$$\frac{p_*}{p_0}=\left(\frac{a_*}{a_0}\right)^3=\frac{1}{a_0^3}\left[\frac{F_2(t)+2l+\dfrac{a_0^2m_0}{2p_0}}{t+\dfrac{a_0m_0}{2p_0}}-F'(t)\right]^3$$

于是可写出 EQ 段的弹丸运动方程

$$m_0F_2''(t)=\frac{p_0}{a_0^3}\left[\frac{F_2(t)+2l+\dfrac{a_0^2m_0}{2p_0}}{t+\dfrac{a_0m_0}{2p_0}}-F_2'(t)\right]^3 \tag{7.487}$$

为了求解如上方程需要做变换，为方便计，先令

$$\eta=2l+\frac{a_0^2m_0}{2p_0},\quad \tau=t+\frac{a_0m_0}{2p_0} \tag{7.488}$$

于是(7.487)式表成

$$m_0F_2''(t)=\frac{p_0}{a_0^3}\left[\frac{F_2(t)+\eta}{\tau}-F_2'(t)\right]^3 \tag{7.489}$$

再令

$$\frac{1}{W^2}=\left(\frac{F_2(t)+\eta}{\tau}\right)' \tag{7.490}$$

于是(7.489)式化成

$$W'-\frac{4}{\tau}W=\frac{2p_0}{a_0^3m_0}\tau^2 \tag{7.491}$$

而(7.486)式所示的 a_* 表成

$$a_*=\frac{F_2(t)+\eta}{\tau}-F_2'(t)=-\frac{1}{\tau}\left[\frac{F_2(t)+\eta}{\tau}\right]'>0 \tag{7.492}$$

方程(7.491)的初始条件为

$$t=t_E\text{时},\tau=\tau_E,\quad F_2(\tau_E)=F_E,\quad W(\tau_E)=W_E$$

将(7.491)式积分，求解

$$W=\left(\frac{W_E}{\tau_E^4}+\frac{2p_0}{m_0a_0^3}\frac{1}{\tau_E}\right)\tau^4-\frac{2p_0}{m_0a_0^3}\tau^3-\frac{F_2(\tau)+\eta}{\tau}+\frac{F_E+\eta}{\tau_E}$$

$$= \frac{m_0 a_0^3}{p_0}\left[\frac{1}{\tau}\sqrt{\left(\frac{W_E}{\tau_E^4}+\frac{2p_0}{m_0 a_0^3}\frac{1}{\tau_E}\right)\tau^2-\frac{2p_0}{m_0 a_0^3}\tau}-\frac{\sqrt{W_E}}{\tau_E^2}\right]$$

将 W 再换成 $F_2(t)$ 则有

$$F_2(\tau)+\eta-\frac{F_E+\eta}{\tau_E}\tau=\frac{m_0 a_0^3}{p_0}\left\{\frac{\sqrt{W_E}}{\tau_E^2}\tau-\sqrt{A_0\tau^2-B_0\tau}\right\} \tag{7.493}$$

$$F_2'(\tau)-\frac{F_E+\eta}{\tau_E}=\frac{m_0 a_0^3}{p_0}\left\{\frac{\sqrt{W_E}}{\tau_E^2}+\frac{A_0\tau-\frac{1}{2}B_0}{\sqrt{A_0\tau^2-B_0\tau}}\right\} \tag{7.494}$$

$$v-a=v_*-a_*=2F_2'(t)-\frac{F_2(t)+\eta}{\tau}$$

$$=\frac{F_E+\eta}{\tau_E}+\frac{m_0 a_0^3\sqrt{W_E}}{p_0\tau_E^2}-\frac{m_0 a_0^3}{p_0}\frac{A_0\tau}{\sqrt{A_0\tau^2-B_0\tau}} \tag{7.495}$$

在如上诸式中

$$A_0=\left(\frac{W_E}{\tau_E^4}+\frac{2p_0}{m_0 a_0^3}\frac{1}{\tau_E}\right),\quad B_0=\frac{2p_0}{m_0 a_0^3} \tag{7.496}$$

如上求得了区域④的边界 EQ 的方程(7.493)和在该区域中沿 C_+ 成立 $v-a$ 关系式(7.495)，于是可以利用如上这些关系式确定出在该区的 C_- 特征线的表达式 $x=(v-a)t+f_-(v-a)$ 中的 $f_-(v-a)$，将该式取在 EQ 上则有 $F_2(\tau)=(v_*-a_*)\tau+f_-(v_*-a_*)$，从而推出

$$f_-(v-a)=f_-(v_*-a_*)=-\eta+\frac{2\tau}{\sqrt{A_0\tau^2-B_0\tau}}$$

$$=-\eta+\frac{B_0}{A_0}\left[\left(\frac{F_E+\eta}{\tau_E}+\frac{m_0 a_0^3\sqrt{W_E}}{p_0\tau_E^2}\right)-(v-a)\right]$$

于是在区域④中的 C_- 特征线表成

$$v-a=\frac{x+\eta-\frac{B_0}{A_0}\left(\frac{F_E+\eta}{\tau_E}+\frac{2\sqrt{W_E}}{B_0\tau_E^2}\right)}{t+t_*-\frac{B_0}{A_0}} \tag{7.497}$$

$$t_*=\frac{a_0 m_0}{2p_0},\quad \eta=2l+\frac{a_0^2 m_0}{2p_0} \tag{7.498}$$

利用(7.498)式，可将在该区亦成立的(7.485)式表成

$$v+a=\frac{x+\eta}{t+t_*} \tag{7.499}$$

将(7.497)和(7.499)式联立便求得区域④中的 $v=v(x,t)$ 和 $a=a(x,t)$。将如上所令取的一系列的中间量代进曲线 EQ 的方程(7.493)中，便给出 EQ 的显示表达式

$$x=F_2(t)=-2l-\frac{a_0^2 m_0}{2p_0}+a_0\frac{3+\frac{2p_0t_0}{a_0m_0}}{1+\frac{2p_0t_0}{a_0m_0}}\left(t+\frac{a_0m_0}{2p_0}\right)$$

$$-\frac{2a_0}{1+\frac{2p_0t_0}{a_0m_0}}\sqrt{2\left(t+\frac{a_0m_0}{2p_0}\right)^2-\frac{a_0m_0}{2p_0}\left(1+\frac{2p_0t_0}{a_0m_0}\right)^2\left(t+\frac{a_0m_0}{2p_0}\right)} \qquad (7.500)$$

在这里：

$$t \geqslant t_E = 2t_0 + \frac{2p_0t_0^2}{a_0m_0}, \quad x \geqslant x_E = \frac{2p_0t_0^2}{a_0m_0}, \quad t_0 = \frac{l}{a_0}$$

4. 在区域⑤中。在该区域中表示 C_- 特征线的式(7.497)照样成立；而在该区的 C_+ 特征线可按在区域②中求 C_+ 线的做法，即根据在壁上：$x=-l, v=v_\Delta=0, v+a=v_\Delta+a_\Delta=a_\Delta$，并利用 $v_\Delta-a_\Delta=-a_\Delta=v_\cdot-a_\cdot$（见(7.495)式），则求得 C_+ 特征线。总之，在该区有

$$v+a=\frac{x+2l+\xi}{t+\lambda} \qquad (7.501)$$

$$v-a=\frac{x-\xi}{t+\lambda} \quad \text{（见(7.497)式）} \qquad (7.502)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{a_0^2m_0}{4p_0}\left(1+\frac{4p_0^2t_0^2}{a_0^2m_0^2}\right) \\ \lambda &= \frac{a_0m_0}{4p_0}\left[2-\left(1+\frac{2p_0t_0}{a_0m_0}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \qquad (7.503)$$

5. 在区域⑤之后的情况。如果特征线 GQ 不与 EB 相交，当然就没有反射的 C_- 特征线 QH 存在，也不会再形成其他区域，$x=F_2(t)$ 则是 $t\geqslant t_E$ 的弹丸运动轨迹。

如果 GQ 与 EB 相交，则又会形成区域⑥，然后再重复以上的做法，便可求得该段弹丸轨迹 QB 的函数 $x=F_3(t)$，以及该区的解，以此类推。所求得的分段函数 $x=F_i(t)$（其中 $i=1,2,\cdots$）在分界点处都是一阶连续（即在分界点上弹丸的速度连续。）

如果炮管的长度有限，总长度为 $l+L$，则令

$$x=F_i(t)=L$$

便可求出弹丸出炮口的时间 t_L，并可求得炮弹的出口速度 $v_L=F_i'(t_L)$。

6. 附加说明

由于弹丸之后的气体为绝热指数 $k=3$ 的多方气体等熵运动，所以各个区域中的两族特征线都是直线，正如如上所述。在各个分区（除了恒值区①以外）的正、负特征线的分析表达式均有一个共同特点——它们均呈下述形式：

对 C_+：$\dfrac{x-X_i^+}{t-T_i^+}=v+a=\text{const}$，（$i=1,2,\cdots$ 为各分区标号） (7.504)

对 C_-：$\dfrac{x-X_i^-}{t-T_i^-}=v-a=\text{const}$，（$i=1,2,\cdots$ 为各分区标号） (7.505)

其中 $T_i^+\equiv\text{const}, T_i^-\equiv\text{const}, X_i^+\equiv\text{const}, X_i^-\equiv\text{const}$，但这些量在不同分区可能取不同值。

对于(7.504)式所示 C_+ 特征线族，它们显然是从点 (X_i^+, T_i^+) 发出的射线束；对于式(7.505)所示 C_- 特征线族，它们显然是从点 (X_i^-, T_i^-) 发出的射线束。总之，它们均为有心的直线族。

具体地，对于区域②即 OAE 区的 C_- 特征线表达式(7.478)化成

$$\frac{x - X_2^-}{t - T_2^-} = v - a = \text{const} \quad (\text{沿同一条 } C_- \text{ 线}) \tag{7.506}$$

该特征线族的心点为 P_2，它为虚点、如图 7.93 所示，该点的坐标为

$$x = X_2^- = \frac{a_0^2 m_0}{2p_0}, \quad t = T_2^- = -\frac{a_0 m_0}{2p_0}$$

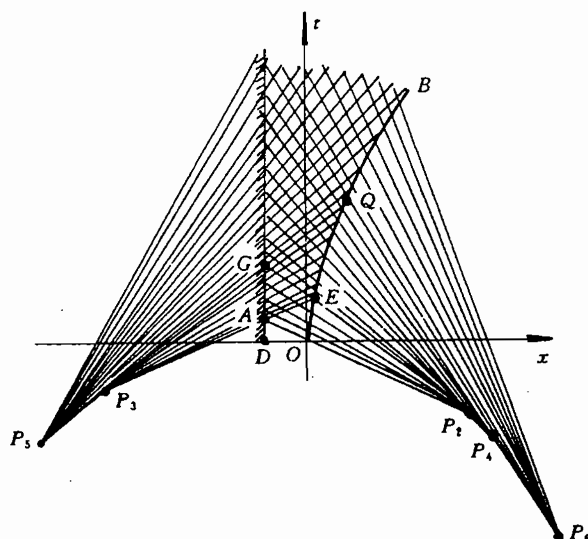


图 7.93

对于区域③(即 AEG 区)的 C_-特征线表达式即(7.506)式，其 C_+特征线表达式(7.485)可表成

$$\frac{x - X_3^+}{t - T_3^+} = v + a = \text{const} \quad (\text{沿同一条 } C_+ \text{ 线}) \tag{7.507}$$

该特征线族的心点为 P_3，亦为虚点，该点的坐标为

$$x = X_3^+ = -2l - \frac{a_0^2 m_0}{2p_0}, \quad t = T_3^+ = -\frac{a_0 m_0}{2p_0}$$

对于区域④即 EQG 区的 C_+特征线表达式，即(7.507)形式，其 C_-特征线表达式(7.497)化成

$$\frac{x - X_4^-}{t - T_4^-} = v - a = \text{const} \quad (\text{沿同一条 } C_- \text{ 线}) \tag{7.508}$$

该特征线族的心点为 P_4，亦为虚点，该点的坐标为

$$x = X_4^- = -\eta + \frac{B_0}{A_0}\left[\frac{F_E + \eta}{\tau_E} + \frac{2\sqrt{W_E}}{B_0 \tau_E}\right] = \frac{a_0^2 m_0}{4p_0}\left(1 + \frac{4p_0^2 t_0}{a_0^2 m_0^2}\right)$$

$$t = T_4^- = -t_* + \frac{B_0}{A_0} = -\frac{a_0 m_0}{4p_0}\left[2 - \left(1 + \frac{2p_0 t_0}{a_0 m_0}\right)^2\right]$$

对于区域⑤即 GQH 区的 C_-特征线的表达式即(7.508)形式，其 C_+特征线表达式(7.501)化成

$$\frac{x - X_5^+}{t - t_5^+} = v + a = \text{const} \quad (\text{沿同一条 } C_+ \text{ 线})$$

该特征线族的心点为 P_5，亦为虚点，该点的坐标为

$$x = X_5^+ = -2l - \frac{a_0^2 m_0}{4p_0}\left(1 + \frac{4p_0^2 t_0^2}{a_0^2 m_0^2}\right)$$

$$t = T_5^+ = -\frac{a_0 m_0}{4p_0}\left[2 - \left(1 + \frac{2p_0 t_0}{a_0 m_0}\right)^2\right]$$

同理，还可以确定区域⑥的左行特征线的中心点 P_6，以此继续下去。

本部分主要参考文献[8]

附录 7.1

关于不定线法的特征线定义与经典气动中的定义等价

设特征曲面为

$$F = F(x,y,z,t) = 0 \tag{A1}$$

或写成

$$z = f(x,y,t) \tag{A2}$$

亦即有

$$F = F(x,y,z,t) = z - f(x,y,t) = 0 \tag{A3}$$

1. 物理量在特征面上的取值

速度 $\boldsymbol{v}$、压力 p、密度 ρ 取在特征面为 $\boldsymbol{v}_*$、p_*、ρ_*，其关系为

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(x,y,z,t)\big|_{z=f(x,y,t)} &= \boldsymbol{v}(x,y,f(x,y,t),t) = \boldsymbol{v}_*(x,y,t)\\
p(x,y,z,t)\big|_{z=f(x,y,t)} &= p(x,y,f(x,y,t),t) = p_*(x,y,t)\\
\rho(x,y,z,t)\big|_{z=f(x,y,t)} &= \rho(x,y,f(x,y,t),t) = \rho_*(x,y,t)
\end{aligned}\right\} \tag{A4}$$

2. $\boldsymbol{v}$、p、ρ 的各偏导数在特征面上的取值，与 $\boldsymbol{v}_*$、p_*、ρ_* 的各偏导数的关系

据上式，则有

$$\left.\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_\Delta + \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\right|_\Delta \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_*}{\partial t} &\Rightarrow \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_\Delta = \frac{\partial \boldsymbol{v}_*}{\partial t} - \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\right|_\Delta \frac{\partial f}{\partial t}\\
\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_\Delta + \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\right|_\Delta \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_*}{\partial x} &\Rightarrow \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right|_\Delta = \frac{\partial \boldsymbol{v}_*}{\partial x} - \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\right|_\Delta \frac{\partial f}{\partial x}\\
\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}\right|_\Delta + \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\right|_\Delta \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_*}{\partial y} &\Rightarrow \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}\right|_\Delta = \frac{\partial \boldsymbol{v}_*}{\partial y} - \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\right|_\Delta \frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{A5.1}$$

$$\left.\begin{aligned}
\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_\Delta + \left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_\Delta \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial p_*}{\partial t} &\Rightarrow \left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_\Delta = \frac{\partial p_*}{\partial t} - \left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_\Delta \frac{\partial f}{\partial t}\\
\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_\Delta + \left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_\Delta \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial p_*}{\partial x} &\Rightarrow \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_\Delta = \frac{\partial p_*}{\partial x} - \left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_\Delta \frac{\partial f}{\partial x}\\
\left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_\Delta + \left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_\Delta \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial p_*}{\partial y} &\Rightarrow \left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_\Delta = \frac{\partial p_*}{\partial y} - \left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_\Delta \frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{A5.2}$$

$$
\left.\begin{array}{l}
\left.\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\right|_{\Delta}+\left.\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right|_{\Delta}\dfrac{\partial f}{\partial t}=\dfrac{\partial\rho_*}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad \left.\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\right|_{\Delta}=\dfrac{\partial\rho_*}{\partial t}-\left.\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right|_{\Delta}\dfrac{\partial f}{\partial t} \\
\left.\dfrac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{\Delta}+\left.\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right|_{\Delta}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial\rho_*}{\partial x} \quad\Rightarrow\quad \left.\dfrac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{\Delta}=\dfrac{\partial\rho_*}{\partial x}-\left.\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right|_{\Delta}\dfrac{\partial f}{\partial x} \\
\left.\dfrac{\partial\rho}{\partial y}\right|_{\Delta}+\left.\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right|_{\Delta}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial\rho_*}{\partial y} \quad\Rightarrow\quad \left.\dfrac{\partial\rho}{\partial y}\right|_{\Delta}=\dfrac{\partial\rho_*}{\partial y}-\left.\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right|_{\Delta}\dfrac{\partial f}{\partial y}
\end{array}\right\} \tag{A5.3}
$$

在如上诸式中，下标“Δ”表示那些量在特征面上的取值，如$\left.\dfrac{\partial p}{\partial t}\right|_{\Delta}=\left.\dfrac{\partial p}{\partial t}\right|_{z=f(x,y,t)}$.

为了以下论述方便，将式(A5.1)、(A5.2)、(A5.3)写成统一形式为

$$
\left.\frac{\partial\mathscr{K}}{\partial\eta}\right|_{\Delta}=\frac{\partial\mathscr{K}_*}{\partial\eta}-\left.\frac{\partial\mathscr{K}}{\partial z}\right|_{\Delta}\frac{\partial f}{\partial\eta} \tag{A6.1}
$$

其中

$$
\left.\begin{array}{l}
\mathscr{K}=v,p,\rho \\
\mathscr{K}_*=v_*,p_*,\rho_* \\
\eta=t,x,y
\end{array}\right\} \tag{A6.2}
$$

3. $\dfrac{\partial f}{\partial\eta}$与$\dfrac{\partial F}{\partial\eta}$之间的关系

据(A1)式和(A2)式，有

$$
\left.\begin{array}{l}
F(x,y,z,t)=0 \\
z=f(x,y,t)
\end{array}\right\} \tag{A7}
$$

对上式中第一式求$\dfrac{\partial}{\partial\eta}$，则有

$$
\frac{\partial F}{\partial\eta}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial\eta}=0,\quad \eta=(t,x,z)
$$

从而给出

$$
\frac{\partial f}{\partial\eta}=-\frac{\partial F}{\partial\eta}\Big/\frac{\partial F}{\partial z},\quad \eta=t,x,y \tag{A8}
$$

4. 偏导数间的统一表达式

按现在F与f之间的取法，在(A5.1)、(A5.2)、(A5.3)式中亦即在(A6.1)式中不出现$\dfrac{\partial\mathscr{K}_*}{\partial z}$，但鉴于$\dfrac{\partial\mathscr{K}_*}{\partial z}\equiv 0$，则可将(A6.1)式扩充，在形式上亦包括$\dfrac{\partial\mathscr{K}_*}{\partial z}$，于是根据(A6.1)和(A8)式，可以给出新的偏导数间的统一形式表达式

$$
\left.\frac{\partial\mathscr{K}}{\partial\eta}\right|_{\Delta}=\frac{\partial\mathscr{K}_*}{\partial\eta}+\left.\frac{\partial\mathscr{K}}{\partial z}\right|_{\Delta}\frac{\partial F}{\partial\eta}\Big/\frac{\partial F}{\partial z} \tag{A9.1}
$$

其中

$$
\left.\begin{array}{ll}
\eta=t,x,y,z. & \dfrac{\partial\mathscr{K}_*}{\partial z}=0 \\
\mathscr{K}=v,p,\rho. & \mathscr{K}_*=v_*,p_*,\rho_*
\end{array}\right\} \tag{A9.2}
$$

5. 将经典气动方程组取在特征面上

气动方程组(7.14)式为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p=0\\&\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0\\&\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}-a^2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0\end{aligned}\right\}\tag{A10}$$

利用(A9.1)式,可将上式表在特征面上(在直角坐标系中):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\frac{\partial v_x}{\partial z}\Big|_\Delta+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial z}\Big|_\Delta=-\left(\frac{\mathrm{d}v_x^*}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_*}{\partial x}\right)\frac{\partial F}{\partial z}\\&\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\frac{\partial v_y}{\partial z}\Big|_\Delta+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial z}\Big|_\Delta=-\left(\frac{\mathrm{d}v_y^*}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_*}{\partial y}\right)\frac{\partial F}{\partial z}\\&\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\frac{\partial v_z}{\partial z}\Big|_\Delta+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial z}\Big|_\Delta=-\left(\frac{\mathrm{d}v_z^*}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_*}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial z}\\&\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\frac{\partial v_x}{\partial z}\Big|_\Delta+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial v_y}{\partial z}\Big|_\Delta+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z}\Big|_\Delta+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\rho}{\partial z}\Big|_\Delta=\\&-\left(\frac{\partial v_x^*}{\partial x}+\frac{\partial v_y^*}{\partial y}+\frac{\partial v_z^*}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho_*}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial F}{\partial z}\\&\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\frac{\partial p}{\partial z}\Big|_\Delta-a^2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\rho}{\partial z}\Big|_\Delta=-\left(\frac{\mathrm{d}p_*}{\mathrm{d}t}-a^2\frac{\mathrm{d}\rho_*}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial F}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{A11}$$

在上式中,若取在特征面上的偏导数$\frac{\partial v_*}{\partial z}\Big|_\Delta$、$\frac{\partial v_y}{\partial z}\Big|_\Delta$、$\frac{\partial v_z}{\partial z}\Big|_\Delta$、$\frac{\partial p}{\partial z}\Big|_\Delta$、$\frac{\partial p}{\partial z}\Big|_\Delta$不能确定,(根据(A9.1)式,则推出在特征面上 v_x、v_y、v_z、p、ρ 的所有的偏导数不能完全确定)。由于在(A11)式中$\frac{\partial v_x}{\partial z}\Big|_\Delta$等不能完全确定,则其系数行列式必定为零,即有

$$\begin{vmatrix}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}&0&0&\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial x}&0\\0&\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}&0&\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial y}&0\\0&0&\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}&\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial z}&0\\\frac{\partial F}{\partial x}&\frac{\partial F}{\partial y}&\frac{\partial F}{\partial z}&0&\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\\0&0&0&\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}&-a^2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\end{vmatrix}=0$$

由上式则推出

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right)^3\left\{a^2\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right]-\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}=0\tag{A12}$$

由上式推出

$$a^2=\frac{\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right)^2}{|\mathrm{grad}F|^2}$$

而据(7.98.1)式,则推出

$$a^2 = U^2 \tag{A13}$$

即对应(7.98.2)式的第一和第二族特征线。

由(A12)式,还可推出

$$\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right)^3 = 0, \quad 即\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = 0$$

再据(7.98.1)式,则得出

$$U = 0 \tag{A14}$$

即对应(7.98.2)的第三族特征线。

式(A13)式和(A14)式的得出完全是根据特征线的第二种定义——不定线法,由此可见,经典气体动力学中的特征线定义法与不定线法的特征线定义等价。

补充说明:

如上的推证是从(A7)式推出(A11)式的,其实可从另一角度出发。据(A3)式,有

$$F = F(s,y,z,t) = z - f(z,y,t)$$

从而推出

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = -\frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad \eta = t,x,y \tag{A15}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1 \tag{A16}$$

利用(A15)式,可将(A6.1)式表成

$$\frac{\partial \mathscr{K}}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathscr{K}_{\bullet}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathscr{K}}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial \eta}, \quad \eta = t,x,y \tag{A17}$$

根据

$$\frac{\partial \mathscr{K}_{\bullet}}{\partial z} \equiv 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

于是$\frac{\partial \mathscr{K}}{\partial z}$可表成

$$\frac{\partial \mathscr{K}}{\partial z} = \frac{\partial \mathscr{K}}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial \mathscr{K}_{\bullet}}{\partial z} + \frac{\partial \mathscr{K}}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} \tag{A18}$$

从而(A17)式和(A18)式可以合一表成

$$\frac{\partial \mathscr{K}}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathscr{K}_{\bullet}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathscr{K}}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial \eta}, \quad \eta = t,x,y,z \tag{A19}$$

利用上式,可由(A10)式推出(A11)式。不过,这时在(A11)式的右边不出现$\frac{\partial F}{\partial z}$。

附录 7.2

正激波数据(k=1.4)

M_+	M_-	ρ_-/ρ_+	T_-/T_+	ρ_-/ρ_+
1.00	1.00000	.10000+1	.10000+1	.10000+1
1.01	.99013	.10167+1	.10066+1	.10234+1
1.02	.98052	.10334+1	.10132+1	.10471+1
1.03	.97115	.10502+1	.10198+1	.10710+1
1.04	.96203	.10671+1	.10263+1	.10952+1
1.05	.95313	.10840+1	.10328+1	.11196+1
1.06	.94445	.11009+1	.10393+1	.11442+1
1.07	.93598	.11179+1	.10458+1	.11690+1
1.08	.92771	.11349+1	.10522+1	.11942+1
1.09	.91965	.11520+1	.10586+1	.12194+1
1.10	.91177	.11691+1	.10649+1	.12450+1
1.11	.90408	.11862+1	.10713+1	.12708+1
1.12	.89656	.12034+1	.10776+1	.12968+1
1.13	.88922	.12206+1	.10840+1	.13230+1
1.14	.88204	.12378+1	.10903+1	.13495+1
1.15	.87502	.12550+1	.10966+1	.13762+1
1.16	.86816	.12723+1	.11029+1	.14032+1
1.17	.86145	.12896+1	.11092+1	.14304+1
1.18	.85488	.13069+1	.11154+1	.14578+1
1.19	.84846	.13243+1	.11217+1	.14854+1
1.20	.84217	.13416+1	.11280+1	.15133+1
1.21	.83601	.13590+1	.11343+1	.15414+1
1.22	.82999	.13764+1	.11405+1	.15698+1
1.23	.82408	.13938+1	.11468+1	.15984+1
1.24	.81830	.14112+1	.11531+1	.16272+1
1.25	.81264	.14286+1	.11594+1	.16562+1
1.26	.80709	.14460+1	.11657+1	.16855+1
1.27	.80164	.14634+1	.11720+1	.17150+1
1.28	.79631	.14808+1	.11783+1	.17448+1
1.29	.79108	.14983+1	.11846+1	.17748+1
1.30	.78596	.15157+1	.11909+1	.18050+1
1.31	.78093	.15331+1	.11972+1	.18354+1
1.32	.77600	.15505+1	.12035+1	.18661+1
1.33	.77116	.15680+1	.12099+1	.18970+1
1.34	.76641	.15854+1	.12162+1	.19282+1
1.35	.76175	.16028+1	.12226+1	.19596+1
1.36	.75718	.16202+1	.12290+1	.19912+1
1.37	.75269	.16376+1	.12354+1	.20230+1
1.38	.74829	.16549+1	.12418+1	.20551+1
1.39	.74396	.16723+1	.12482+1	.20874+1
1.40	.73971	.16897+1	.12547+1	.21200+1
1.41	.73554	.17070+1	.12612+1	.21528+1
1.42	.73144	.17243+1	.12676+1	.21858+1
1.43	.72741	.17416+1	.12741+1	.22190+1
1.44	.72345	.17589+1	.12807+1	.22525+1
1.45	.71956	.17761+1	.12872+1	.22862+1
1.46	.71574	.17934+1	.12938+1	.23202+1
1.47	.71198	.18106+1	.13003+1	.23544+1

M_+	M_-	ρ_-/ρ_+	T_-/T_+	ρ_-/ρ_+
1.48	.70829	.18278+1	.13069+1	.23888+1
1.49	.70466	.18449+1	.13136+1	.24234+1
1.50	.70109	.18621+1	.13202+1	.24583+1
1.51	.69758	.18792+1	.13269+1	.24934+1
1.52	.69413	.18963+1	.13336+1	.25288+1
1.53	.69073	.19133+1	.13403+1	.25644+1
1.54	.68739	.19303+1	.13470+1	.26002+1
1.55	.68410	.19473+1	.13538+1	.26362+1
1.56	.68087	.19643+1	.13606+1	.26725+1
1.57	.67768	.19812+1	.13674+1	.27090+1
1.58	.67455	.19981+1	.13742+1	.27458+1
1.59	.67147	.20149+1	.13811+1	.27828+1
1.60	.66844	.20317+1	.13880+1	.28200+1
1.61	.66545	.20485+1	.13949+1	.28574+1
1.62	.66251	.20653+1	.14018+1	.28951+1
1.63	.65962	.20820+1	.14088+1	.29330+1
1.64	.65677	.20986+1	.14158+1	.29712+1
1.65	.65396	.21152+1	.14228+1	.30096+1
1.66	.65119	.21318+1	.14299+1	.30482+1
1.67	.64847	.21484+1	.14369+1	.30870+1
1.68	.64579	.21649+1	.14440+1	.31261+1
1.69	.64315	.21813+1	.14512+1	.31654+1
1.70	.64054	.21977+1	.14583+1	.32050+1
1.71	.63798	.22141+1	.14655+1	.32448+1
1.72	.63545	.22304+1	.14727+1	.32848+1
1.73	.63296	.22467+1	.14800+1	.33250+1
1.74	.63051	.22629+1	.14873+1	.33655+1
1.75	.62809	.22791+1	.14946+1	.34062+1
1.76	.62570	.22952+1	.15019+1	.34472+1
1.77	.62335	.23113+1	.15093+1	.34884+1
1.78	.62104	.23273+1	.15167+1	.35298+1
1.79	.61875	.23433+1	.15241+1	.35714+1
1.80	.61650	.23592+1	.15316+1	.36133+1
1.81	.61428	.23751+1	.15391+1	.36554+1
1.82	.61209	.23909+1	.15466+1	.36978+1
1.83	.60993	.24067+1	.15541+1	.37404+1
1.84	.60780	.24224+1	.15617+1	.37832+1
1.85	.60570	.24381+1	.15693+1	.38262+1
1.86	.60363	.24537+1	.15770+1	.38695+1.
1.87	.60158	.24693+1	.15847+1	.39130+1
1.88	.59957	.24848+1	.15924+1	.39568+1
1.89	.59758	.25003+1	.16001+1	.40008+1
1.90	.59562	.25157+1	.16079+1	.40450+1
1.91	.59368	.25310+1	.16157+1	.40894+1
1.92	.59177	.25463+1	.16236+1	.41341+1
1.93	.58988	.25616+1	.16314+1	.41790+1
1.94	.58802	.25767+1	.16394+1	.42242+1!!!
1.95	.58618	.25919+1	.16473+1	.42696+1

M_+	M_-	ρ_-/ρ_+	T_-/T_+	ρ_-/ρ_+
1.96	.58437	.26069+1	.16553+1	.43152+1
1.97	.58258	.26220+1	.16633+1	.43610+1
1.98	.58082	.26369+1	.16713+1	.44071+1
1.99	.57907	.26518+1	.16794+1	.44534+1
2.00	.57735	.26667+1	.16875+1	.45000+1
2.02	.57397	.26962+1	.17038+1	.45938+1
2.04	.57068	.27255+1	.17203+1	.46885+1
2.06	.56747	.27545+1	.17369+1	.47842+1
2.08	.56433	.27833+1	.17536+1	.48808+1
2.10	.56128	.28119+1	.17705+1	.49783+1
2.12	.55829	.28402+1	.17875+1	.50768+1
2.14	.55538	.28683+1	.18046+1	.51762+1
2.16	.55254	.28962+1	.18219+1	.52765+1
2.18	.54977	.29238+1	.18393+1	.53778+1
2.20	.54706	.29512+1	.18569+1	.54800+1
2.22	.54441	.29784+1	.18746+1	.55831+1
2.24	.54182	.30053+1	.18924+1	.56872+1
2.26	.53930	.30319+1	.19104+1	.57922+1
2.28	.53683	.30584+1	.19285+1	.58981+1
2.30	.53441	.30845+1	.19468+1	.60050+1
2.32	.53205	.31105+1	.19652+1	.61128+1
2.34	.52974	.31362+1	.19838+1	.62215+1
2.36	.52749	.31617+1	.20025+1	.63312+1
2.38	.52528	.31869+1	.20213+1	.64418+1
2.40	.52312	.32119+1	.20403+1	.65533+1
2.42	.52100	.32367+1	.20595+1	.66658+1
2.44	.51894	.32612+1	.20788+1	.67792+1
2.46	.51691	.32855+1	.20982+1	.68935+1
2.48	.51493	.33095+1	.21178+1	.70088+1
2.50	.51299	.33333+1	.21375+1	.71250+1
2.52	.51109	.33569+1	.21574+1	.72421+1
2.54	.50923	.33803+1	.21774+1	.73602+1
2.56	.50741	.34034+1	.21976+1	.74792+1
2.58	.50562	.34263+1	.22179+1	.75991+1
2.60	.50387	.34490+1	.22383+1	.77200+1
2.62	.50216	.34714+1	.22590+1	.78418+1
2.64	.50048	.34937+1	.22797+1	.79645+1
2.66	.49883	.35157+1	.23006+1	.80882+1
2.68	.49722	.35374+1	.23217+1	.82128+1
2.70	.49563	.35590+1	.23429+1	.83383+1
2.72	.49408	.35803+1	.23642+1	.84648+1
2.74	.49256	.36015+1	.23858+1	.85922+1
2.76	.49107	.36224+1	.24074+1	.87205+1
2.78	.48960	.36431+1	.24292+1	.88498+1
2.80	.48817	.36636+1	.24512+1	.89800+1
2.82	.48676	.36838+1	.24733+1	.91111+1
2.84	.48538	.37039+1	.24955+1	.92432+1!!!
2.86	.48402	.37238+1	.25179+1	.93762+1

M_+	M_-	ρ_-/ρ_+	T_-/T_+	ρ_-/ρ_+
2.88	.48269	.37434+1	.25405+1	.95101+1
2.90	.48138	.37629+1	.25632+1	.96450+1
2.92	.48010	.37821+1	.25861+1	.97808+1
2.94	.47884	.38012+1	.26091+1	.99175+1
2.96	.47760	.38200+1	.26322+1	.10055+2
2.98	.47638	.38387+1	.26555+1	.10194+2
3.00	.47519	.38571+1	.26790+1	.10333+2
3.02	.47402	.38754+1	.27026+1	.10474+2
3.04	.47287	.38935+1	.27264+1	.10615+2
3.06	.47174	.39114+1	.27503+1	.10758+2
3.08	.47063	.39291+1	.27744+1	.10901+2
3.10	.46953	.39466+1	.27986+1	.11045+2
3.12	.46846	.39639+1	.28230+1	.11190+2
3.14	.46741	.39811+1	.28475+1	.11336+2
3.16	.46637	.39981+1	.28722+1	.11483+2
3.18	.46535	.40149+1	.28970+1	.11631+2
3.20	.46435	.40315+1	.29220+1	.11780+2
3.22	.46336	.40479+1	.29471+1	.11930+2
3.24	.46240	.40642+1	.29724+1	.12081+2
3.26	.46144	.40803+1	.29979+1	.12232+2
3.28	.46051	.40963+1	.30234+1	.12385+2
3.30	.45959	.41120+1	.30492+1	.12538+2
3.32	.45868	.41276+1	.30751+1	.12693+2
3.34	.45779	.41431+1	.31011+1	.12848+2
3.36	.45691	.41583+1	.31273+1	.13005+2
3.38	.45605	.41734+1	.31537+1	.13162+2
3.40	.45520	.41884+1	.31802+1	.13320+2
3.42	.45436	.42032+1	.32069+1	.13479+2
3.44	.45354	.42179+1	.32337+1	.13639+2
3.46	.45273	.42323+1	.32607+1	.13800+2
3.48	.45194	.42467+1	.32878+1	.13962+2
3.50	.45115	.42609+1	.33151+1	.14125+2
3.60	.44741	.43296+1	.34537+1	.14953+2
3.70	.44395	.43949+1	.35962+1	.15805+2
3.80	.44073	.44568+1	.37426+1	.16680+2
3.90	.43774	.45156+1	.38928+1	.17578+2
4.00	.43496	.45714+1	.40469+1	.18500+2
4.10	.43236	.46245+1	.42048+1	.19445+2
4.20	.42994	.46749+1	.43666+1	.20413+2
4.30	.42767	.47229+1	.45322+1	.21405+2
4.40	.42554	.47685+1	.47017+1	.22420+2
4.50	.42355	.48119+1	.48751+1	.23458+2
4.60	.42168	.48532+1	.50523+1	.24520+2
4.70	.41992	.48926+1	.52334+1	.25605+2
4.80	.41826	.49301+1	.54184+1	.26713+2
4.90	.41670	.49659+1	.56073+1	.27845+2
5.00	.41523	.50000+1	.58000+1	.29000+2
5.10	.41384	.50326+1	.59966+1	.30178+2

M_+	M_-	p_-/p_+	T_-/T_+	ρ_-/ρ_+
5.20	.41252	.50637+1	.61971+1	.31380+2
5.30	.41127	.50934+1	.64014+1	.32605+2
5.40	.41009	.51218+1	.66097+1	.33853+2
5.50	.40897	.51489+1	.68218+1	.35125+2
5.60	.40791	.51749+1	.70378+1	.36420+2
5.70	.40690	.51998+1	.72577+1	.37738+2
5.80	.40594	.52236+1	.74814+1	.39080+2
5.90	.40503	.52464+1	.77091+1	.40445+2
6.00	.40416	.52683+1	.79406+1	.41833+2
6.50	.40038	.53651+1	.91564+1	.49125+2
7.00	.39736	.54444+1	.10469+2	.57000+2
7.50	.39491	.55102+1	.11879+2	.65458+2
8.00	.39289	.55652+1	.13387+2	.74500+2
8.50	.39122	.56117+1	.14991+2	.84125+2
9.00	.38980	.56512+1	.16693+2	.94333+2
9.50	.38860	.56850+1	.18492+2	.10512+3
10.00	.38758	.57143+1	.20387+2	.11850+3
11.00	.38592	.57619+1	.24471+2	.14100+3
12.00	.38466	.57987+1	.28943+2	.16783+3
13.00	.38368	.58276+1	.33805+2	.19700+3
14.00	.38289	.58507+1	.39055+2	.22850+3
15.00	.38226	.58696+1	.44694+2	.26233+3
16.00	.38174	.58851+1	.50722+2	.29850+3
17.00	.38131	.58980+1	.57138+2	.33700+3
18.00	.38095	.59088+1	.63944+2	.37783+3
19.00	.38065	.59180+1	.71139+2	.42100+3
20.00	.38039	.59259+1	.78722+2	.46650+3
21.00	.38016	.59327+1	.86694+2	.51433+3
22.00	.37997	.59387+1	.95055+2	.56450+3
23.00	.37980	.59438+1	.10381+3	.61700+3
24.00	.37965	.59484+1	.11294+3	.67183+3
25.00	.37952	.59524+1	.12247+3	.72900+3
ININ	.37796	.60000+1	*INFIN*	*INFIN*

习题

7.1 证明在经典气体动力学的假设下，随体等熵方程与能量方程等价，即（符号意义同书上）

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=0 \text{ 与 } \rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2}+e\right)=-\operatorname{div}(p\boldsymbol{v}) \text{ 等价}$$

7.2 推导多方气体在等熵的情况下或沿迹线（符号同书上）

$$\frac{i}{i_0}=\frac{a^2}{a_0^2}=\frac{T}{T_0}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{k-1}$$

7.3 导出在拉瓦管中截面与马赫数之间的关系，即（符号同书上）

$$\frac{F}{F_*}=\frac{1}{\mathrm{M}}\left\{\frac{2}{k+1}+\frac{k-1}{k+1}\mathrm{M}^2\right\}^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

7.4 求如下方程组的特征线及其相容关系式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x} = \dfrac{\partial b}{\partial t} \\ \dfrac{\partial a}{\partial t} = C_0^2 \dfrac{\partial b}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho_0} \dfrac{\mathrm{d}b_m}{\mathrm{d}x} \end{cases}$$

其中：$a=a(x,t)$， $b=b(x,t)$，； 而 $b_m=b_m(x)$ 为已知函数，$C_0=\text{const}$， $\rho_0=\text{const}$。

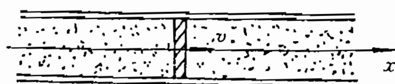
7.5 ①何谓黎曼气流？何谓普朗特—迈叶尔气流。

②简述一维不定常流动的简单波与二维定常流动的简单波的三种不同的的定义，并证明这三种定义是等价的。

7.6 在无限长的刚性管中充满均匀静止的多方气体，在 $t=0$ 时活塞突然以恒速 v_* 向右运动，引起气体的运动为等熵的。

①在 (x,t) 平面上画出活塞引起气体运动的各个类型区，并求出活塞左表面上的压力。

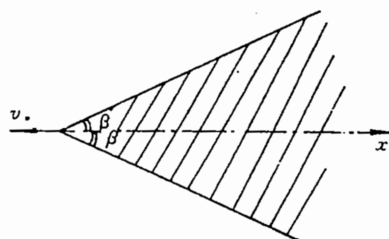
②v_* 达到何值时活塞左面出现真空？



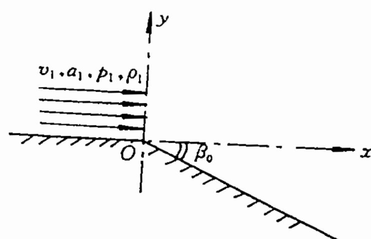
题图 7.6

7.7 一个夹角为 2β 的二维尖劈，在压力为 p_0、密度为 ρ_0、音速为 a_0 的静止多方气体中，以 v_* 速度朝 x 负向作均速直线飞行，已知 $v_*>a_0$。

①求解劈表面上的压力和气体流速。



题图 7.7



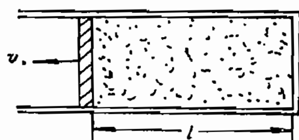
题图 7.8

②图解出劈表面上的流速。

7.8 有一个二维平面超音速的均匀气流沿平直固壁流到 O 点，如图所示，固壁在 O 点发生折转。

①画出从 O 点开始的流动图像，并论证该流动属于何种类型。

②在速度平面上图解，并指出整个流动对应外摆线的哪一段。

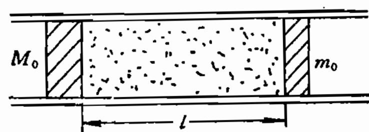


题图 7.9

7.9 在一端封闭的管中充满均匀静止的多方气体。在 $t=0$ 时，活塞突然以 $v_*=\text{const}$ 速度向左抽动。

①在 (x,t) 平面上画出各个类型的的流动区。

②给出最先出现的那个简单波区中速度函数 $v(x,t)$ 和音速函数 $a(x,t)$，并给出该波区边界的表达式。



题图 7.10

7.10 设在管道中间贮有压力为 p_0、密度为 ρ_0、绝热指数 $k=3$ 的多方气体，在它的左右两边有单位截面质量为 M_0 与 m_0 的刚体，如图所示。在 $t=0$ 时，两个刚体在高压气体的推动下发生运动，设刚体与管道没有摩擦力。求两个刚体的运动规律

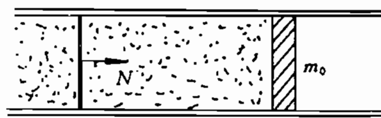
与气体的运动状况。

7.11 设在一个无限长的管左端有一个活塞,它从 $t=0$ 开始以 $x=bt^2$ 的规律推动初始压力为 p_0、密度为 ρ_0、绝热指数为 k 的多方气体,气体初始静止,b=const. 求解冲击波轨迹方程。

7.12 在一个无限长的管中有一个单位截面质量为 m_0 的活塞,活塞的左边为压力为 p_0、密度为 ρ_0 的静止多方气体,现有一个速度为 N 的平面冲击波从左方入射,在 $t=0$ 时冲击波到达活塞(活塞作为刚体),从而引起活塞的运动。求解活塞的运动规律(设反射冲击波很弱)。



题图 7.11



题图 7.12

参考文献

[1] 柯朗 R,弗里德里克斯 K O. 超声速流与冲击波. 北京:科学出版社,1986

[2] Кочин Н Е, Кибель И А, Розе Н В. Теоретическая Гидромеханика. Государственное Издательство Фмзико-математической литературы, Москва, 1963

[3] Аржаников Н С, малчцев В Н. Аэродинамика. Государственое Издательство Обороннои Иромышленности Москва, 1962

[4] 杜珣. 气体动力学讲义. 北京:北京大学,1962

[5] 吴望一. 流体力学. 北京:北京大学出版社,1982

[6] 时爱民,苏铭德,刘季稔. 北京:气体动力学基础. 北京科学出版社,1988

[7] 泽尔道维奇 я Б,莱依捷尔 ю П. 激波和高温流体动力学现象物理学(上册). 北京:科学出版社,1980

[8] 周毓麟. 一维不定常流体力学讲义. 北京:二机部九〇九所编,1980

[9] 吕洪生. 爆炸压接理论基础. 长沙:国防科技大学出版社,1996

[10] 张连玉等. 爆炸气体动力学基础. 北京:北京工业学院出版社,1987

第八章　相似律与量纲理论

对于物理现象的研究有两种手段：一种是从理论上研究；另一种是从实验上研究。实验研究是一种更重要的手段，但是，实验由于受到空间、时间、材料以及实验方法等条件的限制，实验模型有可能不会按实际的大小制作，尤其是环境条件总与实际有差异。那么，如何保证实验结果能够表征实际现象呢？这就需要保证相似律得到满足。不然，即使仪器精密、测量精度极高，也不能保证其测量结果可信可用，所以相似律对实验很重要。相似律，在作理论研究时也很重要，例如，只要保证相似系数相等，就可把无量纲形式的方程的解推广到一般情形。

如何找到相似系数呢？这就要借助于量纲理论。对于已经建立了数学模型（即确定了控制方程组和边初条件）的物理过程，可通过量纲分析得到；或者对方程组及边初条件进行无量纲化而得到相似系数，从而建立相似律；对于尚未建立数学模型的物理过程，可以通过量纲分析找出相似系数确定其相似律（laws of similitude）。

量纲理论不仅只解决相似律问题，而且运用量纲分析有可能找到在连续介质力学中一种非常重要的现象——自模拟运动* (automodeling motion)。

研究量纲理论和相似律必须解决两个问题：（一）什么是两个现象的相似？两个相似现象之间有何种关系？（二）怎样保证两个现象之间的相似？

本章只研究力学现象中的相似性，当然力学现象也是物理现象的一部分，之所不同只是涉及物理量之独立测量单位个数的多少不同而已。

8.1　相似概念

力学现象中所有的相似概念都来源于几何相似概念。如果两个力学现象之间的几何参数、运动学参数、动力学参数都满足一定的相似关系，我们就称这两个力学现象是**动力学相似的**。如下将详谈这几个相似概念。

8.1.1　几何相似

由几何原理我们知道两个图形相似则是它们对应的线性长度之比相等，参见图 8.1，即有

$$\frac{l_{11}}{l_{21}}=\frac{l_{12}}{l_{22}}=\frac{l_{13}}{l_{23}}=\cdots=\frac{L_1}{L_2}=k_l \tag{8.1}$$

其中 L_1 和 L_2 分别为两个图形的特征长度，k_l 为长度比例系数。

反之，如果两个几何图形所有的对应的线段长度之比都相等，则这两几何图形相似。这就是几何相似的充要条件。

几何相似亦可从另一角度来理解，如果分别取两个几何图形中的特征长度 L_1 和 L_2

---

* 关于自模拟运动的定义，见第十一章 § 11.5。

作为各自长度单位，则由(8.1)式得到：

$$\left.\begin{aligned}\frac{l_{11}}{L_1}&=\frac{l_{21}}{L_2}=\bar{l}_1\\\frac{l_{12}}{L_1}&=\frac{l_{22}}{L_2}=\bar{l}_2\\&\cdots\cdots\\\frac{l_{1n}}{L_1}&=\frac{l_{2n}}{L_2}=\bar{l}_n\end{aligned}\right\}\tag{8.2}$$

亦即无量纲量$\frac{l_{11}}{L_1}$与$\frac{l_{21}}{L_2}$、$\frac{l_{12}}{L_1}$与$\frac{l_{22}}{L_2}$、…、$\frac{l_{1n}}{L_1}$与$\frac{l_{2n}}{L_2}$分别相等。因此，若用无量纲长度$\bar{l}_1$、$\bar{l}_2$、…、$\bar{l}_n$重新画出上面的两个几何图形，它们便合二为一了。

现在把几何相似图形的说法重新归纳为：两个几何相似的图形，若分别以它们的特征长度作为度量单位，则两个几何相似图形用无量纲尺寸表示时就是一个相同的几何图形；或者说两个几何相似的图形本来就是同一个几何图形通过不同的比例放大或者缩小而得到的。放大或缩小的关系为：

$$\begin{aligned}l_{21}&=L_2\bar{l}_1, & l_{11}&=L_1\bar{l}_1\\l_{22}&=L_2\bar{l}_2, & l_{12}&=L_1\bar{l}_2\\&\cdots\cdots\cdots\cdots, & &\cdots\cdots\cdots\cdots\\l_{2n}&=L_2\bar{l}_n, & l_{1n}&=L_1\bar{l}_n\end{aligned}$$

在这里所以特别强调对于几何相似的后一种理解，是因为运动学相似、动力学相似等概念都源于此。

关于特征长度，原则上可以任意选取，但在实际使用时，通常要取具有代表性的、且为已知的长度，如研究爆炸时选装药半径或者装药的厚度；研究飞机的空气动力时选机翼的弦长等。

对于几何相似，粗略的研究是很容易保证的，只要把实际物体进行放大或缩小即可。如果细抠起来就很难，例如实物与模型的光洁度就很难做到完全几何相似，尽管这在研究如机翼总的升力等影响不大，但在研究局部边界时就显得很重要，所以在处理相似时，要抓住影响所研究问题的主要因素尺寸相似，其他可以稍粗略一些。

两个几何相似物体之相应部分的面积之比为k_l^2、体积之比为k_l^3。

8.1.2　运动学相似，即速度场的相似

两个运动相似的流场，在对应的时刻，在其任意对应的几何相似点上，速度的方向相同、速度大小之比相等，即满足：

$$\frac{v_{11}}{v_{21}}=\frac{v_{12}}{v_{22}}=\cdots=\frac{U_1}{U_2}=k_v\tag{8.3}$$

其中v_{11}与v_{21}、v_{12}与v_{22}、……为对应的几何相似点上的速度值或速度分量值；U_1和U_2为对应的特征速度值；k_v为速度比例系数。

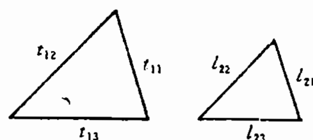


图8.1　两个几何相似图形

如果运动是定常的，则在运动的整个过程中，对应的几何相似点上其速度的方向都相同、速度大小之比

总相等。

"对应的几何相似点"的提法包含了几何相似的需求。

对于一般的非定常运动,上面所指的"对应时刻"是指过程相似的意思。现在考虑两个非定常流场,在两个流场中某个对应的几何相似点上速度值随时间变化的过程如图 8.2 所示。

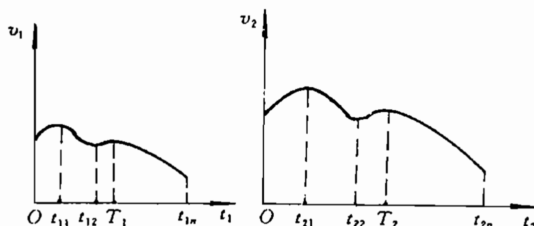


图 8.2 不定常相似流场中对应点上的速度变化情况

如果两个现象发生的时间过程是相似的,则要求过程的各个对应时刻之比为常数,即:

$$\frac{t_{11}}{t_{21}}=\frac{t_{12}}{t_{22}}=\cdots=\frac{t_{1n}}{t_{2n}}=\frac{T_1}{T_2}=k_t \tag{8.4.1}$$

其中 t_{11}与 t_{21}、t_{12}与 t_{22}、…、t_{1n}与 t_{2n}为过程发生的相对应时刻;T_1 与 T_2 为对应的特征时间;k_t 为时间比例系数。若以 T_1 和 T_2 分别取作两个过程的时间单位,则以无量纲量 $\bar{t}$ 表示它们时,这两个时间过程就成了同一个时间过程。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{t_{11}}{T_1}=\frac{t_{21}}{T_2}=\bar{t}_1\\&\frac{t_{12}}{T_1}=\frac{t_{22}}{T_2}=\bar{t}_2\\&\cdots\cdots\\&\frac{t_{1n}}{T_1}=\frac{t_{2n}}{T_2}=\bar{t}_n\end{aligned}\right\} \tag{8.4.2}$$

因此,运动相似的提法实际包含了过程相似的要求,尤其是对于不定常运动。

这样,如果两个运动相似的流场分别取各自的特征速度 U 作为度量单位,那么两个流场中对应的几何相似点上在其对应的时刻,其无量纲速度场则为同一个速度场;或者说两个相似的速度场是由同一个速度场(无量纲的速度场)按不同比例放大或缩小而得到的。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{v_{11}}{U_1}=\frac{v_{21}}{U_2}=\bar{v}_1\\&\frac{v_{12}}{U_1}=\frac{v_{22}}{U_2}=\bar{v}_2\\&\cdots\cdots\\&\frac{v_{1n}}{U_1}=\frac{v_{2n}}{U_2}=\bar{v}_n\end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

原则上,特征速度是任意选取的,但实际上总是选取有代表性且为已知的速度,如取

各种物型绕流的前面远方来流的速度 U_∞、管内流动的平均速度 U_m、爆轰产物流动中的爆速 D 等。

在运动相似的两个流场中，在对应的几何点上在对应的时刻，其速度分别表成：

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}v_{11}=\lim\limits_{\Delta t_{11}\to 0}\dfrac{\Delta l_{11}}{\Delta t_{11}}\\ v_{12}=\lim\limits_{\Delta t_{12}\to 0}\dfrac{\Delta l_{12}}{\Delta t_{12}}\\ \cdots\cdots\end{cases}\\ \begin{cases}v_{21}=\lim\limits_{\Delta t_{21}\to 0}\dfrac{\Delta l_{21}}{\Delta t_{21}}\\ v_{22}=\lim\limits_{\Delta t_{22}\to 0}\dfrac{\Delta l_{22}}{\Delta t_{22}}\\ \cdots\cdots\end{cases}\end{array}\right\} \tag{8.6}$$

因此，若运动相似（包括几何相似和过程相似），则 k_v、k_l、k_t 之间应满足一定的关系，即有如下关系式成立：

$$k_v=\frac{v_{11}}{v_{21}}=\lim_{\substack{\Delta t_{11}\to 0\\ (\Delta t_{21}\to 0)}}\left(\frac{\Delta l_{11}}{\Delta l_{21}}\cdot\frac{\Delta t_{21}}{\Delta t_{11}}\right)=\frac{k_l}{k_t} \tag{8.7}$$

8.1.3 **动力学相似，即力场相似**

两个动力学相似的流场，在对应的时刻，位于任意对应的几何相似点上的流体微团所受的合外力方向相同、合力的大小之比相等：

$$\frac{|\boldsymbol{f}_{11}|}{|\boldsymbol{f}_{21}|}=\frac{|\boldsymbol{f}_{12}|}{|\boldsymbol{f}_{22}|}=\cdots=\frac{|\boldsymbol{f}_{1n}|}{|\boldsymbol{f}_{2n}|}=\frac{|\boldsymbol{F}_1|}{|\boldsymbol{F}_2|}=k_f \tag{8.8}$$

其中，$\boldsymbol{f}_{11}$ 与 $\boldsymbol{f}_{21}$、$\boldsymbol{f}_{12}$ 与 $\boldsymbol{f}_{22}$、…，$\boldsymbol{f}_{1n}$ 与 $\boldsymbol{f}_{2n}$ 为对应的几何相似点上的合外力矢量；$\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 为对应的特征合外力矢量；k_f 为合外力比例系数。

综上所述，要保证两个流场、或者实际模型与实际问题完全相似，则必须保证：几何相似、运动学相似、动力学相似。具体执行这些相似条件时，必须借助于量纲理论或者方程组及其定解条件。

8.1.4 **流体力学中的几个重要的动力学相似参数**

在流体力学中有几个非常重要的动力学相似参数，它们可以通过微元法（method of differential element）求得，微元法物理意义明确，但似乎不够“严格”；亦可通过对粘性流体运动方程的无量化而“精确”推出，但这种做法，其物理意义不如体元法明确。如下，我们将按两种方法导出这些相似参数。

1. *体元法*

作用在流体微团上的合力，包括表面力（粘性力、压力等）及质量力（如重力），若两个流场动力学相似（在任意时刻，流场的任意对应的几何相似点上，流体微团所受合力的大小都成相同的比例），则作用在流体微团上的各分力也必须保证相似。

① 雷诺数（Reynolds' number）

在两个动力学相似流场的对应几何点上，分别取两个几何相似的流体微团，如图 8.3

所示，我们考虑作用在流体微团上的惯性力和粘性力。

惯性力的量级分别为

$$\left.\begin{aligned} |f_1| &\sim \rho_1 \Delta l_1^3 \cdot \left|\frac{\Delta v_1}{\Delta t_1}\right| \\ |f_2| &\sim \rho_2 \Delta l_2^3 \cdot \left|\frac{\Delta v_2}{\Delta t_2}\right| \end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

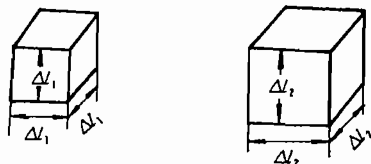


图 8.3　两个相似微团

粘性力的量级分别为：

$$\left.\begin{aligned} |f_1^*| &\sim \mu_1 \left|\frac{\delta v_1}{\delta l_1}\right| \cdot \Delta l_1^2 \\ |f_2^*| &\sim \mu_2 \left|\frac{\delta v_2}{\delta l_2}\right| \cdot \Delta l_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{8.10}$$

其中 δv 为正面六体上、下表面的速度差，μ 为粘性系数。

如果动力学相似（当然亦几何相似和运动学相似），则应有

$$\frac{|f_1|}{|f_2|} = \frac{|f_1^*|}{|f_2^*|} = k_f \tag{8.11}$$

或者

$$k_\rho k_l^3 k_v / k_t = k_\mu k_v k_l \tag{8.12}$$

其中

$$k_\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad k_\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

式(8.11)或(8.12)亦可写成：

$$\frac{\rho_1 L_1 U_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 L_2 U_2}{\mu_2} \tag{8.13}$$

上式可记作：

$$\mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}_2 \tag{8.14}$$

其中 Re 称作雷诺数，它定义作：

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho L U}{\mu}$$

因此，若两个流场的粘性作用力相似，则对应点上的雷诺数相等，所以 Re 是保证流体粘性作用力相似的相似参数。

雷诺数还有一个重要的物理意义——它代表惯性力与粘性力之比。据(8.9)和(8.10)式有

$$\frac{|f_1|}{|f_1^*|}\bigg/\frac{|f_2|}{|f_2^*|} = \frac{\rho_1 \cdot \Delta l_1^3 \cdot \left|\dfrac{\Delta v_1}{\Delta t_1}\right|}{\mu_1 \left|\dfrac{\delta v_1}{\delta l_1}\right| \cdot \Delta l_1^2} \Bigg/ \frac{\rho_2 \cdot \Delta l_2^3 \cdot \left|\dfrac{\Delta v_2}{\Delta t_2}\right|}{\mu_2 \left|\dfrac{\delta v_2}{\delta l_2}\right| \cdot \Delta l_2^2} = k_\rho k_l k_v / k_\mu = \frac{\mathrm{Re}_1}{\mathrm{Re}_2}$$

于是认为

$$\frac{|f_1|}{|f_1^*|} \sim \mathrm{Re}_1, \quad \frac{|f_2|}{|f_2^*|} \sim \mathrm{Re}_2 \tag{8.15}$$

即 Re 也是表征作用在流体微团上的惯性与粘性力的量级之比，Re 越大，则作用在微团

上的粘性力相对来说越小，当 Re→∞时，流动则成了无粘性的理想流体流动。相反，若 R
很小，则粘性力在整个流场上起重要作用，即粘性影响不能忽略。在同一个流场中雷诺数
Re 也是不同的，在外流场 Re 可能很大，而靠近固体边界 Re 可能很小。

② 马赫数(Mach number)

我们知道，马赫数 M 是表示压缩性影响的主要参数。现仍在两个动力学相似流场上取几何相似的流体微团(如正六面体，见图 8.3)，考虑作用在微团上的惯性力与压力。

惯性力的量级如(8.9)式所示：而压力的量级分别为：

$$\left.\begin{aligned}|f_1^{\Delta}| &\sim p_1 \cdot \Delta l_1^2\\ |f_2^{\Delta}| &\sim p_2 \cdot \Delta l_2^2\end{aligned}\right\} \qquad (8.16$$

由于动力学相似，则有

$$\frac{|f_1^{\Delta}|}{|f_2^{\Delta}|} = \frac{|f_1|}{|f_2|} = k_f \qquad (8.17$$

于是由(8.9)、(8.16)和(8.17)式就得到

$$k_\rho k_v^2 = k_p \qquad (8.18$$

其中

$$k_p = \frac{P_1}{P_2}, (\text{其中 } P_1 \text{ 和 } P_2 \text{ 为特征压力})$$

在推(8.18)式时还用到如下等式：

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = k_l, \quad \frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = k_v$$

式(8.18)可以改写成：

$$\frac{\rho_1 U_1^2}{P_1} = \frac{\rho_2 U_2^2}{P_2} \qquad (8.19$$

因考虑到：$a^2 = \gamma p/\rho$(其中 γ 为绝热指数)，于是上式写成：

$$\gamma_1 M_1^2 = \gamma^2 M_2^2 \qquad (8.20$$

由(8.9)和(8.16)式还可推出

$$\frac{|f_1|}{|f_1^{\Delta}|}\bigg/\frac{|f_2|}{|f_2^{\Delta}|} = \frac{\rho_1 \cdot \Delta l_1^3 \cdot \left|\frac{\Delta v_1}{\Delta t_1}\right|}{p_1 \cdot \Delta l^2}\Bigg/\frac{\rho_2 \cdot \Delta l_2^3 \cdot \left|\frac{\Delta v_2}{\Delta t_2}\right|}{p_2 \cdot \Delta l_2^2} = k_\rho k_v^2 / k_p = \frac{\gamma_1 M_1^2}{\gamma_2 M_2^2}$$

于是认为

$$\frac{|f_1|}{|f_1^{\Delta}|} \sim \gamma_1 M_1, \quad \frac{|f_2|}{|f_2^{\Delta}|} \sim \gamma_2 M_2 \qquad (8.21$$

对于同一种气体而言，$\gamma_1 = \gamma_2$，所以 M 表示作用在流体微团上的惯性力与压力的量级之
比，它是保证压缩性相似的相似参数。

③ 弗鲁德数(Froude number)

在一个空间内的液体流动，例如表面波的运动以及液体其他形式的运动，其重力的影
响是不能忽略的。现来研究这个问题，在两个动力相似的流场的对应点上取几何相似的微
团，如图 8.3 所示，考虑作用在流体微团上的惯性力和重力。

惯性力的量级如式(8.9)所示。

重力的量级分别为

$$\left.\begin{aligned}|f_2^0| &\sim \rho_1 g_1 \cdot \Delta l_1^3 \\ |f_2^0| &\sim \rho_2 g_2 \cdot \Delta l_2^3\end{aligned}\right\} \tag{8.22}$$

由于动力学相似，则有

$$\frac{|f_1^0|}{|f_2^0|} = \frac{|f_1|}{|f_2|} = k_f \tag{8.23.1}$$

将(8.9)式和(8.22)式代进上式中得到：

$$k_\rho k_l^2 k_v^2 = k_\rho k_g k_l^3$$

即有

$$k_v^2 = k_l k_g \tag{8.23.2}$$

其中

$$k_g = \frac{g_1}{g_2}$$

在以上诸式中 g 为重力加速度。(8.23.2)式亦可以写成：

$$\frac{U_1^2}{g_1 L_1} = \frac{U_2^2}{g_2 L_2} \tag{8.24}$$

按弗鲁德数 Fr 的定义：

$$\mathrm{Fr} = \frac{U^2}{gL}$$

则(8.24)式可以写成：

$$\mathrm{Fr}_1 = \mathrm{Fr}_2 \tag{8.25}$$

即两个流场满足重力场相似时，其对应点上的 Fr 数相等。

从(8.9)和(8.22)式还可以推出：

$$\left.\begin{aligned}\frac{|f_1|}{|f_1^0|} &\sim \mathrm{Fr}_1 \\ \frac{|f_2|}{|f_2^0|} &\sim \mathrm{Fr}_2\end{aligned}\right\} \tag{8.26}$$

即 Fr 数表示作用在流体微团上的惯性力与重力的量级之比，它是保证重力作用相似的相似参数。对于气体动力学中的大部分问题而言，其重力都可忽略不计。

2. *方程无量纲化法*

由上引出的那三个重要参数还可从微分方程“精确地”推出。根据粘性流动的普遍方程组(6.26)式有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{b} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p + \frac{1}{\rho}\mathrm{div}\boldsymbol{\Sigma}_* \\ &\boldsymbol{b} = (0,0,-g) = -g\hat{\boldsymbol{k}},\ (\hat{\boldsymbol{k}}\text{—— 竖直向上的单位矢量}) \\ &\boldsymbol{\Sigma}_* = \{2\mu(B_{ij} - \frac{1}{3}B_{kk}\delta_{ij})\} \\ &B_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \qquad \text{(在直角坐标系中)}\end{aligned}\right\} \tag{8.27}$$

将上式合并并且表示在直角坐标系中，作为分量形式为

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j v_{i,j}\right)=\rho b_i-p_{,i}+\mu\left(v_{i,jj}+\frac{1}{3}v_{j,ji}\right)\tag{8.28}$$

现以特征长度 L、特征时间 T、特征速度 U、特征压力 P 为尺度,将如上方程无量纲化,为此引进无量纲速度 $\bar{v}_i$、无量纲坐标 $\bar{x}_i$、无量纲时间 $\bar{t}$、无量纲压力 $\bar{p}$,即有

$$v_i=U\bar{v}_i,\quad x_i=L\bar{x}_i,\quad t=T\bar{t},\quad p=P\bar{p}\tag{8.29}$$

将如上这些量代进(8.28)式中,并考虑到特征量 U、L、T、P 为常量,则有

$$\frac{L}{UT}\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial\bar{t}}+\bar{v}_j\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial\bar{x}_j}=\frac{b_iL}{U^2}-\frac{P}{\rho U^2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}_i}+\frac{\mu}{\rho LU}\left(\frac{\partial^2\bar{v}_i}{\partial\bar{x}_j\bar{x}_j}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2\bar{v}_j}{\partial\bar{x}_j\bar{x}_i}\right)$$

或写成

$$\mathrm{St}\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial\bar{t}}+\bar{v}_j\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial\bar{x}_j}=\frac{b_iL}{U^2}-\frac{1}{\gamma\mathrm{M}^2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}_i}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2\bar{v}_i}{\partial\bar{x}_j\bar{x}_j}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2\bar{v}_j}{\partial\bar{x}_j\bar{x}_i}\right)\tag{8.30}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{St}=\frac{L}{UT}\text{:称作斯特哈利数(Strouhel's number)}\\&\frac{b_iL}{U^2}=(0,0,-\mathrm{Fr}),\ \mathrm{Fr}=\frac{gL}{U^2}\\&\frac{1}{\gamma\mathrm{M}^2}=\frac{P}{\rho U^2}=\mathrm{E},\ \mathrm{E}\text{:称作欧拉数(Eulerian number)}\end{aligned}\right\}\tag{8.31}$$

斯特哈利数 St 是衡量式(8.30)中非定常项是否可忽略的判据,若 St 较小则该项略去,流动成为定常的。从式(8.30)可清楚地看出为何在经典气体动力学中略去重力和粘性力,因为在气体动力学中我们所研究的气体流动,其流速一般较高,即 U 较大,所以雷诺数 Re 较大而 Fr 较小,故将 Re 和 Fr 所在的那两项从方程中略去,但 M^2 所在项没有略去,这是因为:在略去 Re 和 Fr 所在项时,假定 $\bar{v}_i$ 及其对空间的偏导数同量级,而 $\partial\bar{p}_i/\partial\bar{x}_i$ 与 $\bar{v}_i$ 及其偏导数不一定同量级,故 M^2 所在项保留。

当然还可引出一些其他相似参量,这里不再赘述。

8.1.5 相似性小结

1. 各种相似的概念都来源于几何相似概念。

相似流动中各个物理量,当分别以各自的特征量作为度量单位时,则其无量纲的物理量或场都应相等,或者说,相似的物理量或场本质上是等同的,只是因为各自尺度(即度量单位)的不同而有数值上的差别而已。

2. 要保证两个现象完全相似,在实际上是几乎不可能的。

自然界的现象千变万化,即使同一个实验,在不同时刻进行时,其实验条件亦未必能保证完全相同,实验结果也只能在一定的程度要求下实现重复。因此,在进行实验时,只能注意保证那些起主要作用的影响因素达到相似,即只能保证其主要的相似参数相等。

3. 要使两个现象完全相似,除了保证上面所述的那样相似参数相等外,还应保证初始条件和边界条件中相应的参数相似,所以在作量纲分析时,所有这些参量(包括出现在边初条件之中的参量)都将包括在主定量之中(详见下面的分析)。

8.2 量纲理论的基础知识

8.2.1 量纲(dimension)

我们知道,描述一个物理量需要两个因素:测量单位以及在此测量单位下物理量的数值。如表述一个力为 2 牛顿$=2\times10^5$ 达因,显然要有数值和单位两部分,所取的单位不同其数值亦不同。

凡是独立地规定其测量单位的物理量——就称作基本物理量,目前国际上规定的基本物理量表列如下。

表 8.1

基本物理量		常用的基本测量单位	
名称	量纲符号	(international system of units) 单位名称	单位符号
长度(length)	L	米(meter)	m
质量(mass)	M	千克(kilogram)	kg
时间(time)	T	秒(second)	S
电流(electric current)	I	安[培](ampere)	A
热力学温度(thermodynamic scale)	Q	开[尔文](kelvin)	K
物质的量(quantity of matter)	m	摩[尔](克分子)(mol)	mol
发光强度(intensity of light)	F	坎[德拉](candela)	cd

基本物理量的测量单位称作基本测量单位。基本测量单位当然不止一个,如长度这个量,常用的单位为米,除此之外还有千米、厘米、毫米和微米等等。

对于所考虑的那些基本物理量,其每一个都指定一个测量单位,所有这些基本测量单位组成的系统称作基本测量单位系统。例如选定长度、质量、时间作为基本物理量,这时 CGS(厘米·克·秒)制为一种基本测量单位系统;MKS(米·千克·秒)制则为另一种基本测量单位系统。但这二者同属于一个测量单位系族。

在力学中所用的基本物理量只有三个,即长度、质量和时间,如果考虑热力学量再加上温度,也就是说这时在力学中所用的基本量纲则为四个:L、M、T、θ。

我们实际所遇到的物理量很多,不止所规定的那些物理量。除基本物理量以外的物理量之量纲(亦即单位)都是由基本物理量的量纲导出来构成的,故称之为导出量纲(或称派生量纲)。现在把力学中常用的物理量与量纲列出来,以[ ]表示取某个物理量的量纲。

加速度 $[a]=LT^{-2}$

速度 $[v]=LT^{-1}$

力 $[F]=MLT^{-2}$

面积 $[A]=L^2$

比容 $[V]=L^3M^{-1}$

压力、应力 $[p]=[\tau]=[\sigma]=ML^{-1}T^{-2}$

密度 $[\rho]=ML^{-3}$

功、能、热量	$[W]=[E]=[Q]=ML^2T^{-2}$
比内能(单位质量的内能)	$[e]=L^2T^{-2}$
功率	$[N]=ML^2T^{-3}$
焓	$[I]=ML^2T^{-3}$
比焓(单位质量的焓)	$[i]=L^2T^{-2}$
熵	$[S_\bullet]=ML^2T^{-2}\theta^{-1}$
比熵(单位质量的熵)	$[S]=L^2T^{-2}\theta^{-1}$
比热、气体常数	$[C_p]=[C_v]=[R]=L^2T^{-2}\theta^{-1}$
粘性系数	$[\mu]=ML^{-1}T^{-1}$
运动学粘性系数	$[\nu]=L^2T^{-1}$
绝热指数	$[\gamma]=1$
角度	$[\varphi]=1$
热传导系数	$[\lambda]=MLT^{-3}\theta^{-1}$

所谓量纲就是指一物理量在其基本测量单位系统发生变化(在同一系族内)时,它的测量单位作相应变化的表达式。

从上面所表列的力学中常用的物理量量纲看出,作为任意一个物理量 Ψ 的量纲的表达式为

$$[\Psi] = L^\alpha \cdot M^\beta \cdot T^\eta \cdot \theta^\delta \tag{8.32}$$

严格证明见附录 8.1。其中 α、β、η、δ 为任意实数,它们的取值要根据取定的物理量而定。

8.2.2 **有量纲量与无量纲量**(dimensional quantities and dimensionless quantities)

凡改变测量单位时,其数值随之改变的物理量叫做有量纲量。如质量、力、速度等都是有量纲量,例如长度为 4 米,当其测量单位改为厘米时则成 400 厘米。

无量纲量是不随测量单位的改变而改变其数值的物理量,如绝热指数 γ,它就不随测量单位变化,即为无量纲量。

8.2.3 **量纲相关・量纲无关・量纲无关量的最大个数**

在描述一个力学现象的一组物理量:

$$\{\Psi_i\} = (\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_n)$$

中,凡是其量纲不能表成其余那些物理量量纲的指数幂积形式的物理量,称作它与其余物理量量纲无关,即量纲独立;反之,则称作量纲相关,即量纲不独立。

在数学描述上,$\{\Psi_i\}$中的一个物理量 Ψ_j 与其余物理量的量纲关系可以这样确定:若存在 C_1、C_2、$\cdots$、C_{j-1}、C_{j+1}、$\cdots$、C_n 共 $n-1$ 个不全为零的数,使得下式成立:

$$[\Psi_j] = [\Psi_1]^{C_1}[\Psi_2]^{C_2}\cdots[\Psi_{j-1}]^{C_{j-1}}[\Psi_{j+1}]^{C_{j+1}}\cdots[\Psi_n]^{C_n}$$

则物理量 Ψ_j 与 Ψ_1、Ψ_2、$\cdots$、Ψ_{j-1}、Ψ_{j+1}、$\cdots$、Ψ_n 物理量量纲相关;若不然,则 Ψ_j 与其余的物理量量纲无关。(显然若 Ψ_j 与 Ψ_1、Ψ_2、$\cdots$、Ψ_{j-1}、Ψ_{j+1}、$\cdots$、Ψ_n 量纲相关,则一定有上式存在,见附录 8.1 中的论述。)

显然,$\{\Psi_i\}$这组物理量若量纲相关,则存在 n 个不全为零的数:C_1、C_2、$\cdots$、C_i、$\cdots$、C_n 使之下式成立(下式亦是上式的改形):

$$[\Psi_1]^{C_1}[\Psi_2]^{C_2}\cdots[\Psi_i]^{C_i}\cdots[\Psi_n]^{C_n} = 1 \tag{8.33}$$

若量纲独立，则找不到 n 个不全为零的数可使得上式成立。

在一组物理量 $\{\Psi_i\}$ 中，如果 k 个量是量纲无关的，而任何 $k+1$ 个量都是量纲相关的，则称这组物理量量纲无关的最大个数为 k，显然 k 应满足：

$$k \leqslant \text{基本物理量的个数}, \quad k \leqslant n$$

在基本物理量已定的情况下，如何找出 $\{\Psi_i\}$ 中一组最大个数的量纲无关的物理量，可以使用矩阵求秩的办法。

设基本物理量为 Φ_1、Φ_2、$\cdots$、Φ_m，在力学中 $m=4$；若不考虑热效应，则 $m=3$。现求 $\{\Psi_i\}$ 中量纲无关物理量的最大个数及其相应的物理量。

按量纲公式(8.32)，则 $\{\Psi_i\}=(\Psi_1$、Ψ_2、$\cdots$、$\Psi_n)$ 的量纲可以表成：

$$\left.\begin{array}{l}[\Psi_1]=[\Phi_1]^{\alpha_{11}}[\Phi_2]^{\alpha_{12}}\cdots[\Phi_m]^{\alpha_{1m}}\\ [\Psi_2]=[\Phi_1]^{\alpha_{21}}[\Phi_2]^{\alpha_{22}}\cdots[\Phi_m]^{\alpha_{2m}}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ [\Psi_n]=[\Phi_1]^{\alpha_{n1}}[\Phi_2]^{\alpha_{n2}}\cdots[\Phi_m]^{\alpha_{nm}}\end{array}\right\} \qquad (8.34.1)$$

由此看出诸 $\{\Psi_i\}$ 的量纲与如下的诸矢量对应

$$\left.\begin{array}{l}[\Psi_1]\leftrightarrow\alpha_1=(\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1m})\\ [\Psi_2]\leftrightarrow\alpha_2=(\alpha_{21},\alpha_{22},\cdots,\alpha_{2m})\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ [\Psi_n]\leftrightarrow\alpha_n=(\alpha_{n1},\alpha_{n2},\cdots,\alpha_{nm})\end{array}\right\} \qquad (8.34.2)$$

① 若 Ψ_1、Ψ_2、$\cdots$、Ψ_n 量纲相关，则有(8.33)式成立。将(8.34.1)式代进(8.33)式中给出

$$[\Phi_1]^{C_j\alpha_{j1}}[\Phi_2]^{C_j\alpha_{j2}}\cdots[\Phi_n]^{C_j\alpha_{jm}}=1$$

其中

$$\left.\begin{array}{l}C_j\alpha_{j1}=\alpha_{11}C_1+\alpha_{21}C_2+\cdots+\alpha_{n1}C_n=0\\ C_j\alpha_{j2}=\alpha_{12}C_1+\alpha_{22}C_2+\cdots+\alpha_{n2}C_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ C_j\alpha_{jm}=\alpha_{1m}C_1+\alpha_{2m}C_2+\cdots+\alpha_{nm}C_n=0\end{array}\right\} \qquad (8.34.3)$$

若上式中的 C_1、C_2、$\cdots$、C_n 不全为零，则系数行列式 $J_n=0$，即

$$J_n=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \cdots & \alpha_{nm}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm}\end{vmatrix}=0 \qquad (8.34.5)$$

$J_n=0$，则相当式(8.34.2)所示的矢量 α_1、α_2、$\cdots$、α_n 线性相关。

若 $J_n\neq0$，则 Ψ_1、Ψ_2、$\cdots$、Ψ_n 这 n 个量量纲无关，从而这几个量就是量纲无关的最大个数的主定量，即

$$k=n$$

② 如果 $J_n=0$，则从 Ψ_1、Ψ_2、$\cdots$、Ψ_n 这 n 个量中任取 $q=n-1$ 个量，并假定有类似于(8.33)式成立，即有

$$[\Psi_1]^{C_1}[\Psi_2]^{C_2}\cdots[\Psi_q]^{C_q}=1$$

式中的 C_1、C_2、…、C_q 是否不全为零，就看行列式 J_{n-1} 是否为零，J_{n-1} 为

$$J_{n-1}=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{q1} & \alpha_{q2} & \cdots & \alpha_{qm}\end{vmatrix},\quad q=n-1$$

如果在这任取的 $q=n-1$ 个量中，有一组的 $J_{n-1}\neq 0$，则量纲无关的最大个数 k 即为

$$k=q=n-1$$

③ 如果 $J_{n-1}=0$，则从 Ψ_1、Ψ_2、…、Ψ_n 中任取 $s=n-2$ 个量，重复上述的步骤，则给出相应的 J_{n-2}，若 $J_{n-2}\neq 0$，则 k 为

$$k=n-2$$

④ 若 $J_{n-2}=0$，则再 Ψ_1、Ψ_2、…、Ψ_n 中任取 $p=n-3$ 个量，以此类推，直到找到 $J_{n-x}\neq 0$ 为止，则有

$$k=n-x,\quad 0\leqslant x\leqslant n$$

上述求 k 的过程就相当对式(8.34.2)所给出的诸矢量之分量所组成的矩阵(8.34.5)的求秩过程，即对 J_n 求秩。

$$J_n=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm}\end{bmatrix}$$

矩阵 J_n 的秩(rank)就是量纲无关的最大个数 k(注意：$k\leqslant m$，$k\leqslant n$)。

8.2.4 被定量·主定量

在描述一个物理过程的一组物理量中，凡是对描述该过程起主要和决定性作用的物理量称作主定量；由主定量所决定的那些物理量则称作被定量。

例如，在描述一个物理过程的微分方程组及其定解条件(边初条件)中的自变量，以及方程组和定解条件中的那些参量则为主定量；其要确定的未知函数则为被定量。

对于那些尚无数学模型或者数学模型尚不完善的物理过程，要正确选定哪些量是主定量、哪些量是被定量，常常要靠长期观察积累经验。我们既不能把本来起重要作用的因素(主定量)漏掉，而使结果荒谬或者不能说明现象的本质；也不能把那些确实不起重要作用、甚至不起作用的因素作为主定量选进来，否则会使问题复杂化。

8.3 量纲基本定理及其简单应用

8.3.1 量纲基本定理

若一物理量 Ψ 依赖于主定量 Ψ_1、Ψ_2、…、Ψ_k、Ψ_{k+1}、…、Ψ_{k+l}，数学上记作：

$$\Psi\parallel\Psi_1、\Psi_2、\cdots、\Psi_k、\Psi_{k+1}、\cdots、\Psi_{k+l}$$

设 Ψ_1、Ψ_2、…、Ψ_k 为量纲独立的最大个数的主定量，则有如下函数关系成立：

$$\pi=f(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_l)\tag{8.35}$$

其中无量纲量：

$$\left.\begin{aligned}
\pi &= \frac{\Psi}{\Psi_1^{a_1}\Psi_2^{a_2}\cdots\Psi_k^{a_k}} \\
\pi_1 &= \frac{\Psi_{k+1}}{\Psi_1^{a_{11}}\Psi_2^{a_{21}}\cdots\Psi_k^{a_{k1}}} \\
\pi_2 &= \frac{\Psi_{k+2}}{\Psi_1^{a_{12}}\Psi_2^{a_{22}}\cdots\Psi_k^{a_{k2}}} \\
&\cdots\cdots \\
\pi_l &= \frac{\Psi_{k+l}}{\Psi_1^{a_{1l}}\Psi_2^{a_{2l}}\cdots\Psi_k^{a_{kl}}}
\end{aligned}\right\} \tag{8.36}$$

这就是量纲基本定理,常称作:π 定理。

注意,Ψ_{k+1}、Ψ_{k+2}、…、Ψ_{k+l}这 l 个物理量中可以是有量纲的量,亦可是无量纲的量。

8.3.2　**量纲基本定理的证明(如下给出一般的证明方法)**

被定量 Ψ 当然作为主定量的函数,即

$$\Psi = f_*(\Psi_1、\Psi_2、\cdots、\Psi_k、\Psi_{k+1}、\cdots、\Psi_{k+l}) \tag{8.37}$$

这种函数关系当然不会因基本测量单位(属于同一系统的)发生变化而改变。

① 证明被定量 Ψ 与 Ψ_1、Ψ_2、…、Ψ_k量纲相关,即 Ψ 可与这些主定量构成一个无量纲量 π:

$$\pi = \frac{\Psi}{\Psi_1^{a_1}\Psi_2^{a_2}\cdots\Psi_k^{a_k}} \tag{8.38}$$

现用反证法,假定 Ψ 与 Ψ_1、Ψ_2、…、Ψ_k量纲独立,我们可以在诸物理量本身不变的情况下,改变基本物理量的测量单位,以使在新的测量单位系下(注意:如下所提到的 Ψ 与 Ψ'、Ψ_i 与 Ψ_i' 均指这些物理量在某单位下的数值):

$$\Psi' = \lambda\Psi,\quad \lambda \neq 1 \tag{8.39}$$

而使 Ψ_1、Ψ_2、…、Ψ_k不变(因已设 Ψ 与它们量纲独立,故可以做到这一点),即在新的测量单位系下:

$$\Psi_1' = \Psi_1,\ \Psi_2' = \Psi_2,\ \cdots,\ \Psi_k' = \Psi_k$$

此时其余的那些主定量亦不变,即有:

$$\begin{aligned}
\Psi_{k+i}' &= (\Psi_1')^{a_{1i}}(\Psi_2')^{a_{2i}}\cdots(\Psi_k')^{a_{ki}}\cdot\pi_i \\
&= \Psi_1^{a_{1i}}\Psi_2^{a_{2i}}\cdots\Psi_k^{a_{ki}}\cdot\pi_i = \Psi_{k+i} \\
&\qquad (i = 1,2,\cdots,l)
\end{aligned}$$

将以上这些量代进(8.37)式中,给出

$$\begin{aligned}
\Psi' &= f_*(\Psi_1'、\Psi_2'、\cdots、\Psi_k'、\Psi_{k+1}'、\cdots、\Psi_{k+l}') \\
&= f_*(\Psi_1、\Psi_2、\cdots、\Psi_k、\Psi_{k+1}、\cdots、\Psi_{k+l}) \\
&= \Psi
\end{aligned} \tag{8.40}$$

而据(8.39)式:$\Psi' = \lambda\Psi$,且 $\lambda\neq 1$,显然这与(8.40)式的结果矛盾,因此 Ψ 与 Ψ_1、Ψ_2、…、Ψ_k量纲相关,即(8.38)式成立。

② 证明(8.38)式中的 π 作为如下函数:

$$\pi = f(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_l) \tag{8.41}$$

据(8.38)和(8.37)式,则有:

$$\Psi = \Psi_1^{a_1}\Psi_2^{a_2}\cdots\Psi_k^{a_k} \cdot \pi = f_*(\Psi_1、\Psi_2、\cdots、\Psi_k、\Psi_{k+1}、\cdots、\Psi_{k+l}) \tag{8.42}$$

我们这样改变其基本测量单位：使之在新的基本测量单位系下（如下的Ψ'_1、Ψ'_2、…，亦是指这些物理量在新单位下的数值）：

$$\Psi'_1 = 1, \Psi'_2 = 1, \cdots, \Psi'_k = 1 \tag{8.43}$$

于是在这个新的单位制下：

$$\left.\begin{aligned} \Psi'_{k+1} &= (\Psi'_1)^{a_{11}}(\Psi'_2)^{a_{21}}\cdots(\Psi'_k)^{a_{k1}} \cdot \pi_1 = \pi_1 \\ \Psi'_{k+2} &= (\Psi'_1)^{a_{12}}(\Psi'_2)^{a_{22}}\cdots(\Psi'_k)^{a_{k2}} \cdot \pi_2 = \pi_2 \\ &\cdots\cdots \\ \Psi'_{k+l} &= (\Psi'_1)^{a_{1l}}(\Psi'_2)^{a_{2l}}\cdots(\Psi'_k)^{a_{kl}} \cdot \pi_l = \pi_l \end{aligned}\right\} \tag{8.44}$$

而据(8.42)式，在新的单位系下则有

$$\Psi' = (\Psi'_1)^{a_1}(\Psi'_2)^{a_2}\cdots(\Psi'_k)^{a_k} \cdot \pi = f_*(\Psi'_1、\Psi'_2、\cdots、\Psi'_k、\Psi'_{k+1}、\cdots、\Psi'_{k+l})$$

将(8.43)和(8.44)式代进上式，得到

$$\pi = f_*(1, 1, \cdots, 1, \pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_l)$$

即有

$$\pi = f(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_l) \tag{8.45}$$

定理证毕。（详细证明参见附录 8.2）

8.3.3 π 定理的应用

π 定理的应用步骤如下：

① 选定基本测量单位系；

② 对于所求的被定量 Ψ，找出决定它的所有独立的（指量之间的决定关系独立，而不是量纲独立）主定量 Ψ_1、Ψ_2、…、Ψ_{k+l}来，并写出它们的量纲；

③ 在诸独立的主定量中选出一组量纲独立的最大个数的主定量（在一般情况下，尽量不选自变量）：Ψ_1、Ψ_2、…、Ψ_k；

④ 利用 Ψ_1、Ψ_2、…、Ψ_k 写出对于 Ψ 以及对 Ψ_{k+1}、Ψ_{k+2}、…、Ψ_{k+l}的无量纲量 π 和 π_1，π_2，…，π_l；

⑤ 利用 π 定理，最后给出如下关系：

$$\frac{\Psi}{\Psi_1^{a_1}\Psi_2^{a_2}\cdots\Psi_k^{a_k}} = \pi = f(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_l)$$

π 定理只解决无量纲被定量 π 的函数 $f(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_l)$依赖关系，但不能确定它的具体函数形式，$f$ 的具体形式要通过方程组求解或者实验的办法来解决。

［例 1］ 质量为 m 的物体，由高为 h 处自由落下，见图 8.4，求落到地面所需要的时间 t_*.

取基本测量单位的量纲系统为(L、M、T)；该问题的主定量显然为：m、h 和重力加速度 g，而被定量为 t_*。即有

$$t_* \parallel m, h, g$$

m、h、g 这三个物理量的量纲独立，它们为：

$$[m] = M,\ [h] = L,\ [g] = LT^{-2}$$

在没有热效应的情况下，量纲无关的最大个数为 3，即 $k=3$，所以 m、h、g 就是量纲无关的

最大个数的主定量。根据 π 定理，则有

$$\frac{t_*}{n^{a_1}h^{a_2}g^{a_3}} = \pi = f(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_l)$$

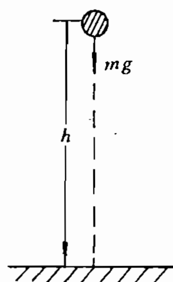


图 8.4

在现在的情况下$[t_*]=T$，因此可定出：

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1/2,\ a_3 = -1/2$$

又因整个主定量只有三个，所以

$$l = 0$$

于是有

$$\frac{t_*}{\sqrt{\frac{h}{g}}} = \pi = \text{const} = C_0$$

即有

$$t_* = C_0\sqrt{\frac{h}{g}}$$

得出如上关系式，没有借助任何物理规律。上式中的常数 C_0 可以通过实验确定（当然，我们由物理规律已经知道对于这个自由落体(freely falling body)，$C_0=\sqrt{2}$）。

通过上述例子足以显示出量纲理论的重要用途之所在。

［例 2］ 单摆运动，如图 8.5 所示。现用量纲分析方法来确定单摆(mathematical (simple) pendulum)的角位移 φ、摆线所受张力 N 和单摆的周期 B，在本问题中不考虑摩擦力和空气的阻力。

该问题不像前一问题那样简单，要找出问题的主定量，最好借助于方程组及定解条件。在平面内运动的单摆，其控制方程和初始条件可写成

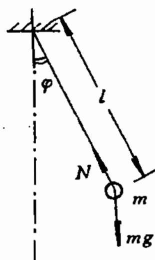


图 8.5 单摆

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = -\left(\dfrac{g}{l}\right)\sin\varphi \\ m\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 l = N - mg\cos\varphi \end{cases}$$

当 $t=0$ 时

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_0 \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = 0 \end{cases}$$

在如上方程组中 φ 和 N 为被定量。根据方程组和初始条件，可以找出全部独立的主定量为：t、l、g、m 和 φ_0，从而有

$$\varphi, N \parallel t, l, g, m, \varphi_0$$

取如上诸量的量纲：

$$[\varphi] = 1,\ [N] = MLT^{-2},\ [t] = T,\ [l] = L,\ [g] = LT^{-2},\ [m] = M,\ [\varphi_0] = 1$$

现选定 t、g、m 为量纲独立的最大主定量组，于是根据 π 定理则推出：

$$\varphi = f_1\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}, \varphi_0\right),\quad N = mg \cdot f_2\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}, \varphi_0\right)$$

在未解方程的情况下，由量纲分析便得知，单摆的角位移 φ 与质量 m 无关；单摆摆线所受张力 N 与单摆质量 m 和重力加速度 g 成正比。还有重要的一点，在保持 mg 和 φ_0 一定的条件下，对于 $t\sqrt{g/l}$ 相等的两个单摆运动状态，其张力 N 就相等，当然 φ 亦相等。

单摆的周期 B，可根据角位移 φ 再次等于 φ_0 时所需要的时间（$t=B$，即一个周期）来求，即解如下方程：

$$\varphi_0 = f_1(B\sqrt{\frac{g}{l}}, \varphi_0)$$

解如上方程则可给出 B：

$$B = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot f_3(\varphi_0)$$

即单摆的周期 B 正比于摆长 l 与重力加速度 g 之比的平方根。当然在以上诸式中 f_1、f_2、f_3 均为未知的，它们是不能由量纲分析求出的，只能靠解方程。但是量纲分析可以解决它们依赖何种形式组合的主定量。

8.3.4 量纲基本定理应用小结

① 正确选定主定量、被定量，尤其那些不能忽略起重要作用的各种常数，如气体常数、绝热指数、比热、粘性系数、重力加速度等等。所有的被定量的量纲应能表示成主定量之量纲的指数幂积形式；如果不能，则说明主定量或者被遗漏，或者是被定量本不是描述该问题的量。进行量纲分析之前，应尽量列出所有可能的主定量和被定量（尤其是主定量），然后针对不同的研究目的，舍去那些确实不起作用、或者不起重要作用的主定量，以突出问题的重点，同时也不致使问题不必要地复杂化。

正确地确定主、被定量——是量纲分析和运用 π 定理的关键，也是最大难点之所在。为此，必须对所研究的物理过程有深入地了解并占有大量实验观察资料。

② 在正确选定主、被定量之后，决定在这些主、被定量之中所出现的基本量纲的个数。在新的国际上规定的可能基本量纲中，对于力学过程，这种基本量纲有四个：L、M、T、θ；如果不考虑温度则只有三个：L、M、T。

③ 确定量纲独立的最大个数主定量，其个数 k 应等于或小于在相应问题中出现的基本量纲的个数。由于量纲独立的与量纲相关的是相对的，所以在寻找和确定量纲独立的主定量时，首先从最简单、最方便而又最容易判断的主定量开始，例如：特征长度、特征时间、特征速度等等。一旦选定的个数等于基本量纲的个数，则其余的主定量必定量纲相关。

④ 使用量纲公式，把被定量无量纲化。被定量的量纲一般用量纲独立的主定量来表示，有时为了方便，亦可以使用任意主定量的量纲来表示它们。

⑤ 无量纲主定量 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_l$ 的个数为 $l=n-k$，n 为整个主定量的个数。

⑥ 除了最简单的情况外，如[例 1]，量纲分析不能给出求解表达式的最后结果。无量纲的主、被定量之间的函数关系，仍须由求解方程组、或者进行实验研究来确定，即使对那些简单的问题也需要用补充办法确定常数（这样的常数至少为一个），如[例 1]。量纲分析的作用在于尽量简化问题（当然，有时亦不一定能做到），更重要的是量纲分析对提供：相似概念、多参数问题的综合分析、具体实验结果的推广与应用等起重要作用。

⑦ 量纲分析虽然是一种重要方法，但不是对任何问题经过量纲分析之后都能得到有益的结果。有时把量纲分析和方程组的性质同时考虑，这对简化方程有一定的作用，如将在第十一章研究的点爆炸自模运动那种情形。

无论如何，量纲分析方法总是力学（理论的和实验的）研究中的一个重要方法，值得对它重视。关于量纲理论的重要应用以及最成功的应用范例，请看第十一章。本章主要参考文献[1]和[2]。

附录 8.1

关于量纲公式的证明（仅供参考）

一、公理（axiom）

［**公理** 1］ 一个有量纲的物理量 Ψ，它一定可表成测量单位 $\langle\Psi\rangle$ 与在该测量单位下的数值 A 之乘积，即

$$\Psi = A\langle\Psi\rangle \tag{1}$$

［**公理** 2］ 一个物理量（如 Ψ）的大小是客观的一定的，它不因其测量单位的改变而改变。如 Ψ 的测量单位由 $\langle\Psi\rangle\to\langle\Psi\rangle'$，数值随之由 $A\to A'$ 时，则有

$$\Psi = A\langle\Psi\rangle = A'\langle\Psi\rangle' \tag{2}$$

二、推论（inference）

［**推论** 1］ 由公理 2 得出：对于一个本身不变的物理量 Ψ 而言，它的数值 A 的大小随其测量单位 $\langle\Psi\rangle$ 而变化，即 A 作为 $\langle\Psi\rangle$ 的函数，即

$$A = F_*(\langle\Psi\rangle) \tag{3}$$

而 $\langle\Psi\rangle$ 又作为基本物理量长度、质量、时间和温度的单位 $\langle L\rangle$、$\langle M\rangle$、$\langle T\rangle$、$\langle\theta\rangle$ 的函数，即

$$\langle\Psi\rangle = G(\langle L\rangle,\langle M\rangle,\langle T\rangle,\langle\theta\rangle) \tag{4}$$

于是有

$$A = F_*(\langle\Psi\rangle) = F(\langle L\rangle,\langle M\rangle,\langle T\rangle,\langle\theta\rangle) \tag{5}$$

若基本测量单位分别改变 l 倍、m 倍、t 倍和 ξ 倍而成为新的单位，即有

$$\left.\begin{aligned}\langle L\rangle &\to \langle L\rangle' = l\langle L\rangle\\ \langle M\rangle &\to \langle M\rangle' = m\langle M\rangle\\ \langle T\rangle &\to \langle T\rangle' = t\langle T\rangle\\ \langle\theta\rangle &\to \langle\theta\rangle' = \xi\langle\theta\rangle\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

而物理量 Ψ 本身不变，则据(5)式有

$$A' = F_*(\langle\Psi\rangle') = F(\langle L\rangle',\langle M\rangle',\langle T\rangle',\langle\theta\rangle') = F(l\langle L\rangle,m\langle M\rangle,t\langle T\rangle,\xi\langle\theta\rangle)$$

$$\frac{A'}{A} = \frac{F(l\langle L\rangle,m\langle M\rangle,t\langle T\rangle,\xi\langle\theta\rangle)}{F(\langle L\rangle,\langle M\rangle,\langle T\rangle,\langle\theta\rangle)} \tag{7}$$

［**推论** 2］ 由公理 2 得出：一个本身不变的物理量 Ψ，它在两个测量单位下的数值之比等于这两个单位之比的倒数、而与这两个具体单位无关（只取决于单位的比值）。例如若单位 $\langle\Psi\rangle'$ 为单位 $\langle\Psi\rangle$ 的 n 倍，则有

$$\frac{A'}{A}=\frac{\langle\Psi\rangle}{\langle\Psi\rangle'}=\frac{1}{n}=g_*(n) \tag{8}$$

根据(7)式和(8)式，一个本身不变的物理量在两个单位下的数值之比应为如下函数形式

$$\frac{A'}{A}=\frac{F(l\langle L\rangle,m\langle M\rangle,t\langle T\rangle,\xi\langle\theta\rangle)}{F(\langle L\rangle,\langle M\rangle,\langle T\rangle,\langle\theta\rangle)}=g(l,m,t,\xi) \tag{9}$$

三、证明　$[\Psi]=L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}\theta^{\delta}$

证明仍从一个物理量本身不变的前提出发，考虑其在不同的基本测量单位下的数值。

① 物理量 Ψ 在基本单位 $\langle L\rangle_1$、$\langle M\rangle_1$、$\langle T\rangle_1$、$\langle\theta\rangle_1$ 下的数值 A_1，根据(5)式则有

$$A_1=F(\langle L\rangle_1,\langle M\rangle_1,\langle T\rangle_1,\langle\theta\rangle_1) \tag{10}$$

在 $\langle L\rangle_2=l\langle L\rangle_1$、$\langle M\rangle_2=m\langle M\rangle_1$、$\langle T\rangle_2=t\langle T\rangle_1$、$\langle\theta\rangle_2=\xi\langle\theta\rangle_1$ 之下的数值 A_2 为

$$A_2=F(l\langle L\rangle_1,m\langle M\rangle_1,t\langle T\rangle_1,\xi\langle\theta\rangle_1) \tag{11}$$

在 $\langle L\rangle_2'=l'\langle L\rangle_1$、$\langle M\rangle_2'=m'\langle M\rangle_1$、$\langle T\rangle_2'=t'\langle T\rangle_1$、$\langle\theta\rangle_2'=\xi'\langle\theta\rangle_1$ 之下的数值 A_2' 为

$$A_2'=F(l'\langle L\rangle_1,m'\langle M\rangle_1,t'\langle T\rangle_1,\xi'\langle\theta\rangle) \tag{12}$$

依据(10)、(11)和(12)式，再根据(9)式则有

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{F(l\langle L\rangle_1,m\langle M\rangle_1,t\langle T\rangle_1,\xi\langle\theta\rangle_1)}{F(\langle L\rangle_1,\langle M\rangle_1,\langle T\rangle_1,\langle\theta\rangle_1)}=g(l,m,t,\xi) \tag{13}$$

$$\frac{A_2'}{A_1}=\frac{F(l'\langle L\rangle_1,m'\langle M\rangle_1,t'\langle T\rangle,\xi'\langle\theta\rangle_1)}{F(\langle L\rangle_1,\langle M\rangle_1,\langle T\rangle_1,\langle\theta\rangle_1)}=g(l',m',t',\xi') \tag{14}$$

由以上两式推出

$$\frac{A_2}{A_2'}=\frac{F(l\langle L\rangle_1,m\langle M\rangle_1,t\langle T\rangle_1,\xi\langle\theta\rangle_1)}{F(l'\langle L\rangle_1,m'\langle M\rangle_1,t'\langle T\rangle_1,\xi'\langle\theta\rangle_1)}=\frac{g(l,m,t,\xi)}{g(l',m',t',\xi')} \tag{15}$$

② 再按另一方式考虑 A_2 与 A_2' 的比值。令

$$\langle L\rangle_2'=\langle L\rangle,\langle M\rangle_2'=\langle M\rangle,\langle T\rangle_2'=\langle T\rangle,\langle\theta\rangle_2'=\langle\theta\rangle \tag{16}$$

则(12)式写成

$$A_2'=F(\langle L\rangle,\langle M\rangle,\langle T\rangle,\langle\theta\rangle)=A \tag{17}$$

根据(16)式，则有

$$\langle L\rangle_2=\frac{l}{l'}\langle L\rangle,\langle M\rangle_2=\frac{m}{m'}\langle M\rangle,\langle T\rangle_2=\frac{t}{t'}\langle T\rangle,\langle\theta\rangle_2=\frac{\xi}{\xi'}\langle\theta\rangle \tag{18}$$

从而(11)式写成

$$A_2=F\left(\frac{l}{l'}\langle L\rangle,\frac{m}{m'}\langle M\rangle,\frac{t}{t'}\langle T\rangle,\frac{\xi}{\xi'}\langle\theta\rangle\right)=A' \tag{19}$$

根据(17)和(19)式，再根据(9)式则有

$$\frac{A_2}{A_2'}=\frac{A'}{A}=\frac{F\left(\frac{l}{l'}\langle L\rangle,\frac{m}{m'}\langle M\rangle,\frac{t}{t'}\langle T\rangle,\frac{\xi}{\xi'}\langle\theta\rangle\right)}{F(\langle L\rangle,\langle M\rangle,\langle T\rangle,\langle\theta\rangle)}=g\left(\frac{l}{l'},\frac{m}{m'},\frac{t}{t'},\frac{\xi}{\xi'}\right) \tag{20}$$

③ 由式(15)和(20)推出

$$\frac{g(l,m,t,\xi)}{g(l',m',t',\xi')}=g\left(\frac{l}{l'},\frac{m}{m'},\frac{t}{t'},\frac{\xi}{\xi'}\right)=g(x_1,x_2,x_3,x_4) \tag{21}$$

其中

$$x_1 = \frac{l}{l'}, x_2 = \frac{m}{m'}, x_3 = \frac{t}{t'}, x_4 = \frac{\xi}{\xi'} \tag{22}$$

在如上两式中 l、m、t、ξ 与 l'、m'、t'、ξ'（或与 x_1、x_2、x_3、x_4）均为独立的参变量。现对(21)式分别求 l、m、t、ξ 的偏导数，即有

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{g(l',m',t',\xi')}\frac{\partial g(l,m,t,\xi)}{\partial l} &= \frac{1}{l'}\frac{\partial g(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_1} \\
\frac{1}{g(l',m',t',\xi')}\frac{\partial g(l,m,t,\xi)}{\partial m} &= \frac{1}{m'}\frac{\partial g(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_2} \\
\frac{1}{g(l',m',t',\xi')}\frac{\partial g(l,m,t,\xi)}{\partial t} &= \frac{1}{t'}\frac{\partial g(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_3} \\
\frac{1}{g(l',m',t',\xi')}\frac{\partial g(l,m,t,\xi)}{\partial \xi} &= \frac{1}{\xi'}\frac{\partial g(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_4}
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

现将上式在 $l=l'$、$m=m'$、$t=t'$、$\xi=\xi'$ 处取值，亦即视"带撇"的参变量与"不带撇"的参变量相等，于是上式可写成

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{g(l,m,t,\xi)}\frac{\partial g(l,m,t,\xi)}{\partial l} &= \frac{\alpha_*}{l} \\
\frac{1}{g(l,m,t,\xi)}\frac{\partial g(l,m,t,\xi)}{\partial m} &= \frac{\beta_*}{m} \\
\frac{1}{g(l,m,t,\xi)}\frac{\partial g(l,m,t,\xi)}{\partial t} &= \frac{\eta_*}{t} \\
\frac{1}{g(l,m,t,\xi)}\frac{\partial g(l,m,t,\xi)}{\partial \xi} &= \frac{\delta_*}{\xi}
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_* &= \left.\frac{\partial g(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_1}\right|_{x_1=1,x_2=1,x_3=1,x_4=1} = \text{const} \\
\beta_* &= \left.\frac{\partial g(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_2}\right|_{x_1=1,x_2=1,x_3=1,x_4=1} = \text{const} \\
\eta_* &= \left.\frac{\partial g(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_3}\right|_{x_1=1,x_2=1,x_3=1,x_4=1} = \text{const} \\
\delta_* &= \left.\frac{\partial g(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_4}\right|_{x_1=1,x_2=1,x_3=1,x_4=1} = \text{const}
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

将(24)式的各式分别乘以 $\mathrm{d}l$、$\mathrm{d}m$、$\mathrm{d}t$、$\mathrm{d}\xi$ 后，再将所得各式相加，则给出

$$\frac{1}{g}\left(\frac{\partial g}{\partial l}\mathrm{d}l + \frac{\partial g}{\partial m}\mathrm{d}m + \frac{\partial g}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial g}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi\right) = \frac{\alpha_*}{l}\mathrm{d}l + \frac{\beta_*}{m}\mathrm{d}m + \frac{\eta_*}{t}\mathrm{d}t + \frac{\delta_*}{\xi}\mathrm{d}\xi$$

即有

$$\mathrm{d}\ln g = \mathrm{d}\ln(l^{\alpha_*}\cdot m^{\beta_*}\cdot t^{\eta_*}\cdot \xi^{\delta_*})$$

积分后给出

$$g = g(l,m,t,\xi) = C_* l^{\alpha_*}\cdot m^{\beta_*}\cdot t^{\eta_*}\cdot \xi^{\delta_*} \tag{26}$$

其中 $C_*=\text{const}$，根据函数 g 的关系式(9)可知，当 $l=m=t=\xi=1$ 时

$$g(1,1,1,1) = 1$$

于是由(26)式推出

$$g = g(l,m,t,\xi) = l^{\alpha}\cdot m^{\beta}\cdot t^{\eta}\cdot \xi^{\delta}\cdot \tag{27}$$

④ 由(2)式和(9)式得知

$$\frac{\langle\Psi\rangle}{\langle\Psi\rangle'} = \frac{A'}{A} = g(l,m,t,\xi) = l^{\alpha}\cdot m^{\beta}\cdot t^{\eta}\cdot \xi^{\delta}\cdot \tag{28}$$

而$\langle\Psi\rangle$又作为如下函数(见(4)式)

$$\langle\Psi\rangle = G(\langle L\rangle,\langle M\rangle,\langle T\rangle,\langle\theta\rangle)$$

$$\langle\Psi\rangle' = G(l\langle L\rangle,m\langle M\rangle,t\langle T\rangle,\xi\langle\theta\rangle)$$

因此根据(28)式和如上两式,推出$\langle\Psi\rangle$可取为

$$\langle\Psi\rangle = \langle L\rangle^{\alpha}\langle M\rangle^{\beta}\langle T\rangle^{\eta}\langle\theta\rangle^{\xi} \tag{29}$$

其中 $\alpha=-\alpha.$、$\beta=-\beta.$、$\eta=-\eta.$、$\xi=-\xi..$

⑤ 如上给出了物理量 Ψ 的单位作为基本物理量单位的函数表达式,其实按量纲的定义,单位的表达式就是量纲的表达式,故有

$$[\Psi] = L^{\alpha}M^{\beta}T^{\eta}\theta^{\xi} \tag{30}$$

从而量纲公式得以证明。

注意:尽管式(29)与式(30)是一回事,然而我们所采用的符号却不同,将取量纲写成“[ ]”,而取单位写成“⟨ ⟩”。之所以如此,是避免造成不必要的混乱。因若将二者写成一样,即有:$\Psi=A[\Psi]$,这时 Ψ 取量纲则有:$[\Psi]=[A[\Psi]]=[A][\Psi]$,数值 A 成了“无量纲量”,否则等式不成立。然而 A 却是“有量纲的”,单位不同它也不同。

四、关于 $[\Psi]=[\Psi_1]^{\alpha_1}[\Psi_2]^{\alpha_2}\cdots[\Psi_k]^{\alpha_k}$

如果一个物理量 Ψ 的单位由物理量 Ψ_1、Ψ_2、…、Ψ_k 的单位$\langle\Psi_1\rangle$、$\langle\Psi_2\rangle$、…、$\langle\Psi_k\rangle$决定,即$\langle\Psi\rangle$作为它们的函数

$$\langle\Psi\rangle = G(\langle\Psi_1\rangle,\langle\Psi_2\rangle,\cdots,\langle\Psi_k\rangle) \tag{31}$$

则按如上的推证法,同样可以证明有类似(29)式形式的表达式,(因在推证(29)式时,只用到$\langle L\rangle$、$\langle M\rangle$、$\langle T\rangle$、$\langle\theta\rangle$作为$\langle\Psi\rangle$的“自变量”,并没有用到它们作为基本测量单位的特性),即有

$$\langle\Psi\rangle = \langle\Psi_1\rangle^{\alpha_1}\langle\Psi_2\rangle^{\alpha_2}\cdots\langle\Psi_k\rangle^{\alpha_k} \tag{32}$$

亦即有

$$[\Psi] = [\Psi_1]^{\alpha_1}[\Psi_2]^{\alpha_2}\cdots[\Psi_k]^{\alpha_k} \tag{33}$$

附录 8.2

π 定理的证明(仅供参考)

设物理量 Ψ 的主定量为:Ψ_1、Ψ_2、Ψ_3、…、Ψ_k、Ψ_{k+1}、Ψ_{k+2}、…、Ψ_{k+l},其中 Ψ_1、Ψ_2、…、Ψ_k 为量纲独立的最大个数的主定量。

一、证明前的准备

由于 Ψ 现由诸 Ψ_i(其中 $i=1,2,\cdots,n$)决定,所以 Ψ 作为它们的函数

$$\Psi = A\langle\Psi\rangle = f_{\Delta}(\Psi_1、\Psi_2、\cdots、\Psi_k、\Psi_{k+1}、\Psi_{k+l}) \tag{34}$$

现将主定量亦表成单位与数值之积的形式

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_1 = A_1\langle\Psi_1\rangle,\ \Psi_2 = A_2\langle\Psi_2\rangle,\ \cdots,\ \Psi_k = A_k\langle\Psi_k\rangle \\ &\Psi_{k+1} = A_{k+1}\langle\Psi_{k+1}\rangle,\ \Psi_{k+2} = A_{k+2}\langle\Psi_{k+2}\rangle,\ \cdots,\ \Psi_{k+l} = A_{k+l}\langle\Psi_{k+l}\rangle \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

由于 $\Psi_{k+1}、\Psi_{k+2}、\cdots、\Psi_{k+l}$的量纲由 $\Psi_1、\Psi_2、\cdots、\Psi_k$ 的量纲决定，故据(32)式则有

$$\left.\begin{aligned} &\langle\Psi_{k+1}\rangle = \langle\Psi_1\rangle^{a_{11}}\langle\Psi_2\rangle^{a_{21}}\cdots\langle\Psi_k\rangle^{a_{k1}} \\ &\langle\Psi_{k+2}\rangle = \langle\Psi_1\rangle^{a_{12}}\langle\Psi_2\rangle^{a_{22}}\cdots\langle\Psi_k\rangle^{a_{k2}} \\ &\cdots\cdots \\ &\langle\Psi_{k+l}\rangle = \langle\Psi_1\rangle^{a_{1l}}\langle\Psi_2\rangle^{a_{2l}}\cdots\langle\Psi_k\rangle^{a_{kl}} \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

根据(34)式和(36)式，单位$\langle\Psi\rangle$则作为如下函数

$$\begin{aligned} \langle\Psi\rangle &= G_*(\langle\Psi_1\rangle,\langle\Psi_2\rangle,\cdots,\langle\Psi_k\rangle,\langle\Psi_{k+1}\rangle,\cdots,\langle\Psi_{k+l}\rangle) \\ &= G(\langle\Psi_1\rangle,\langle\Psi_2\rangle,\cdots,\langle\Psi_k\rangle) \end{aligned}$$

再据(32)式，上式又可表成

$$\langle\Psi\rangle = \langle\Psi_1\rangle^{a_1}\langle\Psi_2\rangle^{a_2}\cdots\langle\Psi_k\rangle^{a_k} \tag{37}$$

二、写出无量纲量

根据(34)～(37)式，则无量纲量 $\pi、\pi_1、\pi_2、\cdots、\pi_l$ 可表成

$$\pi = \frac{\Psi}{\Psi_1^{a_1}\Psi_2^{a_2}\cdots\Psi_k^{a_k}} = \frac{A\langle\Psi\rangle}{(A_1^{a_1}A_2^{a_2}\cdots A_k^{a_k})\cdot(\langle\Psi_1\rangle^{a_1}\langle\Psi_2\rangle^{a_2}\cdots\langle\Psi_k\rangle^{a_k})} = \frac{A}{A_1^{a_1}A_2^{a_2}\cdots A_k^{a_k}} \tag{38}$$

$$\left.\begin{aligned} &\pi_1 = \frac{\Psi_{k+1}}{\Psi_1^{a_{11}}\Psi_2^{a_{21}}\cdots\Psi_k^{a_{k1}}} = \frac{A_{k+1}}{A_1^{a_{11}}A_2^{a_{21}}\cdots A_k^{a_{k1}}} \\ &\pi_2 = \frac{\Psi_{k+2}}{\Psi_1^{a_{12}}\Psi_2^{a_{22}}\cdots\Psi_k^{a_{k2}}} = \frac{A_{k+2}}{A_1^{a_{12}}A_2^{a_{22}}\cdots A_k^{a_{k2}}} \\ &\cdots\cdots \\ &\pi_l = \frac{\Psi_{k+l}}{\Psi_1^{a_{1l}}\Psi_2^{a_{2l}}\cdots\Psi_k^{a_{kl}}} = \frac{A_{k+l}}{A_1^{a_{1l}}A_2^{a_{2l}}\cdots A_k^{a_{kl}}} \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

三、定理的证明

由式(34)可知，数值 A 当然亦作为数值 $A_1、A_2、\cdots、A_k、A_{k+1}、\cdots、A_{k+l}$的函数，即

$$A = f_*(A_1、A_2、\cdots、A_k、A_{k+1}、\cdots、A_{k+l}) \tag{40}$$

现在 $\Psi_1、\Psi_2、\cdots、\Psi_k$ 本身保持不变的情况下改变它们的测量单位，当然它们的数值亦随之改变，即

$$\langle\Psi_1\rangle \to \langle\Psi_1\rangle',\langle\Psi_2\rangle \to \langle\Psi_2\rangle',\cdots,\langle\Psi_k\rangle \to \langle\Psi_k\rangle'$$

$$A_1 \to A_1',\ A_2 \to A_2',\ \cdots,\ A_k \to A_k'$$

于是由这些量的量纲决定的 $\Psi、\Psi_{k+1}、\Psi_{k+1}、\cdots、\Psi_{k+l}$的单位以至于数值亦随之改变，即

$$\left.\begin{aligned} &\langle\Psi\rangle \to \langle\Psi\rangle' = \langle\Psi_1\rangle'^{a_1}\langle\Psi_2\rangle'^{a_2}\cdots\langle\Psi_k\rangle'^{a_k},\ A \to A' \\ &\langle\Psi_{k+1}\rangle \to \langle\Psi_{k+1}\rangle' = \langle\Psi_1\rangle'^{a_{11}}\langle\Psi_2\rangle'^{a_{21}}\cdots\langle\Psi_k\rangle'^{a_{k1}},\ A_{k+1} \to A_{k+1}' \\ &\langle\Psi_{k+2}\rangle \to \langle\Psi_{k+2}\rangle' = \langle\Psi_1\rangle'^{a_{12}}\langle\Psi_2\rangle'^{a_{22}}\cdots\langle\Psi_k\rangle'^{a_{k2}},\ A_{k+1} \to A_{k+2}' \\ &\cdots\cdots \\ &\langle\Psi_{k+l}\rangle \to \langle\Psi_{k+l}\rangle' = \langle\Psi_1\rangle'^{a_{1l}}\langle\Psi_2\rangle'^{a_{2l}}\cdots\langle\Psi_k\rangle'^{a_{kl}},\ A_{k+l} \to A_{k+l}' \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

根据附录8.1中的公理2，在Ψ_1、Ψ_2、…、Ψ_k、Ψ_{k+1}、…、Ψ_{k+l}保持不变的情况下应有

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi = A\langle\Psi\rangle = A'\langle\Psi\rangle' \\
&\Psi_1 = A_1\langle\Psi_1\rangle = A_1'\langle\Psi_1\rangle' \\
&\Psi_2 = A_2\langle\Psi_2\rangle = A_2'\langle\Psi_2\rangle' \\
&\cdots\cdots \\
&\Psi_k = A_k\langle\Psi_k\rangle = A_k'\langle\Psi_k\rangle' \\
&\Psi_{k+1} = A_{k+1}\langle\Psi_{k+1}\rangle = A_{k+1}'\langle\Psi_{k+1}\rangle' \\
&\cdots\cdots \\
&\Psi_{k+l} = A_{k+l}\langle\Psi_{k+l}\rangle = A_{k+l}'\langle\Psi_{k+l}\rangle'
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

由上式得知，式(38)和(39)所示的诸π在新单位系下其值不改且表成

$$\pi = \frac{A'}{A_1'^{\alpha_1}A_2'^{\alpha_2}\cdots A_k'^{\alpha_k}} \tag{43}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\pi_1 = \frac{A_{k+1}'}{A_1'^{\alpha_{11}}A_2'^{\alpha_{21}}\cdots A_k'^{\alpha_{k1}}} \\
&\pi_2 = \frac{A_{k+2}'}{A_1'^{\alpha_{12}}A_2'^{\alpha_{22}}\cdots A_k'^{\alpha_{k2}}} \\
&\cdots\cdots \\
&\pi_l = \frac{A_{k+l}'}{A_1'^{\alpha_{1l}}A_2'^{\alpha_{2l}}\cdots A_k'^{\alpha_{kl}}}
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

根据(40)式和(44)式，在新单位下A'表成

$$\begin{aligned}
A' &= f_*(A_1', A_2', \cdots, A_k', A_{k+1}', \cdots, A_{k+l}') \\
&= f_*(A_1', A_2', \cdots, A_k', (A_1'^{\alpha_{11}}A_2'^{\alpha_{21}}\cdots A_k'^{\alpha_{k1}})\cdot\pi_1, \cdots, (A_1'^{\alpha_{1l}}A_2'^{\alpha_{2l}}\cdots A_k'^{\alpha_{kl}})\cdot\pi_l)
\end{aligned}$$

利用上式则(43)式写成

$$\pi = \frac{f_*(A_1', A_2', \cdots, A_k', (A_1'^{\alpha_{11}}A_2'^{\alpha_{21}}\cdots A_k'^{\alpha_{k1}})\cdot\pi_1, \cdots, (A_1'^{\alpha_{1l}}A_2'^{\alpha_{2l}}\cdots A_k'^{\alpha_{kl}})\cdot\pi_l)}{A_1'^{\alpha_1}A_2'^{\alpha_2}\cdots A_k'^{\alpha_k}} \tag{45}$$

据式(38)和(39)以及式(43)和(44)，在Ψ_1、Ψ_2、…、Ψ_k、Ψ_{k+1}、…、Ψ_{k+l}本身取定即不变(当然Ψ亦随之取定)的情况下，不管单位$\langle\Psi_1\rangle'$、$\langle\Psi_2\rangle'$、…、$\langle\Psi_k\rangle'$如何取，π_1、π_2、…、π_l和π**都不变**(它们为无量纲量)；同时式(45)的表达形式以及f_*的函数形式亦**永恒不变**。

鉴于如此，我们可将单位$\langle\Psi_1\rangle$、$\langle\Psi_2\rangle$、…、$\langle\Psi_k\rangle$这样改变成$\langle\Psi_1\rangle'$、$\langle\Psi_2\rangle'$、…、$\langle\Psi_k\rangle'$：使之在$\langle\Psi_1\rangle'$、$\langle\Psi_2\rangle'$、…、$\langle\Psi_k\rangle'$单位系下

$$A_1' = A_2' = \cdots = A_k' = 1 \tag{46}$$

于是在上式的条件下，式(45)变成

$$\pi = f_*(1, 1, \cdots, 1, \pi_1, \cdots, \pi_l) \tag{47}$$

在函数f_*中出现一连串的常数"1"，它们既不是变量也不是参量，故作为函数依赖关系可以不写出，于是上式写成

$$\pi = f(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_l) \tag{48}$$

定理证毕。如上关系式的得出虽是在特殊的测量单位系推得，然而π、π_1、π_2、…、π_l是无量纲量，它们却不随单位的改变而改变，这从它们的两种表达式(38)和(43)、(39)和(44)可

以清楚地看出，所以关系式(48)是普遍适用的。

参考文献

[1] 时爱民，苏铭德，刘季稔．气体动力基础．北京：科学出版社，1988

[2] 杜珣．气体动力学讲义．北京：北京大学，1962

[3] Д.N. 谢道夫．力学中的相似方法与量纲理论．北京：科学出版社，1984.2

[4] 吴望一．流体力学．北京：北京大学出版社，1985

第九章　炸药与爆炸概论

为了研究爆轰波及其作用，本章先讲述炸药与爆炸的一般知识。

9.1　爆炸与炸药

9.1.1　爆炸现象

所谓爆炸就是能量的急剧释放过程。在自然界、工程、日常生活中以及在军事上存在大量的爆炸现象，爆炸现象是多种多样，大致归为三类。

1. *物理爆炸*(physical explosion)

物理爆炸是系统的物理状态发生了变化。这类的例子很多：

① 蒸汽锅炉或高压气瓶的爆炸。蒸汽锅炉的爆炸是因过热的水迅速变为水蒸汽而引起的，其破坏作用取决于气体的压力。高压气瓶的爆炸亦是内部气体压力过高而引起的。

② 雷电以及细金属丝因通过高压电流而发生的爆炸。这种爆炸的产生，是由于电压很高、而放电时间又极短所致。由于放电在微秒量级时间内造成高能量密度和极高的温度，从而导致放电区气体压力急剧上升，并扰动周围的介质，形成很强的冲击波。

③ 其他。除了上述物理爆炸现象之外，还有雪崩、地震、高速粒子撞击物体表面等。

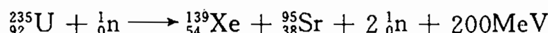
2. *化学爆炸*(chemical explosion)

化学爆炸是系统在能量释放过程中发生了化学变化，形成了新的化学物质。化学爆炸就是我们常说的炸药或火药等所形成的爆炸。炸药，从热力学角度来讲，它是个相对不稳定的系统，一旦外界作用达到一定程度时，它就能迅速地释放出热量，同时产生大量高温气体。炸药爆炸速度快，其速度每秒高达数千到万米，所形成的气体温度可达 3000～5000℃，压力可达几十万大气压，因而气体迅速膨胀并对周围介质做功。

除了常见的炸药和火药的化学爆炸之外，还有浮悬于空气中的细煤粉或其他可燃粉尘的爆炸(爆燃)；甲烷、乙烷以一定比例与空气混合时所发生的爆炸等等。

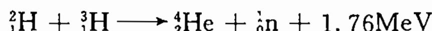
3. *核爆炸*(nuclear explosion)

核爆炸是系统在能量释放过程生成了新的元素。例如原子弹(atom-bomb)爆炸，则是铀的原子核发生了裂变(fission)



$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{139}_{54}Xe + ^{95}_{38}Sr + 2\,^{1}_{0}n + 200MeV$$

氢弹(hydrogen-bomb)爆炸是氘($^{2}_{1}H$)和氚($^{3}_{1}H$)的核发生了聚变(fusion)：



$$^{2}_{1}H + ^{3}_{1}H \longrightarrow ^{4}_{2}He + ^{1}_{0}n + 1.76MeV$$

在如上两式中参加反应的物质和生成物质均按摩尔(克原子)计算的，eV 为电子伏，M＝10^6.

从如上两式看出，在两种核反应中都释放出大量的能量，这种能量要比一般炸药所释放出的能量高得多。核爆炸可能形成数百万到数千万度的高温，在爆炸中心会造成数百万大气压，同时还有很强的光辐射和热辐射。因此它所造成的破坏要比一般的炸药大得多；

一颗核弹的爆炸一般都相当于数万吨到数千万吨的 TNT 炸药的爆炸。

9.1.2 炸药爆炸的基本特征

化学爆炸是人们接触最多、用得最广、最有实际意义的一种爆炸。炸药则是能发生化学爆炸物质的最典型的代表。

从实质上讲，炸药爆炸是一个体系(把炸药看成一个化学体系)的非常迅速的化学反应过程。例如，一个炸药包用雷管引爆后，人们所看到的是炸药包立即变成一团火光，同时形成浓密的烟雾并产生巨大的响声。由于爆炸过程之快，炸药所形成的产物气体最初尚来不及膨胀，故产物气体的体积几乎等于炸药包的体积，该气体处于强烈的压缩状态，因此具有极高的压力。

归纳起来，炸药爆炸具有以下三大特征：

1. 反应过程放热

爆炸放热是炸药爆炸反应应具有的第一个必要条件，没有这个条件，爆炸过程根本不可能产生。假若反应不伴随热量的释放，爆炸反应将不可能自持，从而也不可能出现爆炸过程的自动传播。显然，若“爆炸”过程要求外界提供能源以分解炸药物质，那么其过程就不可能具有爆炸性质。

由于反应放热(这个热量称作爆炸热或爆热)，使之炸药的产物气体温度达数千度，反应放热和反应传播速度越大，则爆炸的破坏性也就越大。

爆热是炸药工作能力的标志，也是炸药的一个最重要特征。

在工程中广泛使用的现代炸药，爆热一般介于 3800～7500kJ/kg 之间，如 TNT(梯恩梯)的爆热为 4230kJ/kg、硝化甘油的爆热为 6220kJ/kg。

2. 反应过程高速度

爆炸反应与一般的化学反应，其最大的差异是反应速度，爆炸反应过程极快，由炸药变成最终产物气体的反应时间是微秒(μs)或 10μs 的量级，放能的高速度，正是炸药优于一般燃料之所在，一般的化学反应也是放热的，而且所放出的热量可能要比炸药多得多，然而反应速度太慢，因此达不到高能量密度，如以煤和 TNT 相比，燃烧 1kg 煤放出的热量为 8920kJ；燃烧 1kgTNT 放出的热量却只有 4230kJ。但是，1kg 煤燃尽需要数十分钟，而 1kgTNT 爆炸完毕仅需要十到几十微秒，这正是问题的关键所在。普通燃料燃烧由于反应过程慢，使得生成的产物气体在反应进行中就发生了相当程度的膨胀，同时放出的热量通过热传导和辐射而严重地散失，从而使生成的气体只能达到相当低的能量密度；而爆炸反应过程极为迅速，以至于可以认为爆炸反应释放的能量几乎全部聚集在相当原来炸药所占那么大体积的产物气体之中，从而达到高度的能量集中。

3. 反应后能生成大量的气体产物

炸药爆炸时所以能够膨胀做功并对周围介质造成破坏，其根本原因之一就在于：炸药爆炸时，能在极短的时间内生成大量气体产物。如果反应过程中不产生大量气体，那么爆炸就不能在瞬间造成高压状态，从而也就没有对周围产生破坏的做功介质或者只有很少的做功介质。由于爆炸反应迅速，一块炸药可由固体立即变成“同体积”的气体，再加上反应放热，从而造成所生成的气体高温高压。气体比固体和液体的膨胀系数大得多，这就使得气体成为爆炸做功的优良介质。炸药爆炸过程正是利用气体的这种特点把炸药的势能

迅速地转变为爆炸的机械功的。

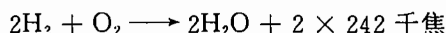
表 9.1 列出了几种炸药的气体产物体积(在标准状态下的体积),从表中可以看到产物气体的体积可为原炸药体积的一千倍,这种气体在爆炸瞬间处于非常高的压力之下。

表 9.1 几种炸药爆炸所产生的气体产物的体积

炸药名称	产物气体的体积(单位:升)	
	每千克炸药	每升炸药
硝化棉(13.3%N)(NC)	765	995
苦味酸(PA)	715	1145
梯恩梯(TNT)	740	1180
硝化甘油(NG)	690	1105

尤其是凝聚炸药,它在爆炸时,最大压力可达数十万大气压,如 TNT 爆炸时可达二十多万大气压,这种压力在一般的化学反应条件下是无法实现的。

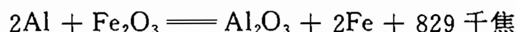
需要指出,对于气态系统爆炸时,体积一般不会增大,在某些场合下,爆炸气体产物的体积甚至会减小,如爆鸣气(氢氧混合气体)的爆炸就是这种反应的特例:



$$2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O + 2 \times 242 \text{ 千焦}$$

由于爆炸的结果,使之原体积反而减小三分之一。不过,体积的减小被反应过程的迅速以及放热性所补偿了,因此这种气体爆炸时压力仍可达到 10atm。

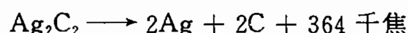
在爆炸的过程中生成气体产物的重要意义,可通过同其发生化学反应但不生成气体的一系列情况相较看出来。如大家所熟知的铝热剂的反应



$$2Al + Fe_2O_3 = Al_2O_3 + 2Fe + 829 \text{ 千焦}$$

这种反应通常不发生爆炸,尽管反应的热效应足以把最终产物(Fe 和 Al_2O_3)加热到 3000℃,而且反应过程相当快,但是由于生不成气体而造不成爆炸现象。

当然亦有例外,有些物质虽然在化学反应中形不成气体,但是却有爆炸性质。例如,乙炔银的分解反应



$$Ag_2C_2 \longrightarrow 2Ag + 2C + 364 \text{ 千焦}$$

这种反应虽然反应生成物都是固体,但由于在快速反应下处于高温的银要发生汽化,同时使周围的气体迅速升温而导致爆炸。

于是,根据上述的定性讨论,可以得出结论:只有上面所提到的三种基本因素(放热性、反应过程迅速、生成气体)同时结合起来,其化学反应过程才具有爆炸性。

9.1.3 爆炸过程的分类

炸药在不同的条件下和受到不同的外界作用时可能出现三种不同的急剧反应:燃烧、爆炸和爆轰。这三种反应形式在性质上有重大的区别,所以了解这三种形式的特点及其转化条件,对于正确地使用、加工和报废处理是非常必要的。

燃烧、爆炸和爆轰(deflagration,explosion and detonation)这三种反应都是从某一局部开始,然后以波的形式在炸药中自持地传播,这种波称作化学反应波,之所以称为"波",是因为它是一种扰动的传播,即反应以某种速度向未反应部分一层一层地传播。这种传播是自持的,头一层炸药状态改变而引起下一层炸药状态的改变,在已改变区与未改变区之

间有一个很窄的化学反应区，化学反应就在这个区域中激烈地进行，这个狭窄的区域称作化学反应波阵面，它以一定的速度向未反应区的炸药传播着。图 9.1 为这种反应过程的示意图。

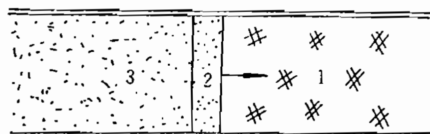


图 9.1　在一个刚性管中化学反应波阵面沿炸药的传播

1—炸药；2—化学反应波阵面；3—反应产物

燃烧、爆炸与爆轰之间虽然传播的形式相同，但是传播机理、传播速度以及受外界的影响却不同，尤其是燃烧同爆炸和爆轰之间。

燃烧反应的能量是通过热传导、辐射以及燃烧产物的扩散作用传入未反应炸药层的。燃烧反应的传播速度一般约为每秒数毫米到每秒数米，最大的燃烧速度也只有每秒数百米（如黑火药的最大燃烧速度约为 400m/s 左右），即使如此，它也远远小于原始炸药的声速。燃烧的速度受外界条件影响很大，特别是受环境压力条件的影响，如在大气中燃烧进行得很慢，但若将炸药放在密闭或半密闭的容器中燃烧，则反应过程的速度急剧上升加快，其压力会高达数千大气压，此时燃烧所形成的气体产物能够做发射功，火炮发射弹丸正是利用炸药燃烧的这一性质。燃烧过程中反应产物的运动方向与燃烧波阵面运动方向相反，因此燃烧波阵面内的压力较低。

爆炸反应的能量是通过冲击波传递的。爆炸过程的传播速度总是大于原始炸药的声速，其速度一般高达每秒数千米，如密度 $\rho_0=1.6\text{g/cm}^3$ 的铸装 TNT，它的爆速约为 6900m/s 左右。爆炸的传播速度与外界条件关系不大。在爆炸过程中在靠近反应阵面的反应产物的运动方向与爆炸传播方向相同。

爆轰与爆炸的唯一差别是：爆轰的传播速度（爆速）是恒定的（故有时为了强调这一点，又把爆轰称作稳定爆轰），而爆炸的传播速度（有时亦称爆速）是变化的。因此，爆轰只不过是爆炸的一种定态形式。

鉴于上述情况，故有时“爆轰”也用“爆炸”一词来统称；但是亦有不少人用“爆轰”一词来统称，将爆炸称作“不稳定爆轰”，相应于上面所指的“爆轰”则称作“稳定爆轰”。到底用“爆炸”一词来统一？还是用“爆轰”一词来统一？尚无定论。

在本书以下的论述中，基本不用“爆炸”或“爆轰”一词来统一，仍按爆轰和爆炸的上面的定义。不过由于我们研究的主要是爆轰，而爆轰过程往往也涉及到爆炸，如药柱起爆开始的一段，所以有时亦把整个过程用“爆轰”一词来统一，把过程分为不稳定的爆轰（即爆炸）和稳定爆轰（即爆轰）。亦有时为了强调爆速恒定，而单独使用稳定爆轰一词。

任何炸药都能燃烧，又能爆炸或者爆轰。在一定的条件下它们可以转变，如炸药的燃烧可以转变成爆炸或爆轰，其转变的条件是燃烧生成产物的速度大于其产物的扩散速度，一旦达到这种情况就会导致热量的积聚，使燃速加快、压力增加，由于压力增大，又促使燃

烧速度加快，最后促成爆炸。因此用燃烧办法销毁炸药时，要防止燃烧时形成高温高压，故不能把大量炸药堆积起来燃烧，同时还要注意不能在密闭环境或散热不良的地方燃烧。在野外烧毁时宜逆风引燃。

同时，由于炸药性质、物理状态和装药密度的不同，燃烧转爆炸或爆轰的难易程度也是不一样的。起爆药极易由燃烧转为爆炸或爆轰。因此不能用燃烧的办法销毁它。黑索金炸药(RDX)和太安炸药(PETN)在100个大气压下，能由燃烧转为爆炸或爆轰；而硝化甘油、胶质炸药在相当高的压力下，燃烧也不容易变成爆炸或爆轰。在空气中燃烧转为爆炸或爆轰的最小药量则因炸药的品种不同而不同，太安约为3kg，梯恩梯约为1000kg。这说明不同炸药由燃烧转爆轰的难易程度差异很大，所以在加工、使用和处理炸药时，应特别注意到这些方面。

9.1.4 炸药的分类

人们对炸药的分类方式各有不同，如下我们按炸药的物态、组成和用途来分类：

1. 按物态分类

① 固体炸药(solid explosive)

固体炸药当然是指在常温下呈固体状态的炸药，这一类炸药用途最广，如梯恩梯(TNT)、黑索金(RDX)、太安(PETN)、硝酸铵(NH_4NO_3)和太乳炸药等。

② 液体炸药(liquid explosive)

液体炸药是指在常温下是液态的炸药，如硝化甘油[$C_3H_5(ONO_2)_3$]、硝化乙二醇[$C_2H_4(ONO_2)_2$]以及多组分的液相酸基炸药等。

③ 气相炸药(gas-phase explosive)

这一类炸药都是气态混合物，单位体积的能量都很小，使用亦不方便，因此过去在爆炸技术上很少应用，但是随着新技术的出现，它们亦开辟了新的用途。这一类炸药有：爆鸣气(氢氧混合物)、苯蒸汽与氧的混合物、矿井瓦斯等。

④ 多相炸药(multi-phase explosive)

这一类炸药为固体物质与液体物质、固体物质与气体物质、或者液体物质与气体物质混合所组成的炸药。例如铵油炸药、浆状炸药、含硝化甘油与硝酸铵的胶质炸药与半胶质炸药等等。

2. 按组分分类

① 单质炸药(simple substance explosive)

单质炸药为只有一种化学成分的炸药，其多数为分子内含氧的有机化合物。这一类炸药为相对不稳定的化学系统，在外界作用下能发生迅速分解反应，放出大量热量，而内部键断裂，所形成的自由原子(或离子)重新组合成新的、在热力学上且为稳定的产物。

单质炸药按它们的分子结构又分成：

a. 乙炔及其衍生物，如乙炔银[Ag_2C_2]、乙炔汞[Hg_2C_2]等。

b. 雷酸及其盐类，如雷汞[$Hg(ONC)_2$]、雷酸银[$Ag(ONC)$]等。

c. 硝酸脂类，如硝化乙二醇[$C_2H_4(ONO_2)_2$]、硝化甘油[$C_3H_5(ONO_2)_3$]、太安[$C(CH_2ONO_2)_4$]等。

d. 硝酸盐类，如硝酸铵[NH_4NO_3]、硝酸尿[$NH_2-CO-NH_2 \cdot HNO_3$]等。

e. 硝基化合物，如梯恩梯[TNT]、苦味酸[PA]、二硝基甲苯[DNT]、黑索金[RDX]、硝基甲烷[NM]、黑喜儿[HND]等等。

其他还有氯酸盐、过氯酸盐、叠氮化物等。

② 混合炸药(mixed explosive)

混合炸药是由两种或两种以上的、在化学上且为独立成分的物质组成。通常，混合炸药的成分中有一种为含氧丰富而另一种根本不含氧或含氧较少。为了某种目的可以加进某些附加物，以改善炸药的爆炸性能、安全性能、机械性能、成型性能、以及抗高低温性能等。目前应用最广的固体混合炸药分为：

a. 普通混合炸药。如军事上最常用的钝化黑索金(AⅨ－1)，它是由95%的RDX和5%的石蜡组成的；再如40TNT/60RDX、50TNT/50RDX等各类B炸药，还有工程爆破常用的硝铵混合炸药，如阿梅托(80%的NH_4NO_3、20%的TNT)等。

b. 含铝混合炸药。将炸药加入铝粉的主要目的在于增加爆炸反应的热效应，以提高爆炸的威力。这种炸药多用于海空弹药以及鱼雷、水雷等兵器。如TΓAΓ-5[60TNT/24RDX/16Al，外加5%的钝化剂，如地蜡、石墨等]、Torpex[41RDX/41TNT/18Al]等等。

c. 有机高分子粘合炸药。这类炸药主要以RDX、HMX(奥托金)或PENT为主体的炸药，再用粘结性较好的少量添加剂进行粘合，以便改善其炸药的力学性能、成型性能以及安全性能等。这类炸药有8321、1871、聚苯乙烯粘合黑索金等等。

d. 特种混合炸药。这类炸药是为了特殊需要而研制的，如各种塑态炸药、弹性炸药、橡皮炸药等等，在爆炸压接使用的太乳炸药即属于此种。

3. 按炸药的用途分类

① 起爆药(initiator)

起爆药又称初发药，主要用作为激发高猛炸药爆炸的引爆剂。它具有感度高(在很弱的外界作用下很容易发生爆炸，如在热作用、针刺或摩擦作用下便能发生爆炸)，爆炸成长快(即成长到最大速度所需的时间短)。常用的起爆药有：雷汞[$Hg(ONC)_2$]、叠氮化铅[$Pb(N_3)_2$]等，它们用于制造雷管、火帽等。

② 猛炸药(high explosive or violent explosive)

猛炸药又称次发药，它与起爆药比，要稳定得多，只有在相当强的外界作用下才能发生爆炸(一般用起爆药起爆)。然而，一旦起爆后，它们就具有更高的爆速和更强的破坏能力，故它们称作猛炸药。最常用的猛炸药有：TNT、RDX、HMX以及B炸药等。

③ 发射药(launching gunpower)

发射药主要用于发射枪弹或炮弹，以及用作发射火箭的燃料，也有的用来作为点火药和延期药。常用的发射药或火药，除了黑火药之外，还有如98%的硝化棉及无烟火药等。

④ 烟火剂(pyrotechnics or pyrotechnical substance)

烟火剂通常是由氧化剂、有机可燃物或金属粉以及少量的粘合剂混合而成。它们主要用于军事上照明、烟幕、曳光、信号剂等等。

另外，在爆炸作业中常用的火工器材：导爆索、导火索和雷管，请见附录9.1。

9.2 炸药的感度

在前一节我们曾经说过，炸药是一种能发生爆炸反应的化学系统，但是这种反应并不能够自行发生。因为炸药的分子中各原子之间是由一定的化学键衔接着的，构成了一个相对平衡的稳定态体系，要想破坏这种平衡，必须给予一定的能量来破坏这些化学键，才能使分子发生分解，而后重新组合，生成新的物质——爆炸产物，即实现了爆炸过程。由此可见，要使炸药发生爆炸反应，必须要有外界的一定作用，即供给一定的能量。

从能栅的观点来看，可以这样来解释炸药从激发到爆炸的能量变化过程：炸药在无外界作用下，处于相对平衡状态，见图 9.2(*a*)所示的点 1，其能位为 E_1。在一定的外界能量作用下，其能位从 E_1 跳到 E_2，当施加的外界能量 $Q \geqslant E_{12}=E_2-E_1$ 时便能发生爆炸，因为炸药处于 E_2 能位是不稳定的，它很快从这个激发能位 E_2，下跳到能位 E_3，这时炸药就已变成了产物，E_3 即爆炸产物的能位，放出的能量为 $E_{23}=E_3-E_2$。因炸药从常态 E_1 激发到能位 E_2 状态，所需要的能量为 E_{12}，所以炸药从激发到爆炸所净放出的能量为 $\Delta E=E_{23}+E_{12}=E_3-E_1$，这一过程可以这样一种情况形象地解释：有一个处于高低不平地形的小球，见图 9.2(b)，小球开始处在相对平衡的位置 1 处，一旦施加的能量或作用力使小球向上运动，当上升的高度超过位置 2 时，它便立即滚到位置 3 处。所以从能栅观点来看，从 E_1 状态激发到 E_2 状态，所需要的能量 E_{12}越小，炸药的感度越高，即炸药越敏感；反之，E_{12}越大，则感度越低，即炸药越钝感。

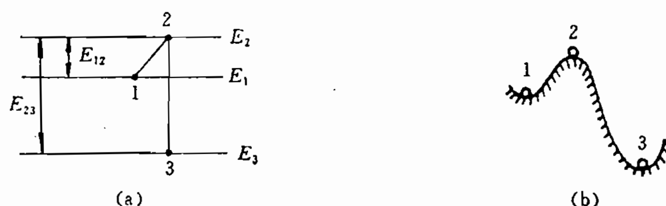


图 9.2 从能栅角度示意炸药所处状态

1—炸药处于常态，2—炸药被激发达到爆炸时的状态，3—爆炸反应终态

所谓感度(sensibility)，就是指炸药在外界作用下，发生爆炸的难易程度。

引爆炸药所需要的能量，称为初始冲能或起爆冲能，引爆需要的能量越小，则表明炸药越敏感，反之则较为钝感。

当然，炸药不同，所需要的起爆冲能亦不同，即感度不同。有的炸药很敏感，如碘化氮(NI_3)，这种炸药只要用羽毛触动一下就爆炸；有的很钝感，如我们常用的个别炸药，用步枪射击可能也不会爆炸。之所以如此，是由于炸药本身的化学结构所造成的。炸药分子的化学键越脆弱，其化学活性越大，则表现越敏感；相反，分子的化学键越牢固，炸药就越钝感。

引起炸药发生爆炸的能量，其形式是多种多样的，有热能(对炸药直接加热或用火焰点火)、机械能(撞击、摩擦、针刺等)、光能(可见光，尤其是激光)、冲击波能量(爆轰波以及冲击波的冲击作用)、电能(静电作用、高压火花放电)以及高强度电磁辐射和高能粒子辐射能等等。

然而，炸药不同，对于同一种形式的冲击能其敏感性亦不同，即炸药对于初始冲能的形式有一定的选择性。例如太安、特屈儿对爆轰波和冲击波的作用很敏感，所以一般常用它们作为传爆药；而斯蒂夫酸铅[$C_6HN_3O_8Pb$]对火焰作用敏感；氯气和氯气的混合物对光敏感；……。

同时，同一种炸药起爆时所需要的某种形式的能量也没有一个严格的定值，它随着加载方式和加载速度的不同而不同。例如 TNT，在缓慢压缩时，即使压力达到 49000 牛顿/厘米^2 也不会爆炸①，虽然这种压缩过程要消耗大量的机械能，但效果不大；可是该炸药在很迅速的冲击下，花费很小的机械能便能起爆它。

炸药对外界作用的选择能力，是由于它的化学性质和物理性质的综合表现所决定的，因为这些性质对于炸药吸收能量的条件，以及对它在这种或那种起爆冲能的作用下发生化学反应有重大影响。

掌握炸药对外界作用下的感度规律，对于炸药的加工、使用、保存以及运输等均具有重大意义。

9.2.1 **热冲量感度**

炸药对热量的感度是指炸药的热感度和火焰感度。

1. *炸药的热感度*

炸药的热感度是指在热的作用下引爆炸药的难易程度，通常用爆发点来表示它。爆发点又称作爆燃温度或发火点。

所谓爆发点，是指在一定的试验条件下，将炸药加热到爆炸时的加热最低温度(爆燃温度)。显然，爆发点越低，则表明炸药对加热敏感度越高，反之，则对热敏感度越低。

爆发点是在规定的条件下确定的。通常规定的实验条件为：用 0.05g 炸药，装在铜质管壳(相当于 8 号铜雷管)中，管口用软木塞封闭，将此装置好的铜管插入爆发点测定器中，见图 9.3(a)。测定器中装着伍德合金浴，插入深度为 30mm，插入时伍德合金浴已加热到一定温度 T(能引起爆燃的温度)，记下这时的温度 T. 装药管刚插入时不会爆炸，需要一定的时间，从管插入到爆炸所经过的时间 τ 称作延滞期，而温度 T 则是对应该延滞期的爆发点。

显然爆发点 T 不是一个固定值，它与延滞斯 τ 有关，即使在同样的实验条件下，一般讲，若 T 比较大，则 τ 就较小；反之 T 小，则需要的 τ 就比较大，T 与 τ 有如下关系：

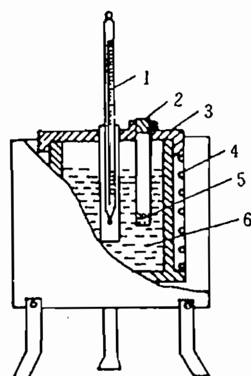
$$\tau = A\mathrm{e}^{E/KT} \tag{9.1}$$

其中

A——与炸药性质等有关的常数；
E——炸药的活化能(焦耳/摩尔)；
R——普适气体常数(8.137 焦耳/摩尔·度)；
T——绝对温度(K)。

图 9.3(b)给出了 T 与 τ 的关系曲线。很明显，绝不是只要 τ 取得大，T 就可无限的小。在相应的实验条件下，T 就有一个下界 T_0，如若只要 $T<T_0$ 满足，不论加热多久(即 τ

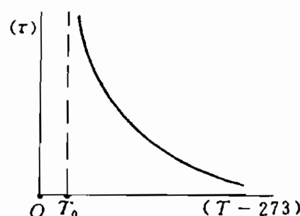
① 这是个大约的数据，有的书(如文献[1])上给出的压力数值大得多。



(a) 爆发点测定器

1—温度计，2—塞子，3—管壳，4—电热丝

5—炸药试件，6—低熔点合金



(b) 爆发点与延滞期的关系曲线

图 9.3

如何大)炸药也不会爆炸。

由于爆发点 T 与延滞期 τ 有关，因而 T 不能无条件确定。为了对各种炸药的热感度能给出一个同样的温度标准，一般常把延滞期 τ 取成 5 秒或 5 分钟。表 9.2 列出了几种炸药的爆发点。

表 9.2　几种炸药的爆发点

炸药名称	爆　发　点(℃)	
	5 秒钟	5 分钟
雷　汞	210	170～180
叠氮化铅	345	305～312
斯蒂夫酸铅	265	
二硝基重氮酚	180	170～175
梯恩梯	475	300～310
黑索金	260	225～235
太　安	225	210～220
50 黑索金/50 梯恩梯	220	
2#岩石炸药		186～230
80/20 阿玛托		300
无烟火药		180～200
有烟火药(即黑火药)		290～310

在这里必须强调两点：

第一，在这里所指出的温度是指加热炸药的介质温度(即伍德浴的温度，亦即装药铜管所在处的环境温度)，不是炸药本身的温度(炸药开始时是冷的，需要一定的时间才能与环境达到热平衡)，现在所谈的温度是引爆炸药爆燃的温度(爆燃通常伴随有声响)，而不是使炸药发生热分解的温度。

第二，爆发点并不是炸药的特征常数。也就是说，所指的爆燃温度并不是仅取决于炸

药本身特性的固定不变的数值，它与实验条件密切相关。所以，爆发点只是一个用来比较各种炸药热感度高低的相对尺度，切不可把它当做加热炸药时的安全温度的上界值。

2. 炸药的火焰感度

火焰感度反映炸药对明火或火花作用的敏感度。

测定火焰感度是在火焰感度测定仪（如图 9.4 所示）上测定的。其办法是用导火索（燃速和火力都是稳定的标准导火索）或黑火药柱对炸药点火，调节导火索端面到被测药面之间的距离，点燃导火索，视其喷出的火花或火焰能否引燃炸药。用发火距离的上、下限来表示炸药的火焰感度。上限是使炸药 100%发火的最大距离，下限是炸药 100%瞎火（即不被点燃）的最小距离。实用上，对火工品制作来讲，掌握上限最重要；从安全性的角度出发，主要注重下限。上、下限之间的距离对衡量炸药的性质也有意义。

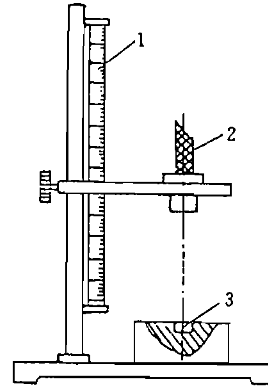


图 9.4 火焰感度测定仪示意图
1—标尺，2—导火索，3—试样槽

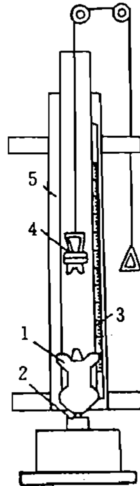
例如，将雷汞取 0.03g、以 $3920N/cm^2$ 的压力压入猎枪火帽壳内、以黑火药柱点火，试验测得 100%爆发的火焰感度距离为 20cm。

9.2.2 对机械作用的感度

猛炸药对机械作用的感度，通常只考虑撞击感度和摩擦感度。

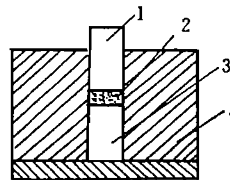
1. 撞击感度

猛炸药的撞击感度是通过实验来确定的。冲击试验所采用的仪器和方法，各国标准不一。常见的测定撞击感度的仪器是立式落锤仪，见图 9.5(a)。试验的简单程序是这样：采



(a) 立式落锤仪示意图

1- 落锤；2- 冲击器；3- 标尺；
4- 钢爪；5- 导轨



(b) 冲击器的结构

1- 上击柱；2- 药试样；
3- 下击柱；4- 套筒

图 9.5

用具有一定重量的重锤，从某一高度落下，冲击装在冲击器内的一定量的炸药试样，看其能否爆炸。冲击器的结构见图 9.5(b)。落锤重量常用的有 2kg、5kg、10kg 和 20kg。试样的药量为 0.05±0.001g，炸药试样必须均匀地平铺在直径为 10mm 的击柱面上。

猛炸药的撞击感度可由下列几种方法表示：

① 用炸药爆炸的百分数表示

按标准实验，使用 10kg 重锤，固定 25cm 落高，测定 25 个试样，然后计算其中爆炸试样个数占总数的百分比，表 9.3 列出了一些炸药的测定结果。

如果在标准条件下，爆炸试样为 100%，则还可研究下一重量级爆炸的百分比，如使用 5kg 或 2kg 重锤做实验，以此类推。

对于猛炸药，我国多采用上述方法来标定它的机械撞击感度。

表 9.3 列出几种炸药在标准条件下的撞击感度。

表 9.3　标准条件下一些炸药的撞击感度

炸药名称	爆炸的百分数(%)	炸药名称	爆炸的百分数(%)
太安	100	梯恩梯	4～8
黑火药	100	特屈儿	44～52
黑索金	72～80	钝化黑索金	28～32
奥托金(HMX)	72～80	50 梯恩梯/50 黑索金	50

② 用爆炸上、下限表示

对于起爆药，多采用撞击感度的上、下限来表示。所谓撞击感度的上限，是在锤重固定的条件下(如锤重取 400g)，变化落高，找出使试样 100%爆炸的最小高度 H_{100}，H_{100}即撞击感度的上限；下限即使得试样 100%不爆炸的最大高度 H_0. 如果从安全的角度出发，那只考虑撞击感度的下限就够了。表 9.4 列出了几种起爆药的撞击感度，试样的药量为 0.02g、锤重为 400g。

表 9.4　几种常用起爆药的撞击感度

炸药名称	雷　汞	叠氮化铅	斯蒂夫酸铅	二硝基重氮酚
H_{100}(cm)	9.5	33	36	—
H_0(cm)	3.5	10	11.5	17.5

③ 用临界高度表示

这种标定撞击感度的做法是：固定锤重，测出各个落高下爆炸的百分数，然后作出百分数与落高的关系曲线——撞击感度曲线。从曲线上找到爆炸数为 50%时，所对应的落高 H_{50}，这个高度称作临界高度。可以用这个高度来表示炸药的撞击感度。

要测出所述那条撞击感度曲线是不容易的，必须做极大量的实验。如下介绍一种科学做法，可以以较少的试验次数而获得较为可靠的数据。这种方法就是数理统计中的“阶梯法”，只做 20 次试验，就可满意地求出 H_{50}，H_{50}按下式计算：

$$H_{50} = A + B\left(\frac{\sum iC_i}{D} - \frac{1}{2}\right) \tag{9.2}$$

或

$$H_{50}=A+B\left(\frac{\sum iC_i'}{D'}+\frac{1}{2}\right) \tag{9.3}$$

其中，A——20次试验中最低落高(cm)；B——试验间距(cm)；D——20次试验中发生爆炸的次数；D'——20次试验中不发生爆炸的次数；i——落高水平序数，从0、1、2、3…；C_i——为在落高水平序号为i的那一高度下所做试验的爆炸次数；C_i'——为在这一落高下不发生爆炸的次数。

2. *摩擦感度*

在炸药的生产、运输以及使用过程中，经常要受到摩擦作用，那么在多大摩擦作用下会发生爆炸呢？需要有个数值概念。因这关系到安全以及使用的可靠性(许多火工品的引爆就是靠摩擦发火的)。

然而要确切地表述摩擦感度难以做到，曾经设计过很多结构的摩擦感度仪，但是大部分只能做定性的试验，其工作部分如图9.6所示。

实验原理是这样：在测定装置的上、下滑柱端面之间均匀地平铺少量的炸药试样，然后再用油压机加压，使炸药试样承受一定的压力。在其下滑柱固定的情况下，摆锤以一定的摆角落下，从侧面撞击上滑柱，使之上滑柱滑动，从而使炸药与上滑柱之间发生突然摩擦。当摩擦力足够大时，就可能引起炸药试样爆炸。因实验固定了滑柱的移动距离和摩擦系数(取决于滑柱端面的光洁度)，所以摩擦功只与施加于炸药的压力有关。测出不同压力下炸药试样的爆炸百分数，以此来衡量炸药的摩擦感度。试样的药量通常取0.025g或0.05g，滑柱端面的直径为1cm。

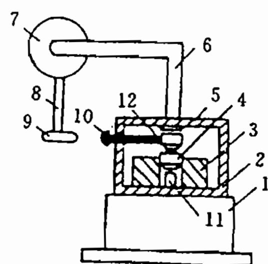


图9.6 摩擦感度仪示意图

1—油压加压系统；2—空腔；3—导向模；4—下滑柱；5—上滑柱；6—支柱；7—角度盘；8—摆锤杆；9—摆锤；10—撞杆；11—活塞杆(连接油压机)；12—炸药试样

摩擦感度的表示法是用一定压力及一定摆角下的爆炸百分数表示，或者用一定摆角下其爆炸的百分数为50%的压力值表示。

表9.5和表9.6列举了几种猛炸药和常用起爆药的机械感度。

表9.5 几种猛炸药的机械感度

炸药名称	撞击感度	摩擦感度
	10kg落锤、25cm落高的爆炸百分数(%)	表压力为50atm、摆角96°、药量为0.03g的爆炸百分数(%)
硝化甘油	100	
太安	100	96
黑索金	72～80	88
钝化黑索金	28～32	8～16
梯恩梯	4～8	4～6
2#岩石炸药	20	
80/20阿玛托	16～18	
50黑索金/50梯恩梯	50	4～8

表 9.6　常用起爆药的机械感度

炸药名称	撞击感度			摩擦感度
	400g 落锤撞击的爆炸上、下限(cm)		2kg 落锤撞击的爆炸下限(cm)	表压力为 6atm、摆角为 80°、药量为 0.1g 的爆炸百分数(%)
	上　限	下　限		
雷　汞	9.5	3.5	5	100
叠氮化铅	33	10	10	76
斯蒂夫酸铅	36	11.5	14	70
二硝基重氮酚		17.5	5	25

9.2.3　冲击波作用的感度

炸药在冲击波作用下，发生爆炸的难易程度叫做冲击波作用的感度。

引爆炸药的冲击波，一般是指强冲击波。而这种强冲击波绝大多数是由于炸药爆炸产生的，所以炸药对冲击波作用的感度，可以粗略地说成"炸药对炸药作用的感度"，这种作用又分成两种情况：直接作用和间接作用。通常把炸药甲对炸药乙的直接作用的感度称作炸药乙对爆轰作用的感度，简称爆轰感度；而把炸药甲对炸药乙的间接作用的感度称作炸药乙对冲击波作用的感度。

当然应该指出，炸药甲直接对炸药乙的作用，除了甲的冲击波对乙的作用外，还有炽热的爆炸产物对乙的作用。

1. 炸药的爆轰感度

爆轰感度具体说是指猛炸药对起爆药直接作用下的敏感性，通常用极限起爆药量来表示猛炸药的爆轰感度。

极限起爆药量是指在规定的试验条件下，使一定量的猛炸药完全爆轰所需要的最少起爆药量。所需的起爆药量越少，则说明所测的猛炸药的爆轰感度越高。

测定极限起爆药量是在特制的马弗炉中进行的。试验的条件及方法是：把待测的猛炸药 1g，以 1000kg/cm² 的压力把它压入 8# 铜雷管壳内，然后再装进已知数量的某种起爆药，用 500kg/cm² 的压力压实，用导火索引燃起爆药，起爆药由燃烧很快转为爆轰，从而引爆与之接壤的猛炸药。凭着该装药管爆炸时击穿铅板的程度，来判断该管内的猛炸药是否完全爆轰。改变起爆药量反复试验，即可确定引爆猛炸药试样达到完全爆轰所需要的最小起爆药量——极限起爆药量。

测定雷管爆炸的马弗炉如图 9.7 所示。

用上述方法测定几种猛炸药的极限起爆药量列在表 9.7 中。从表中看出，对于起爆药一定，但被测的猛炸药不同，则所需要的极限起爆药量亦不同。这说明不同的猛炸药其爆

表 9.7　几种猛炸药的极限起爆药量(单位：g)

炸药名称	被引爆的猛炸药				
	梯恩梯	苦味酸	特屈儿	黑索金	太安
雷　汞	0.36	0.30	0.29	0.19	0.17
叠氮化铅	0.09	0.025	0.025	0.05	0.03

轰的感度是不同的。按表中所列的五种单质炸药中，太安的爆轰感度最高，梯恩梯最低。太乳炸药所以采用太安为主爆剂，就是为了获得所需要的爆轰感度。

从表 9.7 还可看出，对于同一种猛炸药而言，起爆药不同，所需要的极限药量也是不同的，这就是说，起爆药的起爆能力是各不相同的。起爆药的起爆能力取决于它的爆速和它的爆炸加速期(即从点火到爆速达到最大值时所经历的时间)。爆速越高、爆炸加速期越短，则起爆能力就越大。叠氮化铅的起爆能力大于雷汞，其原因就在于叠氮化铅的爆炸加速期比雷汞短得多。

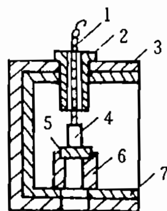


图 9.7　极限药量测定装置示意图
1—导火索；2—套管；3—防护罩；4—雷管；5—铅板；6—支撑筒；7—铅护板

炸药的爆轰感度，虽然主要取决于炸药本身的化学性质，然而它也与炸药所处的物理状态有关。与其相关的物理状态主要有：装药密度、初温、颗粒度、结晶晶形、压装铸装以及所含附加物的多少与附加物本身的物理性质有关(压装药的感度高；炸药含金属或金属氧化物等坚硬、细粒物质时则爆轰感度也高)。关于如上的那些因素对炸药感度的影响，详见 § 9.3 的论述。

必须指出，按规定条件和方法所测定的某种炸药的极限起爆药量，只能相对地表明该炸药爆轰感度的高低，而不是说可以用这个极限起爆药量就能完全起爆在任何条件下任何数量的那种猛炸药完全爆轰。在猛炸药的实际使用中，很少用起爆药去直接起爆猛炸药的。

2. 炸药对冲击波的感度

在弹药以及爆破技术中，常用其一种炸药爆炸所产生的冲击波通过某一介质去引爆另一种炸药，如引信的传爆药柱爆炸后，往往要通过金属管壳、纸垫、或空气间隙去引爆另一种炸药。在爆破工程中，如何使其相邻的炸药殉爆完全，也是个强冲击波起爆问题。

研究冲击波引爆炸药的问题不仅对炸药的应用有重要意义；而且在安全方面也十分重要，例如在设计两个储存炸药的库房时，安全距离应该多远才行？这就必须研究炸药对冲击波的感度问题。

① 衡量炸药对冲击波感度的方法

评价炸药对于冲击波作用下的感度，一般是采用蜡间隙试验，其测定装置如图 9.8 所示。

主发药柱直径为 4.1cm(即 $1\frac{5}{8}$英寸)、重 100g 的特屈儿(或喷特里特，即 50FETN/50TNT)，蜡间隙可以调整，被发药柱(即被测药柱)与主发药柱的直径相同。

应用上一段中所述的阶梯法，来确定被发炸药达到 50%爆炸次数的蜡间隙厚度 n_{50}。被测试的药柱是否爆炸，则利用钢板(即图 9.8 中的钢座)上的印痕来判断。表 9.8 给出了一些炸药的蜡间隙试验结果。

表 9.8 某些炸药的蜡间隙试验结果

炸　　药	装药方法	50%蜡间隙厚 n_{50}(cm)	密度(g/cm³)
阿玛托 80/20	压装	2.11	1.65
阿玛托 50/50	铸装	1.52	1.55
A-3 炸药	压装	4.32	1.62
B 炸药	铸装	3.56	1.69
C 炸药	压装	3.45	1.56
C-3 炸药	压装	3.45	1.56
黑索金	压装	5.92	1.54
太安/梯恩梯 50/50	压装	5.99	1.61
太安/梯恩梯 50/50	铸装	5.28	1.65
特屈儿	压装	5.11	1.58
特屈儿/梯恩梯 75/25	铸装	4.22	1.66
梯恩梯	压装	4.27	1.55
梯恩梯	铸装	2.08	1.60
梯恩梯/铝粉 80/20	铸装	1.47	1.75

影响炸药的冲击波感度的因素很多，例如装药密度对冲击波感度的影响就很大，密度大的装药比较钝感。因炸药中的孔隙能成为反应中心，即热点，使之起爆容易而冲击波感度提高。这就是传爆药柱的密度不能很大的原因。破甲弹中副药柱的密度一般都比主药柱低，为的是便于起爆。前面已提到，压装药柱与铸装药柱对冲击波的感度差别很大，例如 8# 雷管就不能起爆铸装梯恩梯，但能完全引爆压装梯恩梯。其原因是铸装梯恩梯中气泡少，药柱呈晶体结构，晶粒表面光滑致密，基本接近均相状态，从而不容易吸收起爆能量以形成热点；而压装药柱则恰好相反，散粒体表面粗糙，易吸收起爆能量而形成热点。

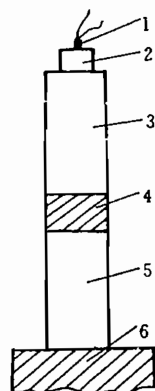


图 9.8 蜡间隙实验装置
1—雷管；2—传爆药柱；3—主发药柱；4—隔板；5—被发药柱；6—钢座。

多数炸药在加入钝感剂后，冲击波感度要降低，但不明显。还有反常情形，有的炸药在加入钝感剂后，其对冲击波的感度反而增加。表 9.. 列出了一些炸药在加入 5%的“D—2 蜡”和根本不加的两种情况下其冲击波感度的升降情形。

炸药晶粒的大小对冲击感度也有影响：晶粒愈细，则起爆比表面积愈大，活化中心数目愈多，愈容易起爆。

关于影响炸药感度的各种因素分析，详见 § 9.3。

表 9.9 蜡对冲击波感度的影响

炸药名称	达到50%爆炸次数的蜡间隙试验厚度 n_{50} (cm)		
	无蜡情形	有蜡情形	感度的升降
巴拉拿儿	2.18	1.63	−0.56
B炸药	3.35	2.95	−0.41
喷特里特	5.28	4.98	−0.30
梯恩梯	2.08	2.62	+0.53
80TNT/20Al	1.47	2.64	+1.17

② 工程上的殉爆问题

如上论及的用蜡间隙法确定炸药的冲击波感度，已涉及到炸药的殉爆问题。不过，那里的“殉爆距”——n_{50}只能用来比较不同炸药对冲击波引爆的难易程度，而在工程上重要的是殉爆距离和殉爆安全距离。

殉爆距离

在工程上，殉爆距离定义作：主发装药（炸药甲）能够引起被发装药（炸药乙）爆炸的最大距离——称作殉爆距离。

在工程上，殉爆距离 R 可用如下的经验公式来计算：

$$R = A\sqrt{W} \tag{9.4}$$

式中

R——殉爆距离（单位：m）；

W——主发装药量（单位：kg）

A——由试验确定的系数，其大小取决于炸药的性能、装药条件以及两个装药之间的介质的性质等。

在主发装药及被发装药的密度均为 1.0g/cm³，做成圆柱形，两个装药的相对位置，如图 9.9 所示，且中间的介质为空气的情况下，当两装药为苦味酸时，其 $A=0.63$；当两装药为含 65%以上的硝化甘油的胶质炸药时，其 $A=1.10$；当两装药均为压装梯恩梯，密度为 1.5g/cm³，其他条件同上时，其 $A=0.70$。

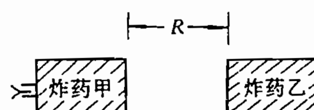


图 9.9 殉爆示意图

一般来讲，殉爆距离与以下因素有关：

a. 主发装药的爆炸性能（主要指爆热、爆速）影响殉爆距离。表 9.10 列出主发装药量对殉爆距离的影响，该表所列的情况是两个装药均为梯恩梯，同放在地面上，且中间的介质为空气。

b. 被发装药的冲击波感度影响殉爆距离。

表 9.10 主发装药量对殉爆距离的影响

主发装药量(kg)	10	30	80	120	160
被发装药量(kg)	5	5	20	20	20
殉爆距离(m)	0.4	1.0	1.2	3.0	3.5

c. 介质的性质影响殉爆距离。当主发装药为苦味酸，密度为 1.25g/cm³，外壳纸质，药量 50g；而被发装药为苦味酸，密度为 1.0g/cm³ 时，在不同介质中的殉爆距离列在表 9.11 中：

表 9.11 介质对殉爆距离的影响

两装药间的介质	砂	钢	粘土	空气	木	水
殉爆距离(cm)	1.2	1.5	2.8	2.8	3.5～4.0	4.0

由表 9.11 看出，砂子吸收冲击波的能力强，当两个装药间为这种介质时，殉爆距离很小。因此，在炸药库或者有爆炸危险的工房周围修筑含砂的土围墙，可以缩小它们之间或者它们与其他建筑物之间的安全距离。

d. 主发炸药的传爆方向与殉爆距离有关。当主发装药量不大(在数千克之内)、而被发装药位于主发装药的传爆方向上时，殉爆距离较大。在考虑殉爆时须注意到这一点。

有时为了某种目的或者为了得到某种特定的爆炸效果，可以利用殉爆现象，即用一个装药爆炸后去诱爆另一个装药，这时必须掌握殉爆距离是多少。

太乳炸药包在压接管上时，端部殉爆距离 $R\approx1\sim1.5\delta$ (其中 δ 为炸药的厚度)。

作为爆炸压接的另一种能源——导爆索，是将它一圈挨一圈地紧密地缠在压接管上，爆压时起爆是从一点开始的，这时爆轰一方面沿导爆索的轴向传播；另一方面又要引起相邻的那圈导爆索殉爆，从而造成爆轰又向垂直于导爆索方向传播。但是在这两个方向上的爆轰传播速度是不同的，沿导爆索轴向(沿药芯)的爆轰传播速度一般约 7000m/s。而殉爆速度(垂直导爆索轴向的速度)约 4000m/s。如若导爆索圈与圈之间绕得不紧，间距超过一定距离，则圈与圈之间就不能殉爆，爆轰只能沿导爆索轴向传播。

殉爆安全距离

殉爆安全距离是指一处炸药爆炸时而不引起另一处炸药爆炸的最小距离。在有爆炸危险的建筑物之间，必须保证其距离在殉爆安全距离之外。

殉爆安全距离可按类似于(9.4)式的如下经验公式计算：

$$R_{\text{s}} = A_{\text{s}}\sqrt{W} \tag{9.5.1}$$

式中：

R_{s}——殉爆安全距离(单位：米)；
W——药量(单位：千克)；
A_{s}——安全系数，它取决于建筑物内的炸药性能以及建筑物之外有无土围子等

注意：不能把殉爆距离 R 和殉爆安全距离 R_{s} 混淆起来，R 是为了确保引爆的距离，在两个装药之间要尽可能地清除障碍，以保证被发炸药百分之百地被引爆；而 R_{s} 是保证被发炸药百分之百不爆炸的安全距离，在两处装药之间要尽可能地多设置障碍。

按谢赫捷尔(Б. И. Шехтер)[1]的意见，当药量较大，按(9.4)式计算 R 值可能偏高。他指出当 $W>1000$ 千克时应采用如下公式：

$$R_{\text{s}} = A_{\text{s}}W^{n}, \quad 1/3 \leqslant n \leqslant 1/2 \tag{9.5.2}$$

其实上述结果，可以按点爆炸理论推出(见我们在十一章 §11.5 中所做)。若装药视作球形装药(即点装药)，可以推出

$$R_{*} = A_{*} \sqrt[3]{W} \qquad (9.5.3)$$

若装药视圆柱(即线装药),可以推出

$$R_{*} = A_{*} \sqrt{W} \qquad (9.5.4)$$

而实际装药可视作在球形与柱形装药之间,故应有(9.5.2)式的结果。

亦有人[2]提出如下形式:

$$R_{*} = A_{*} W^{n}, \quad 1/3.2 \leqslant n \leqslant 1/2.7 \qquad (9.5.5)$$

9.3 影响炸药感度的各种因素

前面叙述了炸药对于各种形式冲能的感度,在论述那些感度的同时,也粗略地分析了影响那些感度的因素。然而不全面、不系统。现在把影响炸药感度的所有因素统一归纳并做以具体分析论述。

影响炸药感度的因素大致可以分成两方面:一是炸药结构本身的物理化学性质;二是炸药的物理状态和装药条件。

9.3.1 炸药结构本身的物理性质与感度之间的关系

1. 原子团的稳定性

炸药爆炸的根本原因是原子间键的破裂,所以原子团的稳定性对炸药感度的影响很大。

炸药的感度除了与不稳定的原子团有关外,还与不稳定的原子团的个数以及这些原子团所处的相对位置有关。一般讲,不稳定的原子团个数越多,感度也越大,然而不稳定原子团的相对位置亦很重要。如太安炸药,虽然太安分子有四个稳定性较小的原子团,这比硝化甘油分子的不稳定性的原子团还多一个,但是太安的热感度和机械感度却比硝化甘油的小,其原因在于它们的不稳定原子团的分布不同,太安为对称分布而硝化甘油为非对称分布。

此外,感度还与炸药分子的取代基数目、化学官能团等有关。

2. 炸药的活化能

活化能实际上就是炸药的一个能栅,这个能栅越高,则炸药的感度越小。相反,若活化能越小,当然跨越这个能栅而达到爆炸就容易,这样的炸药感度当然就高。然而,活化能受外界条件影响很大。因此,不是在任何条件下,感度均严格遵循这个规律。

3. 炸药的热容量和导热性

炸药的感度随着它的热容量和热传导性的增加而减小。因为要使炸药的热点升高到临界温度而爆炸,对于热容量大的炸药所需要的能量就多,因此不易引爆,其炸药的感度当然就小;而对于传导性较高的炸药,热量很容易散失到周围的介质中去,不容易形成热的集中,要使该炸药的某个局部升高到一定温度,则需要更多的能量,因此热感度就低。但总的来讲,热容量和热传导性对炸药的机械感度影响较小。

4. 炸药的挥发性

挥发性大的炸药和挥发性小的炸药,在具有相同的爆发点和相同的加热条件下,挥发性大的炸药要达到爆发点所需要的热量就多,因而感度就越小。在热起爆的过程中挥发性

起着很大的作用。然而它实际上不能影响炸药的撞击感度，特别是不影响爆轰感度，因为炸药在这些条件下加热和引爆都处于极大的压力之下，其蒸发甚至几乎受到了完全的限制。

5. 炸药的生成热以及爆热对感度的影响尚未定论，说法不一

在一定的范围内，敏感性很高的起爆药多数是吸热化合物(即生成热为负的)，而感度较差的猛炸药多数为放热的化合物。关于爆热的影响，一般来讲，爆热大的感度就高，如黑索金的爆热(5820kJ/kg)＞特屈儿的爆热(4580kJ/kg)＞梯恩梯的爆热(4230kJ/kg)，因此黑索金的机械感度大于特屈儿，而特屈儿又大于梯恩梯。然而亦可列举不少相反的情况，如雷汞的爆热(约1720kJ/kg)不到黑索金的1/3，可是它的感度却大大超过了黑索金。

9.3.2 炸药的物理状态与装药条件对感度的影响

炸药物理状态对感度的影响，表现在它的物态、结晶形状、装药密度、初温、结晶粒大小以及附加物等方面的影响。

1. 炸药的物态

同一种炸药在不同的物理状态下，其感度是不同的。一般讲，炸药在熔融状态下的感度要比固态高得多，这是因为炸药从固相转变为液相时要吸收熔化潜热，它的内能较高，另外炸药在液态时具有较高的蒸汽压。不论是温度高，还是内能高，还是蒸汽压大，它们都有利于爆炸反应。因此在很小的外界能量的作用下即可激发炸药爆炸，所以说炸药由固态变成液态，其感度一般提高。例如：

固态的TNT在20℃时，在2kg的落锤撞击下，若达到10%的爆炸率，其落高为36cm；而液态的TNT在105～110℃时，在同样的落锤撞击下，若达到同样的爆炸率，其落高仅为5cm。

冻结状态的硝化甘油比液态的硝化甘油感度要低。但也有例外，若冻结过程中形成不稳定型的硝化甘油结晶时，其感度反而提高。

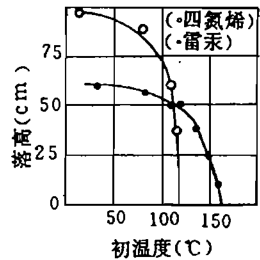


图9.10 四氮烯和雷汞的撞击感度与初温度的关系

2. 炸药的初温

所谓初温是指爆炸前炸药的温度。随着炸药的初温提高，炸药的感度也迅速提高，当温度接近于爆发点时，极小的冲能便会引起炸药的爆炸。据泰勒(Taylor)等对四氮烯和雷汞所做的撞击感度与初温的关系曲线，可以清楚地看出这一点，见图9.10。表9.12列出了TNT的初温与其所对应的撞击感度。

表9.12 梯恩梯在不同温度下的撞击感度

温度(℃)	相　态	在2kg落锤下的爆炸下限(cm)
−40	固	46
20	固	36
80	液	18
90	液	8
105～110	液	5

炸药的温度升高后容易爆炸的原因在于：在高温下，炸药的活化能降低，分子间相对振动增加，使之分子中原子间键的强度减弱，以较小的外界冲能即可使原子键破裂，即引起爆炸；同时因温度升高，反应速度加快，故容易引爆。

3. 装药密度

对于猛炸药，装药密度越大，则爆轰感度就越低。有些炸药的爆轰感度对于其密度的依赖特别明显，如硝铵炸药，当其装药密度增加到一定程度时，甚至不能被起爆药引爆（当硝铵炸药密度为 $1g/cm^3$ 左右时，8#雷管能可靠的起爆；但当密度很大时就可能拒爆）；散装梯恩梯可用 8#雷管起爆，但对铸装的梯恩梯就困难得多；太乳炸药如果装药的密度过高，则其爆轰感度也要降低。

炸药的密度除主要影响爆轰感度外，还主要影响火焰感度。

炸药的密度增加使爆轰感度降低，其原因在于炸药密度增加后，结构密实，不易吸收能量。对于火焰感度的影响也在于此，因密度大，炸药的药粒之间的空气隙减少，高温的燃烧产物不易深入内部，故不易点燃。如若药粒松散，火焰感度会大大增加。

装药密度对撞击感度的影响，比对爆轰感度的影响小得多。

当装药密度过大，就会造成“压死”现象，即“炸药失去了被引爆的能力”，确切地说，压死现象并不是炸药失去爆炸能力的一种特殊状态，只不过是在热冲量的作用下，燃烧加速进行得缓慢而已。

4. 炸药的细度和晶粒的形状

炸药的晶粒度（即细度）越小，则爆轰的感度也就越高，不论单质炸药还是混合炸药一般都是如此。

例如从溶液中沉淀出来的超细粒的梯恩梯需要的 $Pb(N_3)_2$ 极限起爆药量为 0.04g；而通过 2500 孔/dm^2 筛的梯恩梯需要的 $Pb(N_3)_2$ 极限起爆药量为 0.10g。若把太乳炸药的主爆剂由太安改为黑索金，就必须减小黑索金的粒度，以达到太安的感度。

晶粒小的炸药之所以爆轰等感度大，是因为炸药的比表面积大，接受爆轰产物以及冲击波等能量就多，因而容易形成更多的活化中心，所以容易引起爆炸反应。另外细晶粒炸药有利于爆轰的扩展，因为比表面积越大，反应速度也就越快。

炸药粒度对机械感度影响较小。

不少物质在不同的结晶条件下，其结晶形状是不同的。物质的晶格能越大，这种物质越稳定，对外界的感度也就越低。叠氮化铅有 α 形和 β 形两种结晶，β 形的晶格能比 α 形的小得多，所以它的机械感度很高，在晶粒被碎裂时即可引起爆炸。

5. 掺入的附加物

向炸药中掺入附加物（或含杂质）可以使炸药的感度发生显著变化，这主要是指对机械感度的影响。

不同的附加物对感度的影响亦不同。附加物加入炸药中能够增加感度的，这种附加物就叫做**增感剂**；能够降低感度的叫做**钝感剂**。附加物对炸药的机械感度的影响，主要取决于附加物的硬度、熔点、含量、粒度等。

附加物的硬度大于炸药时，在其一定的粒度和含量的条件下可使炸药的感度增加，因为在附加物颗粒附近能量容易集中，形成热点。而硬度小的附加物，特别是粘性物质，如胶

体石墨、石蜡、凡士林、油类等能降低炸药的感度，这是因为这些物质缓和了机械载荷对炸药的冲击；并且它们在吸收外界机械能的同时，还阻碍了炸药的分解向燃烧和爆轰的发展。

附加物的熔点影响。有人认为低于400℃的物质一般不会增加炸药的撞击感度和摩擦感度，相反会使炸药的感度降低。对于高熔点的杂质，如若导热性越好，对于增加炸药感度的作用就越小，如食盐的熔点为804℃，但是它增加感度的作用却不大。一般来讲，附加物的熔点在爆发点以上的，能使炸药增感；熔点在爆发点之下的，能使炸药钝感，这是由于等温度升到爆发点时这些附加物质就熔化了，失去了原固体的坚硬棱角，故不易促使形成热点。

一般来讲，炸药中塑性大的附加物含量越多，炸药越钝感，当这种附加物达到一定程度时，炸药的机械感度则等于零。而对于硬度大的附加物，一般能使炸药增加感度，在一定的范围内，随着含量的增加，炸药的感度也增加。如砂子含量对梯恩梯感度的影响就很明显，见表9.13。

表 9.13　砂子的含量对 TNT 的撞击感度的影响

砂的含量(%)	爆炸百分数(%)
0.01～0.05	6
0.1～0.15	20
0.2～0.25	29

然而应该指出，上面所说的增感剂和钝感剂并不是绝对的。有些附加物对某些炸药是钝感剂；但是它们对另一些炸药却可能为增感剂，这是由于相对硬度之差异等因素所引起的。如滑石粉，它的硬度小于黑索金但大于梯恩梯，于是它对于黑索金为钝感剂，而对于梯恩梯则为增感剂，表9.14列出了说明这种性能的实验数据。

对于炸药感度的影响还有一些其他因素，这里不再多述。

表 9.14　滑石粉对黑索金和梯恩梯的撞击感度的影响

滑石粉的含量(%)	TNT 爆炸的百分数(%)	RDX 爆炸的百分数(%)
1	4	84
2.5	8	80
5.0	8	36
10.0	24	12
20.0	52	8
40.0	68	8
50.0	74	4

根据炸药的感度与物理状态之间的密切关系，我们可以通过物理的办法改变炸药的感度，以符合我们的某种需要。如在爆炸压接中使用的太乳炸药就是将太安中加入胶乳，而使它的感度降低，这种办法在工程实践中是经常采用的。

9.4　起爆机理

前面论述了各种感度。炸药在热、电、光、机械摩擦、机械撞击以及冲击波作用下可能

发生爆炸，那么这些外界作用是如何激发炸药爆炸的呢？这要用起爆机理来回答。

起爆机理大致可分为热直接作用下的热爆炸理论、机械作用下的热点学说和强冲击波作用的起爆理论。

炸药在热作用下发生爆炸的研究是从混合爆炸气体开始的。谢苗诺夫(H. H. Семенов)建立了混合气体在热作用下自动点火的热爆炸理论[3]，该理论的基本要点是：在一定的条件下(即温度、压力等条件)，若反应放出的热量大于因热传导所散失的热量，就能使混合气体发生热积累，从而使化学反应加速，最终导致爆炸。

弗兰克—卡曼涅斯基(Д. А. Франк-Каменецкий)发展了定常热爆炸理论[4]，这一理论进一步考虑了混合气体在发生反应时，其温度不均匀分布。

莱第尔(E. K. Rideal)等将热爆炸理论应用于凝聚炸药，提出了热点学就[5]。这一学说揭示了撞击、摩擦、发射惯性力等机械作用下炸药激发爆炸机理和物理本质。

布登和约夫(F. P. Bowden and A. D. Yoffe)把热爆炸理论进一步推广到起爆药引爆炸药的研究之中[6]，他们对热爆炸的临界条件的一些参数做了计算。

9.4.1 热爆炸理论

对于热爆炸又分为炸药的温度随时间不变(定常)和随时间而变(非定常)两种情形。在这里我们主要研究定常情形，下面只研究温度沿装药均匀分布的情况。

该理论是谢苗诺夫提出的，他做了以下三点假设：

① 在整个炸药中各处温度相同且不随时间变化，即炸药的温度 $T=\text{const}$；

② 环境温度恒定，即炸药周围的温度 $T_0=\text{const}$；

③ 如果炸药要发生爆炸，则要求 $T>T_0$ 且 T 与 T_0 相差不大。

依据上述假设，可以列出炸药系统的热平衡方程。

在单位时间时，整个炸药因化学反应所放出的热量 Q_1 为：

$$Q_1 = qW \tag{9.6}$$

其中，化学反应速度 W 为：

$$W = Ze^{-E/RT}\cdot m \tag{9.7}$$

而 q——单位质量炸药在反应时所放出的热量；m——整个炸药的质量；Z——频率因子，它与分子的碰撞概率有关；E——炸药的活化能；R——普适气体常数。

由(9.6)和(9.7)式则给出

$$Q_1 = mZq\cdot e^{-E/RT} \tag{9.8}$$

在单位时间里，炸药反应时所传给周围的热量 Q_2 为：

$$Q_2 = K(T-T_0) \tag{9.9}$$

其中，K——为传热系数。其获热曲线见图 9.11，失热直线见图 9.12。

显然，只有在单位时间里炸药所放出的热量 Q_1 大于散失给周围环境的热量 Q_2，才能在炸药中产生热的积累，使之温度不断升高，引起炸药的反应速度加快，最后导致爆炸，其整个过程满足：

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

其中，Q_3——用于加热炸药的热量。作为临界状态 $Q_3=0$，于是有：

$$Q_1 = Q_2 \tag{9.10}$$

即

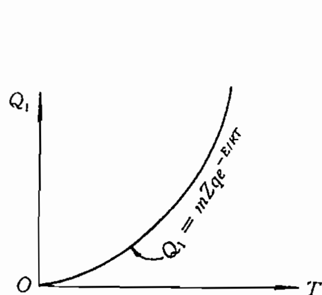


图 9.11 获热曲线

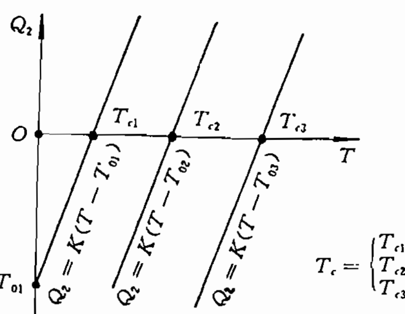


图 9.12 失热直线族

$$mZq \cdot e^{-E/KT} = K(T - T_0) \tag{9.11}$$

然而，如果要保持这种热平衡，还须满足另一条件，即放热随温度的变化率等于散发热量随温度的变化率（只有这样才能引起炸药的自动加速反应，详见对图 9.13(c)的解释），数学表达为：

$$\frac{dQ_1}{dT} = \frac{dQ_2}{dT} \tag{9.12}$$

即

$$\frac{ZmqE}{RT^2}e^{-E/KT} = K \tag{9.13}$$

将(9.11)和(9.13)式联立，则给出

$$T - T_0 = \frac{RT^2}{E} \tag{9.14}$$

由(9.14)式可以求得临界温度 T_c，但不必要，因按第二个假设：

$$(T - T_0)/T_0 = \varepsilon \ll 1 \tag{9.15}$$

即有

$$T = T_0(1 + \varepsilon) \tag{9.16}$$

将(9.16)式代进(9.14)式中，给出：

$$T - T_0 = \frac{RT_0^2}{E} + 2T_0^2\frac{R}{E}\varepsilon + T_0^2\frac{R}{E}\varepsilon^2$$

在上式的右边略去相当于 ε 的一阶以上的量，则给出：

$$T - T_0 \approx \frac{RT_0^2}{E} \tag{9.17}$$

由上式解出临界温度 T_c：

$$T_c \approx T_0 + \frac{RT_0^2}{E} \tag{9.18}$$

当炸药的温度 $T>T_c$ 时，在炸药中就要产生热的积累，最终导致炸药爆炸。

谢苗诺夫的思想可以用作图解释。

在能量 Q 与温度 T 的平面上，即在(Q,T)平面上，式(9.8)为一条指数曲线，如图9.11 的示，该曲线为系统所得到的热量与温度之间的关系曲线；而式(9.9)为直线，随 T_c

的变化它为一系列的平行直线族，如图 9.12 所示，这些直线为系统的失热线。

如上是单独孤立地考虑系统的获热和失热。实际上，二者是同时发生的，故现将二者纳入同一个坐标系中考虑，这样就可能出现如图 9.13 所示的三种情况。

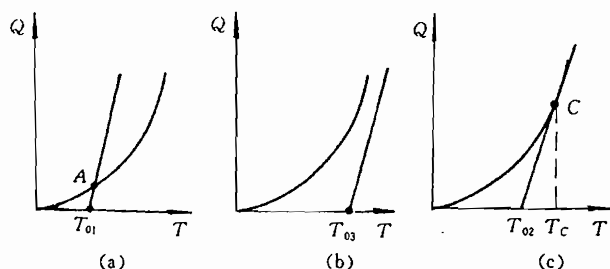


图 9.13 系统获热和失热之关系中可能出现的几种情况

至于出现哪一种情况，完全取决于环境温度 T_0。图 9.13(a)表示环境温度 $T_0=T_{01}$ 的情形，即环境温度较低，直线与曲线有交点 A，在 A 点以左，得热大于失热，即 $Q_1>Q_2$，使温度上升，直到系统(炸药)温度升到 T_A，(T_A 为 A 点所对应的温度)，这时 $Q_1=Q_2$；在 A 点以右，$Q_1<Q_2$，即系统失热多于得热，故使炸药温度降低，于是温度又回降到 T_A。所以，当环境温度较低时，炸药的温度维持在 T_A，反应稳定、缓慢地进行，不会加快，不能爆炸。A 点称作稳定平衡点。

由上分析看出，环境温度 $T_0=T_{02}$(见图 9.13(c))是炸药反应从量变到质变的数值界限。当 $T_0<T_{02}$时，获热曲线与失热曲线相交，炸药反应温度将为处于交点附近的温度，反应缓慢，不会引起爆炸。当 $T_0>T_{02}$时，获热曲线在失热直线之上(见图 9.13(b))，反应将自行加速，最后导致爆炸。而 T_{02}是炸药能够导致爆炸的最低环境温度，这个温度就是我们所说的爆发点。显然炸药的温度达到爆发点时，并不能立即发生爆炸，仍需一定的“加热”时间，这个时间就是所谓的延滞期。

9.4.2 热点学说

许多炸药在机械作用下和冲击波作用下都能发生爆炸，而且固体炸药(散装、压装或铸装)要比在同样温度和压力下的均质液体炸药，一般具有更高的爆轰感度。然而在许多系统里引起爆轰的冲击波压力不超过一万大气压，在这样的压力下冲击波加热不足以使炸药颗粒内部产生快速反应。显然，多孔固体炸药具有较高的感度，是与它的初始物理—力学结构不均匀性有关[7]，这也是启迪人们提出“热点说”的原因之一。

对于在机械作用下炸药起爆原因曾做了大量的实验和理论研究，按时间顺序如下：

最早，贝尔特罗(Berthelor)提出这样的理论：对炸药作用的机械能转变为热能，使整个炸药的温度升高到爆发点，于是引起炸药爆炸。该理论对于极微量炸药还说得通，但是若药量稍大一些显然就不成立了。因为计算表明，即使起爆的撞击能量全部转化为热能被炸药吸收，则像雷汞这样的炸药其温度也只能提高 20℃左右，而这样的温度根本不可能使它爆炸。

后来又出现了摩擦化学假说，论点是：炸药受冲击时，炸药的个别质点(晶粒)一方面与其他质点互相靠近，即增加了密度；另一方面因彼此相对运动，其晶粒表面相互摩擦，于

是质点(晶粒)表面受两个力,即法向压力和切向剪力,法向压力可使一个质点分子上的原子落到第二个质点表面上分子的引力作用范围之内,而切向剪力可能引起表面破坏和原子间键的破裂。然而,这个假说没有实验依据,同时它完全没有考虑热的作用,且有许多问题也解释不了,因此该假说渐渐被抛弃了。

如上有关热点形成的两种论点,并不是完全不对,只是不全面。最后提出的现被人们普遍接受的是热点学说,其主要精神如下。

该学说认为,在机械作用下,因其过程较快,冲击所产生的热来不及均匀地分布到受冲击的炸药整体,而集中在药体的局部点上,例如集中在个别结晶的两面角上,特别是在多面棱角或小气泡处。在这些小点上温度达到高于爆发点时,就会在这些局部点上开始爆炸,而后扩展为整个装药体爆炸。整个过程分为:热点形成阶段;以热点为中心向周围扩展成长阶段,这种扩展往往以速燃形式进行;由燃烧转变成低速爆轰的过渡阶段;稳定爆轰阶段。

1. 热点的形成原因

产生热点的途径很多,但其成因概括起来有:炸药中的空气隙或气泡在机械作用下的绝热压缩;炸药颗粒之间,炸药与杂质之间,炸药与容器壁之间发生摩擦而生成热;液体炸药(或低熔点炸药)高速粘性流动加热。

此外,还可能有因超声振动,高能粒子(电子、α 粒子、中子等)轰击,静电放电,强光辐射,晶体成长过程中的内应力等等形成热点的原因。

① 气泡形成热点

大量实验证明,空气泡能够形成热点,下面举两个例子:

将同样药量的 α-HMX(奥托金)以不同的方式撒布在击柱的端面上,如图 9.14 所示。在图 9.14(a)上,药粉是均匀撒布在击柱端面;在图 9.14(b)上,药是环形撒布,中间空白。当用同样的撞击功(2.7J)起爆它们时,结果:(a)种情况,爆炸的百分数为 5%~47%;而(b)种情况,爆炸为 100%。这显然是由于环形布药的撞击时形成了空气泡的绝热压缩,从而产生比(a)种情况更高的局部冲击热。

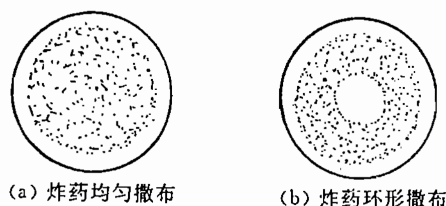


图 9.14 气泡形成热点的实验

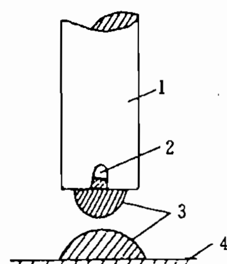


图 9.15 带孔穴的冲击装置

1—冲头,2—孔穴,3—硝化甘油,4—底座

另一个例子是:用带小孔穴的冲击装置(见图 9.15)撞击硝化甘油液滴时,起爆它所需要的撞击功为 2.0×10^{-3}J,而且无孔穴冲击装置时,则需要 $10\sim10^{2}$J,这是由于带孔穴的冲头内封有空气,撞击时造成空气绝热压缩。

关于空气的绝热压缩，若采用经典理论，可以这样做：假定空气是理想的并做绝热压缩，同时过程视作等熵，因此有如下关系式。

$$p = A\rho^{\gamma} = AV^{-\gamma} \tag{9.19}$$

$$p = \rho RT \tag{9.20}$$

其中，p——为压力(实际是单位面积上的压力，即压强，但按气体动力学的习惯仍称为压力，以下同此)，ρ——为密度，γ——气体的绝热指数，A——为常数，$V=\rho^{-1}$——为比容，R——气体常数。

由(9.20)和(9.19)式可以推出气体绝热压缩的温度计算公式：

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1} \tag{9.21}$$

其中下标"0"表示初态。如果已知初始温度 T_0 和初始压力 p_0(或 V_0)，以及冲压状态下的 p(或 V)，就可以求得在冲压状态下气体的温度 T。当然实际情况要复杂得多，气体亦非完全理想的，且压缩过程亦不是完全绝热的，不过作为粗略估算，(9.21)式还是可用的。

通过某些研究表明，气泡产生热点还与气体的导热率及一系列的热力学性质有关。气体的导热率越高，越容易形成热点，这是由于气体绝热压缩时所产生的热量更容易传给气体周围的炸药。

② 摩擦形成热点

当固体与固体挨在一起时，只有固体表面上突出的那些点发生接触，因此两物体的真正接触面积通常是很小的。如果两个物体彼此发生滑动时，摩擦所耗的能量大部分变成热能，并在这些摩擦点上聚集起来，以致造成在局部接触点的表面上温度升得很高。据测量，高熔点的金属之间相互摩擦时，其局部点上可达到1000℃左右。两个物体间摩擦，使局部温度上升的量可用下式计算：

$$T - T_0 = \frac{\mu wv}{4aJ} \cdot \frac{1}{K_1 + K_2} \tag{9.22}$$

式中，μ——摩擦系数，w——作用于摩擦面上的载荷，v——滑动速度，a——接触面半径，J——热功当量，K_1 和 K_2——摩擦物体的导热率。

金属与金属摩擦能否生成热点，与金属的导热性关系很大。金属的导热性越好，越不易形成热点，当然也就越不容易引爆。例如，导热性好的金属钨，在洒有硝化甘油的绝热板上以110cm/s的速度滑动时，需要4kg的摩擦力才能使硝化甘油爆炸；而用导热性差的镍铜合金以同样的速度在其上滑动时，只需要0.8kg左右的摩擦力就能使之硝化甘油爆炸。所以在加工炸药时，所用的刀、锯等一般为导热性好的金属——铜。

摩擦生成热点而引起爆炸，这对于起爆药而言，效果特别明显。

起爆药一般熔点较高，在热点引起它爆炸时，它尚未熔化(即爆发点在熔点之下)，因而在没有熔化的固体颗粒的棱角处容易形成热点。而对于大多数的猛炸药而言，熔点较低，在摩擦作用下先熔化，温度升得更高时才能爆炸，由于失去它在固态时所具有的棱角，所以相对来讲它不易形成热点。

当炸药中掺入高熔点的杂质时，在杂质的棱角处容易形成热点，这在前面已经谈过。同理，在加入低熔点的杂质时，会使炸药的感度有所降低。

摩擦生成热点的另一个可能性是炸药的塑性变形。由于在塑性变形中炸药质点之间、炸药与杂质之间、炸药与器壁之间发生内摩擦而生成热点。

③ 粘性流动产生热点

粘性作用是液体炸药或低熔点炸药(无气泡存在时)发生爆炸的原因之一。在机械作用下,如果冲击能足够大,使之部分炸药熔化成液体,这种已熔化的炸药就会迅速地在固体颗粒之间发生粘性流动。颗粒间的粘性流动类似于毛细管中的流动。毛细管中液体粘性流动产生的温度升高,可由下式计算:

$$\Delta T = T - T_0 = \frac{8l\eta v}{Ja^2\rho C} \tag{9.23}$$

其中,ΔT——升高的温度,l——毛细管长,η——粘性系数,J——热功当量,v——流速,a——毛细管半径,ρ——流体密度,C——流体比热,T_0——初始温度。

2. 热点成长为爆炸的条件

只有当所形成的热点满足一定的条件时,也就是热点具有足够大的尺寸(即范围)、足够高的温度和放出足够的热量时,它才能逐渐发展而使炸药爆炸。

① 热点温度的确定

现考虑一块无限大的炸药中间,有一个半径为 a 的球形热点,如图 9.16 所示。设炸药的初温为 T_0^*,它在任一时刻的温度为 T^*;而热点处的温度为 T 且为均匀分布。

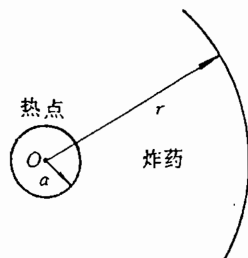


图 9.16 无限介质(炸药)中的球形热点

据热传导方程,有:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = \frac{K}{\rho C}\nabla^2 T^* \tag{9.24}$$

在球对称的情况下,上式表成:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = \frac{K}{\rho C}\left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T^*}{\partial r}\right) \tag{9.25}$$

根据边界条件和初始条件,由上式可以求得任一时刻 t 在半径为 r 处的温度 T^*。

而在 t 时刻,热点之外的炸药所获得的热量 Q_1 为:

$$Q_1 = \int_a^\infty 4\pi\rho C r^2 (T^* - T_0^*)\mathrm{d}r \tag{9.26}$$

如果热点的温度已接近化学反应时的温度,并且所考虑的时间很短,则从 $t=0$ 到 $t=t$ 从热点所放出的热量 Q_2 为(参见(9.6)和(9.7)式):

$$Q_2 = \frac{4\pi}{3}a^3\rho(Ze^{-E/RT})t \cdot q \tag{9.27}$$

作为临界状态,应有:

$$Q_1 = Q_2 \tag{9.28}$$

如果 a、ρ、C、K 和 t 已知,则由(9.28)式可求得炸药爆炸的临界温度 T_c,表 9.15 列出了按(9.28)式计算的几种炸药的临界温度 T_c,在计算中按 CGS 制(即克·厘米·秒制),ρ、C 和 K 分别取:

$$\rho = 1.3, \quad C = 0.3, \quad K = 2.4 \times 10^{-4}$$

表 9.15 几种炸药的热点临界温度 T_c(单位:℃)

T_c $\frac{a}{t}$ 炸药名称	10^{-3} / 10^{-4}	10^{-4} / 10^{-6}	10^{-5} / 10^{-8}	10^{-6} / 10^{-10}
太安	350	440	560	730
黑索金	385	485	620	820
乙二醇二硝胺	400	590	930	1775
特屈儿	425	570	815	1250
乙二胺二硝酸脂	600	835	1255	2225
硝酸胺	590	825	1230	2180

② 在热点中炸药的分解时间

根据如下的化学动力学关系式,可以求得分解时间 t:

$$\left.\begin{aligned} mC\mathrm{d}T &= (m-x)qZe^{-E/RT}\mathrm{d}t - K(T-T_0)\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &= (m-x)Ze^{-E/RT}\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \tag{9.29}$$

其中:

$$\begin{cases} x=x(t) \text{——随时间 } t \text{ 变化的已分解的炸药质量;} \\ m=\frac{4}{3}\pi a^3\rho \text{——热点炸药质量;} \\ K(T-T_0) \text{——单位时间内传给热点周围炸药的热量。} \end{cases}$$

式(8.29)为一阶微分方程组,可以通过数值积分求解,假若已知 T_c、K、T_0 便可求得分解反应时间 t。例如,对于黑索金,若 $a=10^{-3}$cm、$K=26$J/cm·s·℃、$T_0=20$℃、$T_c=400$℃,则可求得反应时间 $t\approx10^{-4}\sim10^{-7}$s。

③ 热点尺寸

实验测定,对于太安热点起爆时,需要的温度约为 430~500℃,则由表 9.15 可知热点半径为 $10^{-4}\sim10^{-5}$cm。就一般而言,热点半径则约 $10^{-3}\sim10^{-5}$cm。

④ 热点具有的热量 Q

热点所具有的热量 Q 一般在:$Q=10^{-3}\sim10^{-10}$J 的范围。如对于太安,当热点半径 $a=10^{-4}$cm、$q=5860$J/g、$\rho=1.6$g/cm³ 时,其热点所具有的热量 Q 为:

$$Q = \frac{4}{3}\pi a^3\rho q = 1.25 \times 10^{-8}\mathrm{J} \tag{9.30}$$

综上所述,一般炸药的热点须具备以下条件才能成长为爆炸:

a 热点的温度在 300~600℃;

b 热点的半径为 $10^{-3}\sim10^{-5}$cm;

c 热点的作用时间在 10^{-7}s 以上;

d 热点所具有的热量在 $10^{-8}\sim10^{-10}$J。

以上所提供的只是个数量级范围。并非准确的数值。

3. 热点的成长过程

热点的成长大致可以分成以下几个阶段:

① 热点的形成。

② 由热点向周围燃烧阶段。这是一种快速燃烧过程,燃烧速度小于音速(为亚音速)。例如,测得太安的初始燃烧速度约为 460m/s、黑索金约为 300m/s。

③ 由快速燃烧转为低速爆轰阶段。当燃烧速度达到某个极限时,由于燃烧产物压力的增加,快速燃烧就可以转变成低速爆轰。这种爆轰速度当然为超音速的。如太安低速爆轰时,其特征速度为 1300m/s;对于一般炸药而言,其特征爆速均在 1000～2000m/s 的范围。

④ 由低速爆轰转为高级爆轰阶段。即爆速达到比初级阶段更高的稳定爆轰阶段。例如,密度为 0.95g/cm³ 的太安炸药,其高级爆速为 5300m/s。

当然,不是对于所有的炸药,其热点的成长过程都经历上述四个阶段,例如叠氮化铅的爆轰成长就不存在燃烧阶段。

对于热点的成长过程可以通过实验摄影记录下来,其办法是采用如图 9.17 所示的装置。

当炸药在冲头和透明的有机玻璃击砧之间受到摩擦而生成热点时,炸药若爆炸则发光,光透过有机玻璃投到反射镜上,然后再由反射镜反射到高速摄影相机中。这种高速分幅相机便可以拍出从热点开始,反应区由小到大的一系列照片。由这些照片便可看出热点的成长过程,并可大致计算出从燃烧到爆轰之各个阶段的波阵面速度。

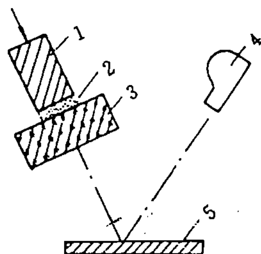


图 9.17 热点成长过程的摄影装置
1—冲头;2—炸药;3—有机玻璃击砧;
4—高速相机;5—反射镜

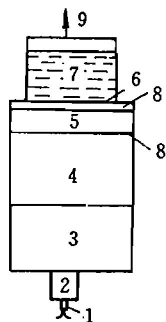


图 9.18 观察起爆区内爆轰形成的装置示意图
1—雷管;2—传爆药柱;3—炸药透镜;
4—主发药柱;5、6—有机玻璃隔板;
7—装有硝基甲烷的容器;8、8′—空气隙;
9—对准摄影机光轴的方向

9.4.3 冲击波起爆机理

冲击波引爆炸药的机理尚未最后定论,如下按目前大多数研究者的观点论述。冲击波起爆炸药的机理分为:对均质炸药和非均质炸药两种情况。

1. 对于均质炸药

当冲击波进入均质炸药后,受到这个初始冲击波冲击压缩的炸药,足以加热到自动点火的温度,于是化学反应开始,造成压力的增加,随着压力的增加而发出一系列压缩波。然而这种反应开始很弱,几乎等于没有反应,后来才“突然”猛烈,以至于在最先受到初始冲

击波冲压的那层炸药开始形成爆轰波。从冲击到爆轰要经过一定的延迟时间。这个由冲击波引起的爆轰波为超高速(过冲)爆轰波,它以大于正常爆轰速度跟在初始冲击波的后面,经过一定的距离,它追上了走在前面的初始冲击波,爆速突然下降但略高于正常爆速,然后才渐渐趋于稳定爆速。这就是蔡坎(R. F. Chaiken)[8]的爆轰流体力学理论要点。

实验已经证实了蔡坎理论。实验上,研究起爆的最好对象是硝基甲烷,它是一种透明的液体,这样便可以用高速相机把整个起爆过程记录下来。为此,康贝尔(A. W. Cambelle)等人设计了如图 9.18 所示的装置[9]。

实验中使用了一组有机玻璃隔板,其目的是阻挡主发药柱的炽热爆轰产物。有机玻璃的透明性可以使我们在观察装药端面引爆时,在扫描的摄影照片上记录下冲击波通过隔板时空气隙的闪光。由于有机玻璃的冲击绝热曲线是已知的,于是就可以计算这种冲击波后的质点速度、密度和压力。此外,硝基甲烷的冲击绝热曲线也是已知的,所以不难计算硝基甲烷中初始冲击波速度、质点速度、压力和密度。

有人使用直径 75mm 的平面波发生器、长 140mm 的压装主发药柱(60RDX/40TNT)、厚为 29mm 的有机玻璃隔板、初始密度为 $1.125g/cm^3$ 的硝基甲烷(装在内径为 53mm 的有机玻璃管中)做了起爆实验。根据高速摄影照片计算出:初始冲击波速度 $D_0=4500m/s$,压力 81×10^9Pa,波后的质点速度(亦即隔板速度) $u_p=1620m/s$,超高(过冲)爆速 $D_* =10000m/s$,正常爆速 $D=6290m/s$。这些结果已画在图 9.19 中。

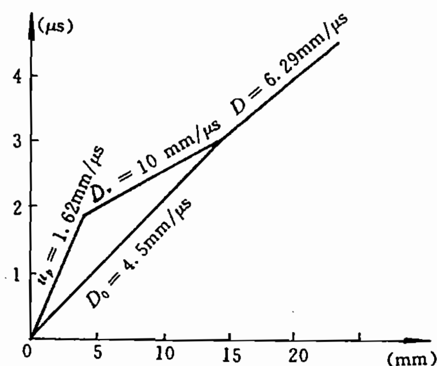


图 9.19 硝基甲烷冲击起爆的时程图

2. 对于非均质炸药

在前面,关于热点学说的概述中已经提到,固体炸药(散装、压装和铸装)与均质的液体炸药相比,其爆轰感度要高得多。以梯恩梯为例,尽管它的化学性质不随其聚集状态的变化而变化,但是在同样的初始密度下压装的 TNT 要比铸装的 TNT 敏感得多。很显然,这种多孔炸药的高感度是与其物理—力学结构不均匀性直接相关。

所谓非均质炸药正是指物理—力学性能质不均匀的炸药。这样的炸药或多或少地都含有空气隙,如压装梯恩梯就是如此(当然,铸装的也含有一定空气隙,只是相对少得多)。由于不可能使固体炸药达到单晶体密度(即理论密度),从而存在着物理上的不均匀性。

对于非均质炸药,入射的初始冲击波沿着其结构不均匀的炸药介质传播时,它要在局部热点上产生化学反应,燃烧加热。由于热点处生成的气体使得其周围介质的压力不断上升,从而加强了冲击波的强度,进而又使波阵面后面的热能释放进一步提高,以致引起爆轰。

非均质炸药除了有空气隙外,还有其他缺陷。当非均质炸药受到外界作用时,起爆能量就容易集中在这些空隙和缺陷处,而形成热点。用条纹式高速摄影记录下来的非均质炸药的爆轰波阵面是十分粗糙的,可见起爆能量在这些特殊地方的作用是不均匀的。

3. 均质炸药和非均质炸药起爆过程的不同之点

根据大量的实验和一定的理论探讨，将均质和非均质炸药的起爆不同之处归纳如下：

① 在均质炸药中，初始冲击波的速度是恒定的或者随时间略微下降；而在非均质炸药中，初始冲击波在它的整个传播中是加速的。

② 在均质炸药中，开始出现超高速爆轰；而在非均质炸药中，没有发现这种过冲爆轰现象。

③ 在均质炸药中，过渡到正常爆轰是突然的；而在非均质炸药中过渡到正常爆轰是逐渐的。

④ 在均质炸药中，爆轰发生在隔板和炸药的界面附近；而在非均质炸药中，目前认为爆轰是发生在冲击波阵面上或冲击波阵面附近。

⑤ 在均质炸药中，爆轰开始前，初始冲击波阵面后的介质相对地讲是不导电的；而在非均质炸药中，初始冲击波阵面后的介质是完全导电的，并且在过渡到正常爆轰时变得更加明显。

⑥ 在均质炸药中，起爆过程对于初温的变化或冲击波压力的变化，要比非均质炸药敏感得多。本章主要参考文献[1]和[2]。

附录 9.1

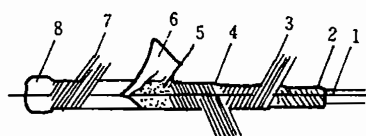
爆炸作业中的火工品

一、导爆索(detonating fuse or blasting fuse)

从外观上看，导爆索很像一条细而长的绳索，它是以猛炸药(黑索金或太安)为索芯，即药芯；以棉麻纤维等为外层的被覆材料。它是能够传播爆轰波的索状起爆器材，但在架空电力线爆炸压接中则作为“炸药”使用。

1. 导爆索的结构

现代导爆索的结构是这样：索芯的直径为3～4mm，由粉状的太安或黑索金构成；装药的外层即外壳是用棉麻等纤维材料缠绕制成的，导爆索的壳外一般覆涂薄薄一层树脂。它的详细结构，见附图 9.1 所示。



附图 9.1 普通导爆索结构示意图
1—芯线；2—黑索金药芯；3—内层棉纱；4—中层棉纱；5—内防潮层(沥青层)；6—纸条；7—外层棉纱；8—外防潮层

① 构成导爆索的主要装药黑索金

黑索金属于环状硝基胺炸药，它的学名为环三亚甲基三硝胺，其分子式为 $C_3H_6N_6O_6$ 代号为 RDX。

黑索金是一种高猛炸药，它的威力大、猛度高、安定性好，因而用途广泛。同时，制造这种炸药方法简单，其原料来源十分丰富。

黑索金是一种无臭、无味、白色粉状结晶，密度为 1.816g/cm^3，假密度为 0.8～0.9g/cm^3，加压到 19600N/cm^2 时，密度可达 1.73g/cm^3。纯黑索金的熔点为 205℃，用直接硝解

法制得的军用品，熔点为 202～203℃，工业品为 201～202℃。工业品中约含 1%的杂质。用醋酸将其多次重结晶，熔点可提高到 204.5～205℃。由于黑索金的熔点高，而高温时感度增高，同时在熔化时还有分解现象，故不适于熔铸装药。

黑索金不吸潮，它既难溶于水，也不易溶于一般有机溶剂中，只有丙酮和浓硝酸对它的溶解情况好(在温度为 53℃的丙酮中，溶解度为 17.5；在 93%的浓硝酸中，温度为 20℃时，溶解度为 12.6)。因此，在贮存中不需要特殊防潮措施。

黑索金在日光的照射下不分解。它的热安定性比太安和特屈儿($C_7H_5N(NO_2)_4$)都好，在 50℃时长期贮存不分解。经热贮藏试验，在 85℃下 10 个月；在 100℃下 100 小时；在 120℃下 48 小时黑索金的重量及外观均无变化。

黑索金受热熔化时开始分解，在 200℃下分解加速，爆发点① 为 230℃(5 分钟的延滞期)。少量黑索金在空气中能完全燃烧，大量的黑索金在急速受热的情况下发生分解并可导致爆炸。

黑索金的爆速在密度为 1.7g/cm^3 时为 8400m/s，爆炸分解热为 55×10^{5}J/kg，爆炸产物气体体积为 0.91m^3/kg。

黑索金的猛度用铅柱压缩值表示，在装药密度为 1g/cm^3 时为 24.9mm。

黑索金的撞击感度。当用 10kg 重锤、25cm 落高进行冲击实验时，其爆炸率为 80%。

② 导爆索的包裹材料与防潮涂料

目前，普通导爆索主要用棉纱作为包覆材料。棉纱在卷制前要经过干燥以降低其含水量，一般使用 36～19 支本色梳棉纱。

沥青是普通导爆索的主要防潮涂料。沥青为有机化合物的复杂混合物，它溶于二硫化碳、氯仿、苯及其他有机溶剂，在常温下呈固体、半固体或流体状态。

石蜡用于普通导爆索最外层防潮涂料，是因为它具有高度的憎水性，且易熔化，能很好地涂覆在棉纱和纸上。

石蜡不能代替沥青作为导爆索内防潮涂料，这是因为石蜡在液体状态时渗透力很强，若作为内层涂料就会渗到炸药中，影响爆炸性能。

导爆索分为安全导爆索和露天导爆索。而后者又分为普通导爆索、高抗水导爆索、强起爆力导爆索和低能导爆索四种。

2. 对于以黑索金为药芯的普通导爆索的技术要求

① 外观。表面应呈红色(便于识别)，涂料均匀，不应有折伤污垢，端部应有金属防潮封帽或涂有防潮剂。

② 药量。普通黑索金导爆索规定的药芯装药量不小于 12g/m，一般为 12～13g/m。

③ 尺寸。普通导爆索的外径规定不大于 6.2mm，一般在 5.5～6.2mm；药芯直径一般在 3～4mm；每卷长度应为 50±0.5m。

④爆速。普通黑索金导爆索的规定爆速为 6500m/s，一般在 6500～7200m/s。

⑤ 起爆能力。按规定，2m 长的导爆索能完全起爆一个装药为 200g 的 TNT 药块。

⑥ 爆轰感度。按规定，把多段导爆索按规定的方法联结后，用 8 号雷管起爆，它能爆

---

① 关于爆发点、延滞期、感度等概念，请见 § 9.2。

轰完全。

⑦ 防水性。普通导爆索在0.5m深的水中浸泡24小时后，其感度和传爆性仍符合正常要求。

⑧ 耐温性能。对于普通导爆索在50±3℃条件下经6小时，爆轰感度仍符合要求；在－40±3℃的冷冻2小时后，爆轰感度亦完全符合规定的要求。

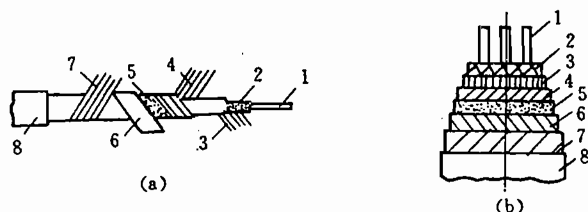
⑨ 耐折性质。导爆索在50±3℃和－40±3℃条件下经受按上一条所述的保温时间之后，做弯曲试验，芯药不得洒出和露出内层线，然后按规定的连法联结后，仍能保证爆轰完全。

⑩ 喷燃。导爆索端面药芯被导火索喷燃时，导爆索不应爆轰。尽管如此，为安全起见，仍严禁用火焰点导爆索。

⑪ 耐拉强度。导爆索承受50公斤拉力后，仍能保持爆轰性能。

二、导火索(ignition fuse)

导火索是用来传导火焰和引爆雷管的。在爆炸压接中它是必备的材料之一。它以一定密度的粉状或粒状黑火药为药芯，外面包缠绵纱、麻纤维并加防潮层。它的具体结构见附图9.2。



附图9.2　工业导火索结构图

1—芯线；2—药芯；3—内线层；4—中线层；5—防潮层；6—纸条层；7—外线层；8—涂料层

导火索的最中心是由三根芯线和黑火药组成的索芯，索芯的直径在2.2mm以上，导火索就是靠索芯来传送火焰的。药芯之外顺次裹缠几层外皮，紧裹药芯的是内层线，其作用是将药芯围拢住使其成为连续的圆状体；其外是中层线，缠绕的方向与内层线相反，其作用是裹住内层线不让它散开，并可以将药芯进一步裹紧以增加药芯的密度；中层线的外面是(沥青)防潮层，起到防潮和粘接中层线，以防松动作用；防潮层的外面是纸条层，它和沥青严密粘接，使导火索硬挺一些，而且还有防止药芯燃烧火焰透出索侧的功能；纸条层外面再裹以外层线，目的是将纸条层缠住；最外层是涂料层，它将外层线与纸条层粘在一起以防止在切断导火索时散开，还借助此层着色以区别不同品种的导火索。经过这样逐层缠绕后，导火索外径为5.2～5.8mm。

导火索在爆破作业之中的点火作用主要分下述三个阶段完成。

第一称为引燃阶段。以相当的热能使药芯达到燃点以便点燃导火索，这个阶段的热分解速度很小，反应速度的增长较慢。

第二称为燃烧阶段。当药芯被引燃后，即发生化学变化，产生相应的气体和固体生成物，所产生的气体生成物沿索壳从引燃端排出；固体生成物与内层包线形成排气通路，使

火焰沿着药芯向前传递，然后形成比较稳定的均匀燃烧，直至药芯接近燃烧终了。这个阶段的热分解反应速度因燃烧生成物中硫化钾(K_2S)等物质的自动催化作用而很快增加，直至增大到最大值。

第三称为喷火阶段。导火索燃烧至尾端，由于黑火药燃烧时产生气体压力和本身所具有的热冲量，瞬间喷出火焰引爆雷管，进而引爆炸药。

导火索的药芯是黑火药，它由硝酸钾(硝石)64%、硫磺 26%及木炭粉 10%机械混合而成。其各成分的性能如下：

1. 硝酸钾

纯净的硝酸钾为白色结晶体，比重为 2.1g/cm³，分子量为 101，分子式为 KNO_3。硝酸钾含氧丰富，吸潮性较小。故在一般黑火药中采用它作为氧化剂。单独硝酸钾加热到 334～335℃时熔化，到 338℃时开始分解，并放出氧气，同时有亚硝酸钾 KNO_2 生成。继续加热则生成氧化钾 K_2O，并放出氮气和氧气。

2. 硫

硫(S)的原子量为 32.07，比重为 1.99～2.07g/cm³，硫俗称硫磺，它在常温下为黄色晶体。

硫在黑火药中的物理作用是粘合剂，对于粉状药而言，它能使密度较大的硝酸钾和密度较小的木炭相对位置固定，可减少由于震动而产生的分层现象。对于粒状药而言，它能使药粒具有一定的硬度，增加其在装箱、运输与使用过程中的耐磨强度。硫在黑火药中的化学作用是还原剂(可燃剂)。在导火索的点燃或黑火药的爆发过程中硫被氧化成二氧化硫、三氧化硫。只有极少量的硫作为氧化剂而被还原成硫化氢、硫化钾等。

此外，硫在黑火药中还起到降低燃点，使黑火药易于点燃。这就是黑火药比无硫火药更易于点燃的原因所在。

3. 木炭

木炭是一种有机化合物，主要含碳元素，此外还含有氢、氧等元素。木炭中的含碳量是表示木炭炭化度的指标，含碳量的高低对导火索的燃烧速度影响比较显著，含碳量越高燃烧速度则越快；反之则燃烧速度越慢。因此含碳量不能过高也不能过低，较理想的含碳量为 79±4%。

木炭的发火点控制在 165～240℃，若太低，黑火药虽易发火点燃，但安定性降低；太高则使黑火药燃点提高，难以点燃。

木炭在燃烧中的热量放出随含碳量的高低而定，含碳量越高放热越多。

木炭不溶于水。低温时很安定，高温时在空气中容易燃烧。

4. 导火索的分类

导火索按应用范围不同，分为军用导火索和工业导火索两种，而工业导火索按其结构特点又可分为：

① 全棉线导火索。这种导火索的主要被覆材料是棉线，内层衬以纸条作为包缠物，石油沥青作为防潮剂。它具有较好的防潮能力，适用于潮温度较大的爆破作业环境。

② 三层纸工业导火索。这种导火索的结构与全棉线导火索基本相似，也是以石油沥青作为防潮剂，只是棉纱用量减少，纸条用量增加。它适用于干燥和潮湿度不大的爆破作

业环境。

③ 塑料导火索。它的结构材料除使用部分棉线和纸条外，还加一层塑料层，塑料层常选用聚氯乙烯或聚乙烯塑料。这种导火索有较好的防水性能，适用水中爆炸作业。

5. 导火索应符合的技术标准

① 外观。外观均匀不应有折伤、变形、发霉、严重油污以及剪断处不应有散头。

② 导火索的尺寸。它的外径为 5.2～5.8mm，药芯直径不小于 2.2mm。

③ 喷火强度不低于 40mm。

④ 燃烧速度为 100～125m/s。

⑤ 燃烧性能。燃烧时不得有断火、透火、外壳燃烧、爆声及速燃现象。

⑥ 浸水性能。在 1m 深(水温为 20±1℃)静水中浸泡 2 小时(塑料导火索浸 5 小时)后，燃速及燃烧情况应符合上述标准要求。

三、雷管(detonator or detonating cap)

雷管是爆炸作业中一种必不可少的器件，包括爆炸压接作业在内。它是用来起爆炸药或导爆索的。如下主要介绍工程雷管。

1. 雷管的分类

① 按激发的冲能[①] 分类

a. 火焰雷管(火焰冲能)；b. 拉发雷管(摩擦冲能)；c. 针刺雷管(撞击冲能)；d. 电雷管(电冲能)。

② 按作用时间分类

a. 瞬间立即爆炸的称瞬发雷管；b. 延期爆炸的称延期雷管，延期雷管又分为秒延期雷管和毫秒延期雷管。

③ 按应用的范围分类

可分为军用雷管和工程雷管或工业雷管。

④ 按管壳材料分类

a. 金属壳(包括铝、铜、铁)雷管；b. 纸壳雷管；c. 塑料壳雷管。

⑤ 工程雷管按其管内起爆药量的多少分成 10 种号码，号数越大起爆力越强。实践证明，6 号和 8 号雷管最合乎实际使用要求。

爆炸压接使用的多为 8 号纸壳火雷管(以下简称火雷管)，但也有使用瞬发电雷管的(以下简称电雷管)。

对于工程雷管在技术上有如下要求：

a. 有足够的灵敏度和起爆能力；

b. 雷管性能要有均一性；

c. 制造安全、使用安全；

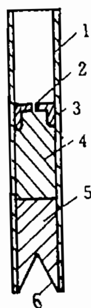
d. 长期贮存的稳定性(安全性)好。

2. 火雷管的结构

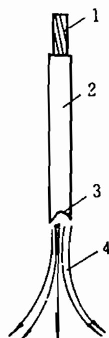
在爆炸压接导线作业中最常用的是火雷管。它的结构如附图 9.3 所示，它是由管壳、

---

① 关于冲能的概念，请看 § 9.2。



附图 9.3　火雷管结构示意图
1—雷管壳；2—帽孔；3—加强帽；
4—正装药；5—副装药；6—聚能穴；



附图 9.4　雷管爆炸形成的聚能射流
1—导火索；2—雷管；
3—聚能穴；4—聚能射流

正副装药和加强帽三部分组成，其各部分的作用如下：

① 管壳

管壳把雷管各分部结合成一个整体，并保护起爆药和猛炸药免受外界能量的直接作用，以利于安全生产、运输和使用。

有外壳时，炸药爆轰成长迅速，爆速也有一定程度提高，而且在爆炸时，由外壳形成的高速破片是有利于起爆其他炸药的。为充分利用这一作用，管壳必须有足够的强度，以免起爆药由燃烧转为爆轰时产生高压使其过早破裂漏气而延长爆轰成长期。国家标准规定铜、铁管壁厚度应不小于 0.2 毫米，纸壳壁厚度不得小于 0.9 毫米。

管壳还可以保护雷管装药不易受空气中温度状况的影响。

雷管壳均为圆柱形，其底药柱上作成凹心形，通称聚能穴，目的是为了产生局部聚能效应以提高雷管的起爆能力，雷管形成聚能射流如附图 9.4 所示。

② 加强帽

加强帽插入雷管壳内，紧紧扣在起爆药上。其一端无底，另一端有底，并在底的中心有一传火孔。加强帽的作用如下：

a. 封闭雷管装药，使装药不致撒出，并减小外界因素对装药的影响；

b. 阻止起爆药柱上层爆炸产物向反方向和旁侧飞散，加速压力的增长，以加快从燃烧向爆轰的转化。尤其对爆轰成长期长的起爆药。如雷汞，就可利用加强帽的作用来降低极限起爆药量(关于极限起爆药量的概念，请见第三章)。试验证明，有无加强帽其效果是不同的。因此，雷管中的加强帽松动或脱落对其起爆力是有影响的，使用时应该特别注意。

试验方法是用雷管壳装入梯恩梯，加压到 2×10^{7}Pa，用雷汞起爆，雷汞加压为 10^{7}Pa，试验结果见附表 9.1。

目前，我国多用钢或铁镀铜做加强帽，其外径与管体内径应符合紧密配合的要求。

附表 9.1　有无加强帽的起爆药极限药量比较

雷汞中杂质 (%)	极限药量(g)	
	无加强帽	有加强帽
1.4	0.8	0.29
3.05	1.2	0.29
3.44	1.2	0.35

③ 雷管装药

雷管装药包括正装药(或称第一装药)和副装药(或称第二装药)。

a. 正装药即起爆药，装于雷管的上部，它能在较小的外界能量作用下发生爆炸，并能非常迅速地转入爆轰状态。起爆药的性质和装药条件决定雷管的感度。起爆药应有适当的感度，以保证雷管起爆的准确性和使用的安全性。起爆药应能使猛炸药完全爆轰。

目前，起爆药多采用雷汞、叠氮化铅、二硝基重氮酚。现分别简要介绍它们的性能。

雷汞、学名为酸汞，分子式为 $HgC_2N_2O_2$，即 $Hg(ONC)_2$，分子量为 284.65，雷汞的颜色，按不同制法可得到白色或灰色两种。它微溶于水，略溶于酒精，易溶于氨水。因此，雷汞的吸湿性很小。雷汞与弱碱作用缓慢，而强碱则可使雷汞分解。雷汞在常温下很安定，当温度为 50℃时加热两小时后才开始分解；在 75℃时加热 48 小时，其重量损失 0.18%；在 50～60℃的条件下保存 6 个月，重量减少 3.6%。

叠氮化铅具有高的起爆力、良好的耐压力，不吸湿，不易分解，不溶于水，即使水分含量增加时其起爆力也不会降低。由于它具有这些优点，故它逐渐取代雷汞。叠氮化铅的分子式为 PbN_6，即 $Pb(N_3)_2$，分子量为 291，纯净的叠氮化铅为白色结晶粉末，工业品有时呈微红色，它在水中溶解度很小，随温度增加略有增高。浓硝酸能使叠氮化铅爆炸，浓硫酸能使湿的叠氮化铅爆炸。叠氮化铅对热的作用是比较安定的，在 50℃下存放 3～5 年几乎无任何变化。在 175℃下缓慢加热，则在很短的时间内就会有明显的失重；温度高于 200℃时分解加快，最终可能变成不能爆炸的粉末；在温度为 245～250℃的条件，极缓慢地加热可使其完全分解而不发生爆炸；当温度高于 350℃时，即使在真空状态下也能发生爆炸。

叠氮化铅和雷汞相比，其爆轰成长期较快，爆炸在较短时间内可以加速到爆轰，因而在单位时间内有更大的能量释放出来(即能量密度高)，故其起爆力大于雷汞。同时，叠氮化铅含有 30%的水分时，其爆轰感度并不下降。

二硝基重氮酚，分子式为 $C_6H_2N_2(NO_2)_2$，分子量为 210，它简称 DDNP。因制造的方法不同，它有亮黄、土黄、棕红、酱紫等颜色。结晶形状有片状，短柱状、大花瓣状、小颗粒聚合的球状等。二硝基重氮酚微溶于水，可溶于丙酮中，它具有良好的热安定性，将它加热到 60℃时不受任何影响，没有分解现象。但在较高的温度下加热时，其分解减重则随时间增加而增加，如在 100℃的条件下加热 2 小时，失重 0.10%，加热到 48 小时失重增加到 1.75%。二硝基重氮酚在 50～55℃、相对湿度为 95%以上、在饱和的 CO_2 气体中和光的照射下，贮存 72 小时其质量无显著变化，这说明它长期贮存是安定的。

二硝基重氮酚的起爆力仅小于叠氮化铅，而比雷汞高一倍。

b. 副装药即置于雷管下部的猛炸药，它决定雷管的起爆能力。目前我国作为雷管副装药的有黑索金、太安和梯恩梯等单质炸药，以及黑索金与梯恩梯、黑索金与石蜡等混合

炸药等。

我国生产的 6# 和 8# 雷管的尺寸规格和装药量如附表 9.2 和附表 9.3 所示。

附表 9.2 国产 6#、8# 雷管的规格尺寸表

管壳材料	雷管号码	雷管壳尺寸(mm)			加强帽(铜、铝、铁)的尺寸(mm)			
		外 径	内 径	全 长	外 径	内 径	全 长	帽 孔
铜、铝、铁	6#	6.6±0.1	6.22−0.04	35±1	6.16+0.06	5.55−0.05	6.5−1	2.0
铜、铝、铁	8#	6.6±0.1	6.22−0.04	40±1	6.16+0.06	5.55−0.05	6.5−1	2.0
纸	8#	7.8±0.3	6.25−0.1	40±1	6.16+0.06	5.55−0.05	6.5−1	2.0

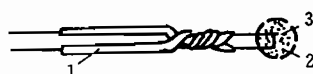
附表 9.3 工业雷管装药量

雷管号码	正 装 药(g)					副 装 药(g)				
	二硝基重氮酚	雷汞	三硝基间苯二酚铅	叠氮化铅	聚晶	混合起爆药	黑索金	特屈儿	梯恩梯黑索金	梯恩梯特屈儿
8#	0.32±0.02	0.08±0.02	0.06±0.02	0.21±0.02	0.2±0.02	0.25±0.02	0.7±0.04	0.7±0.04	0.7±0.04	0.7±0.02
6#	0.32±0.02	0.04±0.02	0.06±0.02	0.21±0.02	0.2±0.02	0.25±0.02	0.4±0.02	0.4±0.02	0.5±0.02	

注:①混合起爆药栏内装药量中包括 0.1g 雷汞,装在混合起爆药的上面。混合起爆药的组份和配比为叠氮化铅:雷汞=15:85;

②聚晶表示叠氮化铅与三硝基间苯二酚铅的聚晶

电雷管与火雷管的结构基本相同,所不同的就是电雷管在管壳开口处有一段电气点火装置(它又称电引火头)。电气点火装置见附图 9.5,它是由两根塑料绝缘层的铜线(直径 0.5mm),在一段每相扭接后,再在两线的末端焊接高阻金属丝(它称作桥丝,桥距约 3～3.5mm 构成,在桥丝上有滴状引燃剂。当通电时,电流通过桥丝时,灼热的桥丝将引燃剂点燃,使管内起爆药发火起爆。这两根塑料绝缘铜线称为电雷管的脚线,长度约 1～2.5m,一般取 1.5m。



附图 9.5 电雷管的电气点火装置

1—脚线;2—桥丝;3—滴状引燃剂

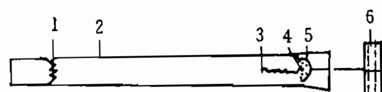
电雷管的桥丝有用镍铬合金丝和康铜合金丝两种。镍铬丝的直径为 0.03～0.04mm,康铜直径为 0.05mm。电雷管的引燃剂是引火棉,或用硫氰酸铅氯酸钾与粘合剂胶制而成,我国用引火棉的较多。

单个电雷管的主要性能如附表 9.4 所示。

附表 9.4 单个电雷管的主要性能

桥丝种类	串联准爆电流(A)	单个起爆电流(A)	安全电流(A)	电 阻(Ω)	使 用 说 明
康铜丝	2	1	0.05	0.7～1.75	串联使用时电阻差不大于 0.2Ω
镍铬丝	1	0.6	0.05	1.8～2.7 2～4	1. 串联使用时电阻差可不考虑; 2. 所列两种电阻范围是不同厂产品。

拉火管,它由纸管体、倒刺、摩擦药和拉柄组成,其结构如附图 9.6 所示。拉火管的倒刺用以固定导火索,使导火索插入后不致脱落。当拉出拉柄时,拉火金属丝与摩擦药摩擦发火,引燃导火索。



附图 9.6　拉火管结构示意图

1—倒刺；2—纸管体；3—拉火金属丝；4—摩擦药；5—火帽；6—拉柄

拉火管应特别注意防潮，以免锈蚀拉柄，使拉火管失效。

参考文献

[1] 鲍姆 Φ A 等著．众智译．爆炸物理学．北京：科学出版社，1963

[2] 北京工业学院八系．爆炸及其作用(下册)．北京：国防工业出版社，1979

[3] Семенов Н Н. Цепные Реакции Госхимтехиздат，1934

[4] Франк-Каменецкий. Диффузия и Теплопередача в химической кинетике. Изд. АН СССР，1947

[5] Rideal E K，etal. Proc. Roy. soc，1948 A195，135

[6] Bowden F P，Yoffe A D. Fast Reaction in solids，London，1958

[7] 德列明 A H 等著．沈金华等译．凝聚介质中的爆轰波．北京：原子能出版社，1986

[8] Chaiken R F，Chem J. Phys. 1960. 33，760

[9] Cambelle A W，Davis W L，Travis J R. Phys. of Failds，1961. 4. 498

[10] 湘中供电局(柏克寒)等．太乳炸药与爆炸压接．北京：水利电力出版社，1978

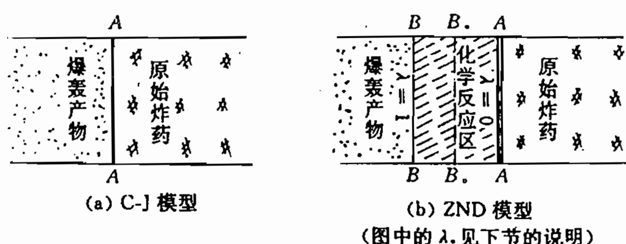
[11] 北京工业学院八系．爆炸物理基础．北京工业学院，1974

第十章　爆轰波理论

要描述炸药的爆炸作用，必须清楚地了解爆炸过程的机理。只有在掌握爆轰学的基本规律之后，我们才能在前几章的基础之上处理爆炸作用的问题。

爆炸过程的研究从 19 世纪就开始了，早期的工作是实验。实验中发现，在观察充满可燃气体(如 $2H_2+O_2$、CH_4+2O_2 等混合气体)管内火焰面的传播时，由于条件不同比如点火的强弱程度不同，就传播速度而言可能出现两种截然不同的情况：一种是火焰面以每秒几米的速度传播；另一种则以每秒数公里的速度传播。前者称为爆燃(deflagration)，后者称作爆炸(explosion)。这种奇异的现象不仅对于气相爆炸物质(可燃气体)存在，对于凝聚相炸药(如液态的硝基甲烷、固态的 TNT 等等)亦要发生，比如用火焰点燃 TNT，其火焰面传播速度就很低，而用雷管起爆，其火焰面将以极高的速度传播。

为了描述如上过程，恰普曼(D. L. Chapman)、儒格(E. Jouguet)于 19 世纪末和 20 世纪初各自独立地提出了一个简单然而又令人信服的假定。他们将化学反应区看成一个薄层，在数学上作为一个几何面，"可燃物"穿过这个面立即变成"燃烧产物"，即化学反应瞬间完成。于是上面所提到的爆炸和爆燃过程则简化成一个包含化学化应强间断面的过程——这就是经典爆轰理论中的 C—J 假设(Chapman-Jouguet hypothesis)。对于爆燃过程，这个强间断面的传播称作爆燃波(或燃烧波)；对于爆炸过程而言，这个强间断面的传播称作爆炸波(或爆轰波)。图 10.1 表示了这一过程。



(a) C-J 模型

(b) ZND 模型
(图中的 λ，见下节的说明)

图 10.1　爆轰波结构示意图

C—J 假设使爆轰(或爆炸)和爆燃过程的描述大大简化，我们不必去考虑化学反应的详细过程，而仅把化学反应作为一个外加的能源反映到流体力学方程组中，这种处理成功的描述了爆轰波阵面之后的气体产物流动；对于爆燃过程，它不大理想，但该描述仍可对爆燃过程的一些基本特性给出有用的解释。

C—J 假设，按它来处理爆轰过程的办法又称作 C—J 理论。对于爆轰过程的描述尽管取得成功，但它毕竟是个近似。因实际爆轰波阵面的化学反应区是有一定宽度的，且对于某些炸药其反应区的宽度还相当大，例如 TATB 炸药，即三氨基三硝基苯($C_6H_6N_6O_6$)，对于这样的炸药，若把反应区作为一个几何面显然不恰当了；同时从气体爆轰的实验中已经发现按 C—J 理论给出的压力值和密度值要比实际的值高 10%～15%，而且爆轰波阵面

(detonation wave front)相对于它后面爆轰产物(detonation products)的速度亦不是在下面将要讲到的等于音速,如果爆轰波视作定常的,那么爆轰波阵面后的产物运动速度约为1.10～1.15马赫数。

从上面的论述中得知,要想比较精细地描述爆轰,必须考虑爆轰波阵面内的结构。在20世纪40年代有三位著名的科学家捷尔道维奇(Я. В. Зельдович 即 Y. B. Zeldovich),冯·诺曼(von Neumann)和杜林(W. Döring)分别独立地提出了爆轰波阵面结构的新模型,该模型认为:爆轰波阵面的前锋为一个冲击波(如图10.1(b)中的$\overline{AA}$线),其之后为有一定宽度的化学反应区(如图10.1(b)中的区域$ABBA$),在这个区域中进行连续的化学反应,在该区的后边缘(如图10.1(b)中的$\overline{BB}$线)处反应完全结束,炸药在此完全变成为终态产物。这个理论就是所谓ZND模型(即(Zeldovich-Neumann-Döring model)。

按照ZND模型,在波阵面的化学反应区中的压力更高,它要高于终态产物的压力,即存在一个所谓的"化学峰",这在气体和凝聚介质爆轰的实验中都得到了证实,这些实验结果对此理论似乎是有力的支持,但是后来的研究表明,该理论并不普遍适用,即随着科学技术的发展,人们对爆轰的认识也在深化。不过在工程中使用C—J理论就足够了,以下我们主要谈C—J理论。

10.1 关于爆热的计算

由于研究爆轰必涉及到爆热,因此在此先论述一下爆热及爆热的计算。

在炸药理论中,常要涉及到:生成热、燃烧热、爆炸热(即爆热)等几个术语,现将其定义介绍如下:

生成热——在标准条件下,由自由元素构成1克分子(即1mol)的某种化合物时所生成的热量。所谓标准条件,就是指反应在25℃,在一个大气压下进行(这与通常的标准条件0℃的说法不同)。

燃烧热——指物质在氧气中完全燃烧时所放出的热量。

爆热(即爆炸热)的定义:抽象地讲,为单位质量炸药爆炸时所放出的热量。而在实用中常用两种定义:

①爆热——一克分子炸药爆炸时所放出的热量。

②爆热——一千克炸药爆炸时所放出的热量。这一定义常用于工程上。

热化学的基础是盖斯定律,这个定律是盖斯(Гесс)在1840年发现的,并通过了实验证明。该定律为:

反应的热效应与反应途径无关,而只取决于反应的初态和终态。

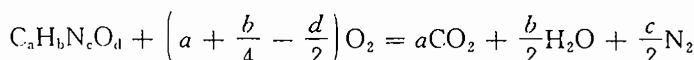
运用盖斯定律时,要求各反应途径都必须是在同样的条件下,即在$V=$const或$p=$const条件下进行的。

盖斯关于热效应与反应过程无关的理论,使我们有可能从一些比较容易精确测量的反应热效应(或者根据热化学表中所列的数据)计算出其他反应的热效应。如下,我们利用盖斯定律来计算各种热效应。

10.1.1 关于爆热的计算

在考虑爆热计算之前,先考虑炸药$C_aH_bN_cO_d$在氧中燃烧,计算它的燃烧生成热的情

彡。其反应为：



$$C_aH_bN_cO_d + \left(a + \frac{b}{4} - \frac{d}{2}\right)O_2 = aCO_2 + \frac{b}{2}H_2O + \frac{c}{2}N_2$$

为了计算 $C_aH_bN_cO_d$ 的生成热，我们设想该系统有三种状态：简单物质、炸药和氧、燃烧产物。如下将用 Q_{12}、Q_{23}、Q_{13}分别表示从某个状态转变到另一种状态的热效应，其反应流程图见图 10.2。

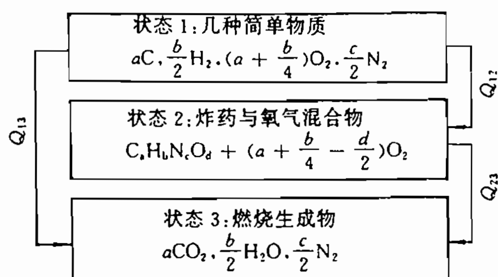


图 10.2 反应流程图

从上面的流程图看出，由状态 1 的简单物质转变成状态 3 的生成物，可以走两种途径或多种途径，概括起来：一是直接的；二是间接的。尽管殊途，但为同归，都生成同样的燃烧产物。根据盖斯定律，反应的热效应与经过何种途径无关，故

$$Q_{13} = Q_{12} + Q_{23}$$

由简单物质直接变成生成物的热量 Q_{13}，可从热化学表中查到，因在热化学表中从简单物质生成 CO_2 和 H_2O 的生成热是已知的，于是

$$Q_{13} = (a\text{ 倍的 }CO_2\text{ 生成热}) + \left(\frac{b}{2}\text{ 倍的 }H_2O\text{ 生成热}\right)$$

当然，由上面的流程图中可知这种反应中还有简单物质 N_2，但是它的生成热为零，见本章的附录 10.1。其实，在这个反应中 N_2 没有变化，故为零。

如果 $C_aH_bN_cO_d$ 的生成热已知（可以从热化学表中查到），即 Q_{12}已知，则该炸药的燃烧热 Q_{23}可按下式计算：

$$Q_{23} = Q_{13} - Q_{12} \tag{10.1}$$

如上是求解炸药燃烧生成热，但对于炸药爆炸的生成热亦可按(10.1)式来求（注意，爆炸生成热即爆热与燃烧生成热不同），可是须知炸药爆炸生成物的化学成分；若其成分已知便可从热化学表中查得各成分的生成热，从而得到 Q_{13}，于是该炸药的爆热 Q_{23}可求。

应该注意，热化学表中给出的生成热一般是在定压条件下，因此所求的 Q_{23}是定压生成热 Q_p，即 $Q_{23}=Q_p$. 然而炸药的爆炸过程非常接近于定容过程（因在爆炸完成之前爆炸产物尚来不及较大膨胀），因此，所谓**爆热一般是指定容爆热**，以 Q_v 表示．在 Q_p 已知的情况下，Q_v 按下式计算

$$Q_v = Q_p + \Delta n \cdot RT \tag{10.2}$$

其中 Δn 是反应前后气体组分的克分子(摩尔数)的改变量。若已知 $T=25°=298\text{K}$，$R=8.318\text{J/mol}\cdot$度，则上式写成

$$Q_v = Q_p + 2.478\Delta n(\text{kJ}) \tag{10.3}$$

式(10.2)或(10.3)是对于理想气体的。但实际上，即使有固体或液体物质参加，这样的关系式也成立。因为在这种情况下，与系统中气态组分的体积的变化相比，其由固体或液体物质的克分子数之改变所引起的体积变化可以忽略不计，也就是说在式(10.2)或

(10.3)中的改量 Δn 可看作只是反应的气态组分的克分子数的改变。

[例] 求 1 克分子的 TNT 炸药在标准条件下的爆热。

已知 TNT 炸药爆炸反应的近似方程为



$$2C_6H_2(NO_2)_3CH_3 = 5H_2O + 7CO + 7C + 3N_2 \qquad (10.4)$$

由于在爆炸瞬间所形成的温度很高,故反应所生成的水为气态。按上面所述,Δn 只是反应前后其气态成分的克分子数之差,所以由(10.4)式可知对于一克分子的 TNT 而言,Δn 为:

$$\Delta n = [(2.5 + 3.5 + 0 + 1.5) - 0] = 7.5(\text{克分子}) = 7.5(\text{mol})$$

于是(10.3)式写成

$$Q_v = Q_p + 18.6(\text{kJ}) \qquad (10.5)$$

现在来求 Q_p,由附录 10.1 可查得由简单物质生成 TNT、CO、H_2O、N_2 和固态 C 的生成热分别为:

$$\begin{cases} \text{TNT:} \quad 54.4\text{kJ/mol} = 13.0\text{kcal/mol} \\ \text{CO:} \quad 110.5\text{kJ/mol} = 26.4\text{kcal/mol} \\ H_2O\text{:} \quad 242.0\text{kJ/mol} = 57.8\text{kcal/mol} \\ N_2 \text{ 和固体 C:} \quad 0 \end{cases}$$

因此可求得由简单物质 C、O_2、H_2、N_2 生成爆炸产物的生成热 Q_{13} 为:

$$Q_{13} = 2.5 \times 242.0 + 3.5 \times 110.5 = 991.7(\text{kJ})$$

由上述那些简单物质生成 TNT 的生成热 Q_{12} 为

$$Q_{12} = 54.5(\text{kJ})$$

于是求得 Q_p 为

$$Q_p = Q_{23} = Q_{13} - Q_{12} = 937.2(\text{kJ})$$

整个求 Q_p 的过程可见图 10.3。

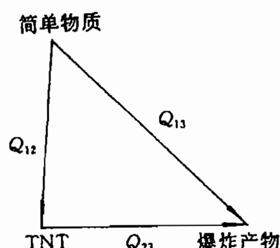


图 10.3

将上式代进(10.5)式中就求得一克分子 TNT 的爆热 Q_v 为:

$$Q_v = 937.2 + 18.6 = 955.8(\text{kJ})$$

1kg 的 TNT 的爆热 Q_v 为

$$Q_v = 955.8 \times \frac{1000}{227} = 4211(\text{kJ})$$

这个数值接近于实验值,见后面表 10.3. 在上式中的 227 为 TNT 的分子量,即 1 克分子(1mol)的质量为 227g。

爆炸反应方程式从理论上确定是相当复杂的,因为炸药在爆炸瞬间所发生的反应要受到爆炸时所形成的压力、温度、密度等因素的制约。如果这些条件发生变化,则生成的产物亦可能发生变化。因此,爆热的确定、爆轰产物组成的确定是与爆压和温度等因素交织在一起的。

在如上的计算中,往往会碰到另一个难题——炸药的生成热(上述的 Q_{12})缺乏可靠的数据。诚然,确定爆热的最可靠的办法是实验,然而并不是所有的炸药的爆热都可以通

过实验方法测量的。尤其对于尚未合成的炸药或者爆炸系统，若进行初步的理论设计或者估算时，就必须采用计算方法。为了克服获得生成热的困难，下面介绍一种直接计算炸药生成热的方法。

10.1.2　炸药生成热的计算

按照现代热化学理论，只要已知炸药分子的结构，就可计算出炸药的生成热。

把各种化合物的生成热或离解热加以比较之后，就会发现：每一个键都具有一定的能量，而且该能量在任何化合物中都比较稳定。这种键能的总和近似等于从自由原子组成化合物分子的生成能。

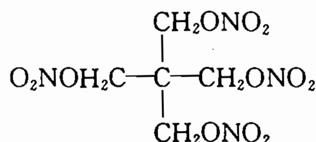
赛尔金（Я. К. Сыркин）比较了大量不同化合物的热化学实验数据，得到了表 10.1 的结果。

表 10.1 中所有的数据都是标准温度下的数据，通常仅适用于有机化合物中的共价键。借助于这些数据，不仅可求得自由原子形成各种有机化合物的生成热，而且可以求得简单物质，如固体石墨、气态 H_2、N_2、O_2 等，在标准状态下形成的生成热、燃烧热和化学反应热。生成热是对于气体状态计算出来的。

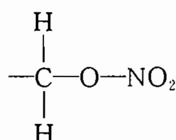
表 10.1　共价键的能量

键	能量(kJ)	键	能量(kJ)
H—H	429.5	C(=O)—OC （脂）	1368.8
C—H	358.2	C—N	224.0
C—C	262.8	C=N	351.6
C=C	423.5	N—N	113.0
C≡C(乙炔)	536.4	N=N	334.9
O—H	460.5	N≡N	711.6
O—O	146.5	N—H(NH_3)	348.7
O=O	489.8	N—O	255.3
C—O(醇和醚)	314.0	N=O	452.1
C=O(醛)	628.0	C—O—NO_2(硝酸脂)	1306
C=O(酮)	653.0	C—NO_2(硝基化合物)	1005
C=O(CH_2O)	602.8	N—NO_2	967
C(=O)—OH （HCOOH）	1456.8		
C(=O)—OH （其他酸）	1507.0		

现在我们利用表 10.1 来计算太安的生成热：



在太安结构中，中心的原子 C 与四个原子团（CH_2ONO_2）中的 C 各以一价键结合，即有四个 C—C 结合关系；而在每个 CH_2ONO_2 原子团中键的结构又呈为：



即在 $C(CH_2ONO_2)_4$ 结构中，又有八个 H—C 和四个 C—O—NO_2。因此，根据太安的分子结构可以求得一克分子太安的生成热 Q_a：

$$Q_a = 4 \times 262.8 + 8 \times 358.2 + 4 \times 1306$$
$$= 9140.8(\text{kJ/mol})$$

如上给出的太安炸药的生成热 Q_a 是对于由自由原子生成太安的生成热。

现在考虑由简单物质构成炸药的生成热 Q_s(注意 Q_s 与 Q_a 不同)。为此需求由原子 C、H、O、N 生成简单物质 C、H_2、O_2、N_2 的生成热。在这种情况中简单物质中的 C 虽然仍以单个原子存在，但是再由 C、H_2、O_2、N_2 生成炸药中的 C 必须升华(sublimation)，C 的升华热为：

$$-125\text{kcal/mol} = 523.2\text{kJ/mol}$$

在一个太安分子 $C(CH_2ONO_2)_4$ 中有 5 个"碳原子"、6 个"氧分子"、4 个"氢分子"和 2 个"氮分子"。因此要生成一克分子太安，则需要 5 克原子的升华碳、6 克分子的氧、4 克分子的氢和 2 克分子的氮。于是，由 C、H_2、O_2、N_2 构成一克分子太安时所需要的这些简单物质的生成热 $Q_\bullet$ 为如下诸量之和(根据表 10.1)：

$$Q_\bullet = 5 \times 523.2 + 6 \times 489.8 + 4 \times 429.5 + 2 \times 711.6 = 8695.0\ (\text{kJ/mol})$$

这样，根据以上两式便可求出由 C、H_2、O_2、N_2 这些简单物质构成太安炸药的生成热 Q_s：

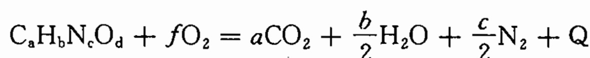
$$Q_s = Q_a - Q_\bullet = 444.5\ (\text{kJ/mol})$$

在这里必须指出，键能的和加性不是永远都可以观察到的，它受到物质的结构的限制。因此，在键能求和所得到的生成热有时与实验值有差别。如支链碳氢化合物的生成热总是大于相应的直链化合物的生成热。这样，由键能所求得的生成热有时需要做一定的修正。

10.1.3 爆热计算的经验方法

上面介绍的是计算爆热的间接办法，下面介绍一种直接计算爆热的经验方法。利用这一方法计算爆热时，只需给出炸药的分子式和生成热，而不必写出炸药的爆炸反应方程式(这往往是最难的，因为爆炸反应的生成物其成分是难以确定的。)。

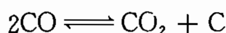
设一种炸药为 $C_aH_bN_cO_d$，若在空气中完全燃烧，则按如下反应方程式：



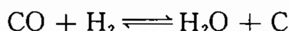
$$C_aH_bN_cO_d + fO_2 = aCO_2 + \frac{b}{2}H_2O + \frac{c}{2}N_2 + Q$$

$$f = a + \frac{b}{4} - \frac{d}{2}$$

如果炸药发生爆炸，其产物与燃烧的产物不同，如见(10.4)式，其中的 CO 还要发生二次反应：



$$2CO \rightleftharpoons CO_2 + C$$



$$CO + H_2 \rightleftharpoons H_2O + C$$

由于反应基本是向右进行的，所以 CO 基本变成 CO_2 和 H_2O。这样，在爆炸最终产物中

H_2O 和 CO_2 是肯定的。爆炸与燃烧另一个不同之点，是爆炸不能利用外界的氧气。

爆炸产物的总生成热被看做炸药的氧系数 A 的单值函数，A 定义作：

$$A = 2d/(4a + b) \tag{10.6}$$

当 A 值一定时，爆炸产物的最大生成热 Q_m 取决于最终产物中的 CO_2 和 H_2O 的含量。

当 $A \geqslant 1$ 时，炸药中含氧过多，生成的产物 CO_2 和 H_2O 取决于炸药中 H 和 C 的含量。从热化学表（见本章附录 10.1）可以查到 CO_2 和 H_2O 的生成热，由这两个生成热可求得 Q_m 为：

$$\begin{aligned} Q_m &= 94a + \frac{57.8}{2}b \quad (\text{kcal/mol}) \\ &= 393.5a + 121.0b \quad (\text{kJ/mol}) \end{aligned}$$

当 $A<1$ 时，炸药中含氧不足，生成 CO_2 和 H_2O 的多少取决于氧的含量，同时氧以供给生成 H_2O 为主，余下的氧才生成 CO_2，于是对于这种炸药的 Q_m 为：

$$\begin{aligned} Q_m &= 47\left(d - \frac{b}{2}\right) + \frac{57.8}{2}b = 47d + 5.4b \quad (\text{kcal/mol}) \\ &= 196.7d + 22.6b \quad (\text{kJ/mol}) \end{aligned}$$

实际上，CO_2 和 H_2O 在爆炸产物中的离解或多或少总是存在的，因此按上述方法所计算的 Q_m 比实际的生成热 Q 总是大一点。

爆炸产物的生成热 Q 和 Q_m 有如下关系

$$Q = 0.32A^{0.25}Q_m \tag{10.7}$$

而炸药的定容生成热 Q_s 已知，于是可利用（10.1）式求得炸药的爆热 Q_v

$$Q_v = 0.32A^{0.25}Q_m - Q_s \tag{10.8}$$

通过对于大量炸药爆热计算，结果表明：当 $A=12\%\sim115\%$ 时，按上式计算 Q_v 所造成的误差不超过 $0.5\%\sim3.5\%$。

10.1.4 提高炸药爆热的途径

提高炸药的爆热对于提高弹药的威力具有重要的实际意义。提高炸药爆热可从如下三个方面着手。

1. 改善炸药的氧平衡

所谓氧平衡，是指炸药中所含的氧量与所含的可燃元素之间的比例关系。

当炸药中的氧元素完全氧化可燃元素后还有剩余的炸药称为正氧平衡炸药；恰好使可燃元素完全氧化的炸药称为零氧平衡炸药；不足以将可燃元素完全氧化的炸药称为负氧平衡炸药。对于化学组成为 $C_aH_bN_cO_d$ 的炸药，可用式（10.6）所定义的氧系数 A 来表征：

当 $A>1$ 时，为正氧平衡炸药；

当 $A=1$ 时，为零氧平衡炸药；

当 $A<1$ 时，为负氧平衡炸药。

对于 $C_aH_bN_cO_d$ 炸药的氧平衡，有时也用氧平衡值 L 来表征，它定义为

$$L = \frac{16\left[d - \left(2a + \frac{b}{2}\right)\right]}{M} \tag{10.9}$$

式中的 M 为炸药的克分子量，而 16 为氧的克原子量。当：$L>0$ 为正氧平衡、$L=0$ 为零氧平衡、$L<0$ 为负氧平衡。

几种常用炸药的氧平衡值 L 列在表 10.2 中。

表 10.2　几种常用炸药的氧平衡值 L

炸药名称	分子式	分子量 M	L（%）
梯恩梯	$C_7H_5(NO_2)_3$	227	−74
黑索金	$C_3H_6N_3(NO_2)_3$	222	−21.6
太安	$C_5H_8(NO_3)_4$	316	−10.1
硝化甘油	$C_3H_5(NO_3)_3$	227	+3.5
硝酸铵	NH_4NO_3	80	+20.0

零氧平衡炸药爆炸时所生成的产物基本上是完全的氧化物，如为 H_2O 和 CO_2，其放热量最大，因此零氧平衡炸药具有较高的爆热。由于单位质量的氢被氧化成水所放出的热量最多，故含有氢元素多的零氧平衡炸药其爆热较高。由此可知，向正氧平衡炸药中加入适量的可燃物质对于提高爆热是有利的。

然而实验证明，对于零氧平衡炸药和正氧平衡炸药，并非所有的碳元素都被氧化成 CO_2，而会部分地生成 CO；同时这种炸药还生成少量的游离氧及氮的氮化物。因此零氧平衡炸药和正氧平衡炸药在爆炸瞬间所生成的产物，并不像理想那样为 H_2O、CO_2 和 N_2。这是由于在爆炸瞬间，这些产物成分之间还进行着二次反应的缘故。

2. 向炸药中加入部分金属粉

向炸药中加入部分能生成高热量氧化物的细金属粉末，如铝粉、镁粉、铍粉、钛粉等可提高爆热。实验证明，向黑索金中加进适量的铝粉，其爆热可提高 50%；加入适量的铍粉，其爆热可提高一倍多。

含有如上所述的金属粉的混合炸药中，其金属元素不仅能夺取氧化碳和水中的氧而生成金属氧化物，同时还可以与爆炸产物中的氮气反应成相应的金属氮化物，如



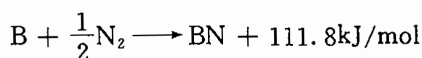
$$3Mg + N_2 \longrightarrow Mg_3N_2 + 463.4kJ/mol$$



$$Al + \frac{1}{2}N_2 \longrightarrow AlN + 241.1kJ/mol$$



$$3Be + N_2 \longrightarrow Be_3N_2 + 565.1kJ/mol$$



$$B + \frac{1}{2}N_2 \longrightarrow BN + 111.8kJ/mol$$

（注意，在如上各式中参加反应物质和生成物均按克分子或克原子计算）。这些反应都是剧烈放热反应，因此含氧量及含 N_2 量高的炸药加入上述的金属元素能够大大提高爆热。

3. 其它

对于负氧平衡炸药，提高装药密度，或者加进适量的高燃烧热的金属粉都可提高其炸药的爆热。

10.1.5　威力和猛度

1. 威力(power)

所谓威力，广义上讲是指炸药所具有的总能量。理论上，用炸药的做功能力来近似地

表示它。

炸药的爆炸过程是个高速化学反应过程，其过程的放热性是炸药可作为一种特殊能源的基础。如果常温常压下的炸药，在定容绝热（在炸药爆炸的一瞬间是接近于这种条件）的情况下爆炸，其反应放出的能量全部用于加热爆炸产物，使之产物达到高温高压状态，而后产物做绝热膨胀，于是温度压力随之下降，最后达到常温常压，在这整个过程中假定没有热量耗散，即释放出来的热量全部做了机械功。那么在这种前提下，就可根据热力学定律推算出：定容爆热 Q_v 与产物做功 W 之间的关系来。

设单位质量炸药的爆热为 Q_v，爆炸前的体积为 V_0、内能为 e_0；完全爆炸的一瞬间变成压力为 p_*、体积为 V_*、内能为 e_* 的理想气体。由于假定在爆炸瞬间是定容，即 $V_* = V_0$，故有

$$\begin{cases} Q_v = e_* - e_0 \\ e_* = \dfrac{1}{k-1} p_* V_* = \dfrac{1}{k-1} p_* V_0 \end{cases}$$

因为：

$$e_* \gg e_0$$

所以推得

$$p_* V_* = p_* V_0 \approx (k-1) Q_v \tag{10.10}$$

如果再假定炸药生成的爆炸产物作绝热等熵膨胀到压力为 p、体积为 V、内能为 e 的状态，则按能量守恒有：

$$W = e_* - e = \frac{1}{k-1}(p_* V_* - pV) \tag{10.11}$$

又因过程是等熵的，故有

$$pV^k = p_* V_*^k = p_* V_0^k \tag{10.12}$$

这样，从式(10.10)、(10.11)和(10.12)求得

$$W = \eta Q_v \tag{10.13}$$

其中，k 为绝热指数，而 η 定义如下

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_0}{V}\right)^{k-1} \tag{10.14}$$

式(10.13)明确地表示出炸药的做功能力与炸药的爆热的关系，做功随爆热的增大而增加；同时做功还与体积之比 V_0/V 有关，相对膨胀的体积越大，则做功也就越多。

表 10.3 几种常用炸药的最大做功值

炸药名称	W(单位:J/kg)
硝化甘油	643×10^4
太安	598×10^4
黑索金	556×10^4
梯恩梯	410×10^4
2#煤矿炸药	339×10^4
雷汞	179×10^4
叠氮化铅	157×10^4

表 10.3 列出了几种常用炸药的最大做功能力，表中所列的为 1kg 炸药爆炸后膨胀到常压时，所做的功。由表中数据可知，起爆药雷汞和叠氮化铅的最大做功能力要比单质猛炸药或工业混合炸药的最大做功能力小得多。

2. 猛度(violence)

炸药的威力仅仅表示它具有的最大做功能力而已，它还不能决定炸药的爆炸效应。有

时，两种威力相同的炸药，可是它们对于邻近的介质的局部破坏效应却差异很大。就是同一种炸药，若药量相同而装药密度不同，它们对邻近介质的局部破坏也不同。因此光有炸药威力的数值还不够，还必须有表征对近区介质破坏效应的概念——猛度。

所谓猛度，是指炸药对装药邻近介质局部破坏作用的能力，这种效应是爆炸产物猛烈冲击周围介质的直接结果。随着离爆炸距离的增大，这种机械效应因爆轰产物的压力等的急剧下降而迅速减弱。因此，猛度与爆炸压力有密切关系，爆炸压力越大的炸药，其猛度就越大；反之，猛度就越小。炸药的爆炸压力是随爆速和炸药的密度增加而增加的，当然爆速本身也与密度有关(密度增加则爆速增加)，因此炸药密度对爆炸压力或猛度的影响比较显著，所以如若减轻破坏，严格控制装药密度是至关重要的。

炸药的威力与猛度虽属于两个不同的概念，以至于所指的作用效应有区别，但仍有其内在联系。一般说来，对于单质炸药，威力大的，其猛度也大。与单质炸药相比，混合炸药虽有较大的威力，但其猛度并不一定高，这是因为威力主要取决于爆热与体积比，而猛度则主要取决于爆压。在爆炸压接中，根据接头的尺寸、结构和材料而要适当地考虑所用炸药的威力和猛度。

10.2 爆轰波(爆燃波)的基本守恒关系式

按照C－J理论，不管是爆轰波(或爆炸波)还是爆燃波，都看成一个包含化学反应的强间断几何面，它与没有化学反应的一般介质中传播的冲击波之唯一的差别是在其内能函数的依赖关系式上。

在无化学反应的介质中比内能函数 e 只依赖两个状态参量：压力 p 和比容 V，即

$$e = e(p,V) \tag{10.15}$$

在有化学反应的介质中，如果将化学反应的进展度变量 λ 纳入内能的函数之中，则比内能 E 的函数依赖关系为：

$$E = E(p,V,\lambda) \tag{10.16}$$

在这里 λ 不一定只代表一个变量。用几何语言讲，λ 可以看成具有多个分量的“矢量”，现不妨将它作为标量。式(10.16)在图10.1所示反应区 $AABB$ 中适用，在该区域的右边界上反应刚刚开始，即在$\overline{AA}$上：$\lambda=0$，于是在$\overline{AA}$线上比内能为

$$E = E(p_+,V_+,0) = E_+ \tag{10.17}$$

在反应区的左边界上反应结束，即在$\overline{BB}$上：$\lambda=1$，于是在$\overline{BB}$上比内能为

$$E = E(p_-,V_-,1) = E_- \tag{10.18}$$

现把爆轰波阵面作为一个强间断的几何面(假定波阵面区厚度为零)。这样，我们完全按§7.7的做法导出强间断面两边的物理量的关系式(参见(7.58)式)：

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_+ (D-u_+) = \rho_- (D-u_-) \\
&p_+ + \rho_+ (D-u_+)^2 = p_- + \rho_- (D-u_-)^2 \\
&E - E_+ = \frac{1}{2}(p_- + p_+)(V_+ - V_-)
\end{aligned}\right\} \tag{10.19}$$

其中，D 为爆轰波阵面的传播速度(即爆速)，u 为爆轰产物的速度，其他符号如前面在§7.6中所定义的。

在研究气体混合炸药的爆轰和爆燃时，往往将气体近似作理想气体（即气体动力学中所谓的完全气体）；对于凝聚炸药在反应开始后亦基本作如此近似，于是带有化学反应的产物气体之比内能可以写成和加形式

$$E = E(p, V, \lambda) = e(p, V) - \lambda Q_v \tag{10.20}$$

其中，Q_v 为单位质量炸药的化学转化能，一般可以近似取成定容爆热。

利用(10.20)、(10.17)、(10.18)式，可将式(10.19)写成（对于化学反应结束的状态）：

$$\left.\begin{aligned} \rho_+ (D - u_+) &= \rho_- (D - u_-) \\ p_+ + \rho_+ (D - u_+)^2 &= p_- + \rho_- (D - u_-)^2 \\ e_- - e_+ &= \frac{1}{2}(p_- + p_+)(V_+ - V_-) + Q_v \end{aligned}\right\} \tag{10.21}$$

上式便是常用的爆轰或爆燃波阵面上的守恒关系式。

如下简单地讨论一下穿过爆轰或爆燃波阵面之后的物理量。

将(10.21)的第二式改写，再利用第一式，则有

$$\begin{aligned} p_- - p_+ &= \rho_+ (D - u_+)^2 - \rho_- (D - u_-)^2 \\ &= \rho_+ (D - u_+)(u_- - u_+) \\ &= \rho_- (D - u_-)(u_- - u_+) \end{aligned} \tag{10.22}$$

将(10.21)的第一式改写成

$$V_- (D - u_+) = V_+ (D - u_-)$$

再将两边同减去 $V_+(D-u_+)$，则有：

$$(u_- - u_+) = -\rho_+ (D - u_+)(V_- - V_+)$$

将上式代进(10.22)式中，则给出：

$$\frac{p_- - p_+}{V_- - V_+} = -\rho_+^2 (D - u_+)^2 = -\rho_-^2 (D - u_-)^2 \tag{10.23}$$

由(10.23)式看出，这种带化学化应的强间断面上，其压力和比容变化方向相反（即压力和密度变化方向相同，要么同时增加，要么同时减小）。显然，对于穿过强间断面时压力增加、比容减小（即密度增加）的情形对应着爆轰波；对于穿过强间断面时压力减小而比容增加（即密度减小）的情形则对应着爆燃波。从(10.23)式得知，绝不会出现压力和比容同时增加或者同时减小的情况。如果将这种强间断面之前的状态固定，而研究其间断面之后的状态随条件的变化，情况如何呢？为此，将由状态 p_+、V_+出发的所有终态表示在(p_-, V_-)平面上，见图 10.4。在该图上：

Ⅰ区和Ⅲ区是不可能出现，因这与(10.23)式矛盾。Ⅱ区对应着爆轰终态；Ⅳ区对应着爆燃终态。

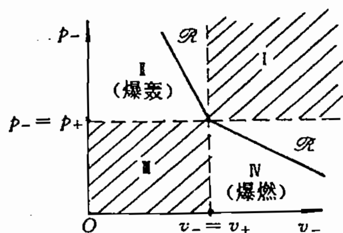


图 10.4 在(p_-, V_-)平面上所表示的爆轰和爆燃所对应的终态区域

由(10.23)式还可以看出，如果波前的状态给定，波速 D 亦给定，则该式在(p_-, V_-)平面上表示一条直线，该直线称作瑞利线(Rayleigh line)，也有人称作米海里逊直线(Михалъсоп линия)。该直线过

(p_-, V_-)平面的点(p_+, V_+)，其斜率为

$$-\rho_+^2 (D - u_+)^2$$

它为如图10.4所示的直线$\mathscr{R}$。

10.3 雨贡纽曲线·C—J条件

10.3.1 雨贡纽曲线

上节给出了联系化学反应区的初态和终态的关系式，即给出了爆轰或爆燃波阵面上的守恒关系式(10.21)。

现在如果我们考虑炸药从初态反应到任一状态$(p、V、u)$，这时联系初态与该状态的普遍形式的关系式(它包括了(10.21)式)为

$$\left.\begin{aligned} &\rho_+ (D - u_+) = \rho(D - u) \\ &p_+ + \rho_+ (D - u_+)^2 = p + \rho(D - u)^2 \\ &e - e_+ = \frac{1}{2}(p + p_+)(V_+ - V) + \lambda Q_v \end{aligned}\right\} \tag{10.24}$$

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad e = e(p, V)$$

由上式的头两式可给出与(10.23)同样形式的关系式：

$$\frac{p - p_+}{V_+ - V} = \rho_+^2 (D - u_+)^2 = \rho^2 (D - u)^2 \tag{10.25}$$

上式当然亦是瑞利线。

(10.24)的最后一式称作**带有化学转化能的雨贡纽方程**，将它表示在(p,V)平面上称作**雨贡纽曲线**(Hugoniot curve)，见图10.5，随着λ的变化，将在(p,V)平面上呈现一系列曲线。

图10.5 带有化学转化能的雨贡纽曲线

图中的曲线$\overset{\frown}{N_0G_0}$对应着$\lambda=0$，该曲线为冲击波的雨贡纽曲线。曲线$\overset{\frown}{NG}$对应着$\lambda=1$，即对应终态，该曲线的$\overset{\frown}{AG}$段对应着爆轰波，它称作**爆轰波的雨贡纽曲线**；而$\overset{\frown}{NG}$的$\overset{\frown}{NB}$段对应着爆燃波，它称作**爆燃波的雨贡纽曲线**；$\overset{\frown}{BA}$段没有意义，因为现实不存在p和V同时增加的过程。

10.3.2 C—J条件

对于爆轰波，式(10.24)给出了三个守恒关系，如果其波前的状态量和比内能函数$e=e(p,V)$已知，则式(10.24)中余下$p、V、u$和D未知，于是如同激波一样，波后的状态似乎是不确定的。但实则不然，实际上存在不受外界干扰的稳定爆轰(即一般所谓的"爆轰"，现在"爆轰"之前又加上"稳定"二字是为了强调，以下同此)，即在$p_+、V_+、u_+$和$e=e(p,V)$已知的情况下，$u、p、V$和D是完全确定的量。因此对于稳定爆轰而言，除(10.24)

式外，还存在另外一个关系式——这就是恰普曼-儒格条件（Chapman-Jouguet condition），简称C—J条件。

C—J条件：爆轰波若保持稳定的传播，则爆轰反应产物之终态在(p,V)平面上对应着雨贡纽曲线与瑞利线相切之点，即对应图10.6中的H点。

按图所示，图中的α显然满足

$$\tan\alpha = \frac{p - p_+}{V_+ - V} \tag{10.26}$$

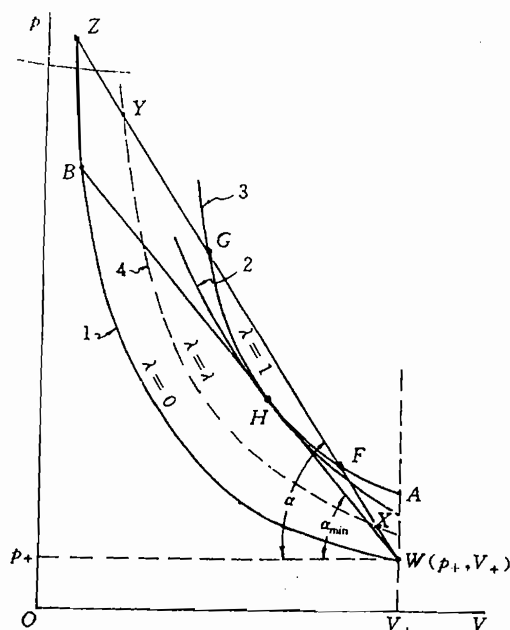


图10.6 爆轰过程中的几条重要曲线

1—冲击波的雨贡纽曲线（$\lambda=0$）；2—通过状态点H的等熵线；

3—爆轰波的雨贡纽曲线（$\lambda=1$）；4—爆轰反应过程中的雨贡纽曲线（$\lambda=\lambda$）

于是瑞利线(10.25)式可以写成

$$D - u_+ = V_+\sqrt{\tan\alpha} \tag{10.27}$$

$$D - u = V\sqrt{\tan\alpha} \tag{10.28}$$

图中的状态点H，亦称作C—J点，过该点的瑞利线倾角α其值最小；且该点所对应的爆轰速度等于爆轰产物中小扰动的传播速度，即有

$$\alpha = \alpha_{\min} \tag{10.29}$$

$$D = u_H + a_H \tag{10.30}$$

下标H表示在C—J点上的取值，a_H为该状态下的音速。

由(10.30)式清楚地看出，之所以在C—J条件下出现稳定爆轰，即$D=\text{const}$，是由于爆轰波阵面之后的稀疏扰动刚好追上爆轰波阵面，而不是超过它，因此可以保证爆轰波阵

面的化学反应区不受侵扰，从而使爆轰波达到稳定、自持传播。

现在证明(10.30)式成立，为此先证在C—J点熵值最小。根据(10.24)的第三式以及$e=e(p,V)$，则可将e和p均看做一个单变量V的函数，因而将式(10.24)微分则得到

$$\mathrm{d}e = \frac{1}{2}[(V_+ - V)\mathrm{d}p - (p + p_+)\mathrm{d}V] \tag{10.31}$$

由热力学第一定律

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}e + p\mathrm{d}V \tag{10.32}$$

它在雨贡纽曲线上当然亦成立。在上式中S为比熵(specific entropy)。将式(10.31)代进上式中，则有

$$\begin{aligned} T\mathrm{d}S &= \frac{1}{2}[(V_+ - V)\mathrm{d}p - (p + p_+)\mathrm{d}V] + p\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\left[(V_+ - V)^2\mathrm{d}\left(\frac{p - p_+}{V_+ - V}\right)\right] \end{aligned}$$

将(10.26)式代进上式中，经整理则给出

$$T\mathrm{d}S = \frac{(V_+ - V)^2}{2}\left[1 + \left(\frac{p - p_+}{V_+ - V}\right)^2\right]\mathrm{d}\alpha$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}V} = \frac{(V_+ - V)^2}{2T}\left[1 + \left(\frac{p - p_+}{V_+ - V}\right)^2\right]\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}V} \tag{10.33}$$

由此看出，沿爆轰波的雨贡纽曲线$\mathrm{d}S/\mathrm{d}V$与$\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}V$变化一致。而在C—J点即图10.6所示的切点$H$处，$\alpha$的取值最小，即在$H$点：

$$\alpha = \alpha_{\min}, \quad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}V} = 0$$

从而推出在H点：

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}V} = 0, \quad S = S_{\min} \tag{10.34}$$

如下证明在H点处等熵线(isentropics)与爆轰波的雨贡纽曲线相切。由于作为状态量之间有如下关系

$$p = p(V, S)$$

现考虑沿(p,V)平面上的雨贡纽曲线，故上式中的S又作为V的函数，于是上式写作

$$p = p(V, S) = p(V, S(V))$$

因此沿雨贡纽曲线则有：

$$\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right|_H = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V \cdot \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}V} \tag{10.35}$$

再据(10.34)式，则推出

$$\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right|_H = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S$$

即过H点的等熵线与过该点的雨贡纽曲线相切(实际上是二级密接，见§7.7中的7.7.4部分)。而过该点的直线$\overline{WH}$又与雨贡纽曲线相切，于是在H点则有

$$\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right|_H = \frac{p_H - p_+}{V_H - V_+} = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S$$

直线$\overline{WH}$就是一条瑞利线，因而根据(10.25)式，在 H 点有

$$\rho_H^2(D - u_H)^2 = -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S \tag{10.36.1}$$

按音速的定义

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S$$

从而得到

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho} = -\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = -V^2\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S \tag{10.36.2}$$

因此由(10.36.1)式和上面式子可以推出在 H 点有

$$\rho_H^2(D - u_H)^2 = \rho_H^2 a_H^2$$

即有

$$D = u_H + a_H \tag{10.37}$$

于是(10.30)式得以证明。

10.4 爆轰波阵面内反应区的状态

按照 C－J 假设，爆轰波阵面是个带有化学反应的几何面，实际的爆轰波阵面是有一定的厚度，它的细微结构如图 10.1(b)所示，开头为激波压缩区，之后为化学反应区，这两个区以同样的速度向前传播，这就是所谓的 ZND 模型，该模型是爆轰波阵面真实结构的一种很好近似。化学反应区的宽度比冲击波的厚度大数倍以上，这是由于化学反应的持续时间取决于完成一次基本反应所必需的平均碰撞次数 n，而 $n \gg 10^3$。

冲击波先对原始炸药迅速冲压，但由于过程迅速，被压缩的炸药还来不及反应，在这个冲击波阵面之后化学反应才开始，反应需要持续一段时间，即有一个化学反应区，在化学反应区与爆轰产物区之分界上反应结束。化学反应要放出能量，这就引起反应区温度的升高及产物的膨胀，因而在反应区结束的边界上的压力比反应区开始处的压力低。

从爆轰波阵面前原始炸药的状态(p_+、V_+、u_+)到反应区中任一截面上的状态(p、V、u)，即反应进展度 λ 从 $\lambda=0$ 到 $\lambda=\lambda$，这时两个状态间满足式(10.24)，当然亦满足式(10.25)，即有

$$\rho_+^2\,(D - u_+)^2 = \frac{p - p_+}{V_+ - V} \tag{10.38}$$

由于爆轰过程是稳定的，因此整个反应区和这个区中任一截面上的状态都以同样的速度移动，否则爆轰波在传播过程中就会有形变而失去稳定。由于这种原因，不管考虑反应区的哪个截面上的状态，即不管 λ 取何值，D 都不变，即 $D=\text{const}$，所以从爆轰波前的原始状态到爆轰波阵面之后的产物状态所经历的所有的中间状态，都在同一条瑞利线上，即式(10.38)对于同一个爆轰过程的各状态而言，它在(p,V)平面上保持为直线型。

① 对于爆轰的稳定过程，爆轰波阵面内部的状态变化是：冲击波将原始炸药压缩到 B 点所示的状态，见图 10.6，而后随着化学反应的放热和膨胀其动态变化的状态沿$\overline{BW}$逐

渐变化到 H 点状态，在 H 点反应结果，在这里 $D=u_H+a_H$.

在爆轰波阵面之内的压力和密度的变化，如图 10.7 所示，关于图中 p_B、ρ_B 的大小，下节的估算。

② 如果冲击波更强，即它的传播速度 D_* 大于稳定状态爆速 D，这时炸药从 W 点状态被压缩成 Z 点的状态，见图 10.6，然后沿直线 $\overline{ZW}$ 逐渐变化到终态点 G，爆轰波阵面的状态(一般把波阵面内反应结束时的状态，称为爆轰波阵面上的状态)处于 G 点是不稳定的。因这时爆轰波阵面的速度 D_* 小于它之后的稀疏波速度：

$$D_* < u_G + a_G \qquad (10.39.1)$$

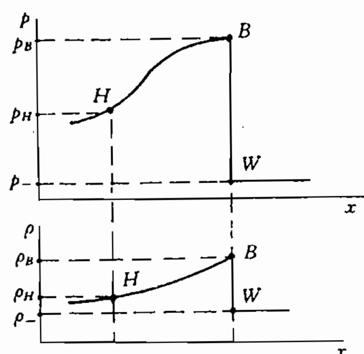


图 10.7　爆轰波阵面内的压力和密度分布

从而使得化学反应区受到稀疏波的侵扰，致使爆轰衰减。除非爆轰波阵面之后的产物中不产生稀疏波，然而这又是办不到的。

假若由于某种原因使得爆轰波阵面上的状态处于图 10.6 所示的 F 点，这时有

$$D_* > u_F + a_F \qquad (10.39.2)$$

这意味爆轰波阵面的反应区结束处之传播速度落后于爆轰波的传播速度，从而使反应区逐渐加宽能量分散，以至于反应区内释放的能量不能很好地向其开头的冲击波传递，结果造成爆轰波的强度及传播速度的衰减。因此，处于 F 点状态的爆轰不会稳定地传播下去

关于(10.39.1)和(10.39.2)式的证明如下：

由(10.24)的第三式推出在爆轰波区内反应到任一状态($\lambda=\lambda$)时，有

$$de = \frac{1}{2}[(V_+ - V)dp - (p + p_+)dV] + Q_v d\lambda$$

再利用热力学第一定律(10.32)式，则得到

$$2T\frac{dS}{dV} = (V_+ - V)\frac{dp}{dV} + (p - p_+) + 2Q_v\frac{d\lambda}{dV} \qquad (10.40.1)$$

据(10.25)式则推出沿瑞利线 $\overline{WZ}$(见图 10.6)有

$$\frac{dp}{dV} = -\rho_+^2(D - u_+)^2 \equiv \frac{p - p_+}{V - V_+} = -\rho^2(D - u)^2 \qquad (10.40.2)$$

推出上式时利用了沿一条瑞利线 $D=\text{const}$ 的条件。将上式代进(10.40.1)式中，则给出在一条瑞利线与反应区中的一条雨贡纽曲线($\lambda=\lambda$)的交点 X 或 Y 上有

$$\frac{dS}{dV} = 2Q_v\frac{d\lambda}{dV} \qquad (10.40.3)$$

沿瑞利线 $\overline{ZG}$ 段，λ 随 V 的增加而增加，于是从上式推出在 Y 点以至于在 G 点上：

$$\left.\frac{dS}{dV}\right|_Y > 0,\quad \left.\frac{dS}{dV}\right|_G > 0 \qquad (10.40.4)$$

沿 $\overline{FW}$ 段，λ 随 V 的增加而减少，于是由(10.40.3)式推出在 X 点以至于在 F 点上：

$$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}V}\right|_X < 0, \quad \left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}V}\right|_F < 0 \tag{10.40.5}$$

因 $p=p(V,S)$，故沿(V,p)平面上某一条曲线如瑞利线则有 $S=S(V)$，所以有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}V}\right)$$

再利用(10.36.1)和(10.40.2)式，可由上式推出

$$\rho^2(D-u)^2 = a^2\rho^2 - \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}V} \tag{10.40.6}$$

而

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V = \frac{k_T \eta T}{C_V} > 0 \tag{10.40.7}$$

其中，k_T——等温体积模量，η——体膨胀系数，T——温度，C_V——等容比热。关于(10.40.7)式的证明，可参见如文献[3]中的163页和170页，这里从略。

由(10.40.6)、(10.40.7)和(10.40.4)式可以推出在 G 点有下式成立

$$\rho^2(D-u)^2 < \rho^2 a^2$$

从而推出：

$$\rho^2(D-u-a)(D-u+a) < 0$$

即有

$$D < u + a \tag{10.41.1}$$

即(10.39.1)式成立。

由(10.40.6)、(10.40.7)和(10.40.5)式可以推出在 F 点有下式成立

$$\rho^2(D-u)^2 > \rho^2 a^2$$

从而推出：

$$\rho^2(D-u-a)(D-u+a) > 0$$

即有

$$D > u + a \tag{10.41.2}$$

即(10.39.2)式成立。

10.5 多方气体爆轰波阵面上物理量的计算

描述爆轰特性有以下几个重要参量：p_H、ρ_H、T_H、u_H 和 D，这些物理量的确定要根据爆轰波阵面上的守恒方程、状态方程和C—J条件。

在研究混合气体爆轰时，往往都把这种气体及其反应后的产物气体不但看做理想气体(即完全气体)，而且作为多方气体，对于多方气体：

$$\left.\begin{aligned} p &= \rho R T \\ p &= A\rho^k \\ e &= \frac{1}{k-1}pV \end{aligned}\right\} \tag{10.42}$$

其中 R 为气体常数，A 为熵 S 的函数 $A=A(S)$，k 为绝热指数，它是定压比热 C_p 与定容比热 C_V 之比，即

$$k = C_p/C_V = 1 + \frac{R}{C_V} \tag{10.43}$$

k 值对于混合爆炸气体与其所生成的产物气体一般是不同的，但是为了处理方便，通常地假定 k 值相同，即

$$k_+ = k_H = k = \text{const} \tag{10.44}$$

按 C—J 条件：

$$D = u_H + a_H, \quad a_H = \sqrt{\frac{kp_H}{\rho_H}} = \sqrt{kp_H V_H} \tag{10.45}$$

将(10.24)和(10.42—10.45)式归纳起来则有

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_+ (D - u_+) = \rho_H(D - u_H) \\
&p_+ + \rho_+ (D - u_+)^2 = p_H + \rho_H(D - u_H)^2 \\
&\frac{1}{k-1}(p_H V_H - p_+ V_+) = \frac{1}{2}(p_H + p_+)(V_+ - V_H) + Q_V \\
&p_H = \rho_H R T_H \\
&D = a_H + u_H = \sqrt{kp_H V_H} + u_H
\end{aligned}\right\} \tag{10.46}$$

如上共五个方程，有五个未知量：p_H、$\rho_H(V_H)$、u_H、T_H 和 D，所以方程组封闭。

10.5.1 方程组的解

为了求解方程组(10.46)，需要做一些代换。由该式的头两式可以得到

$$\rho_+^2 (D - u_+)^2 = \rho_H^2(D - u_H)^2 = \frac{p_H - p_+}{V_+ - V_H} \tag{10.47}$$

利用上式再结合(10.46)的第五式，得到

$$D - u_+ = V_+ \sqrt{\frac{p_H - p_+}{V_+ - V_H}} \tag{10.48}$$

$$u_H - u_+ = (V_+ - V_H) \sqrt{\frac{p_H - p_+}{V_+ - V_H}} \tag{10.49}$$

$$\frac{p_H - p_+}{V_+ - V_H} = \frac{kp_H}{V_H} \tag{10.50}$$

由(10.50)式得到：

$$V_+ / V_H = \frac{k+1}{k} - \frac{p_+}{kp_H} = \frac{(k+1)p_H - p_+}{kp_H} \tag{10.51}$$

将上式代进(10.48)式中，并令

$$\theta = D - u_+ \tag{10.52}$$

则得到：

$$\theta^2 = V_+ [(k+1)p_H - p_+] \tag{10.53}$$

将(10.46)的第三式与(10.51)和(10.52)式联立求解，得到

$$\theta = \sqrt{\frac{k^2-1}{2}Q_V + a_+^2} + \sqrt{\frac{k^2-1}{2}Q_V} \tag{10.54}$$

即有

$$D=\sqrt{\frac{k^2-1}{2}Q_V+a_+^2}+\sqrt{\frac{k^2-1}{2}Q_V}+u_+ \tag{10.55}$$

其中

$$a_+^2=kp_+V_+=kp_+/\rho_+ \tag{10.56}$$

在爆速 D 即 θ 求得后，利用(10.53)、(10.51)和(10.49)式可以求出：

$$\left.\begin{aligned}p_H-p_+&=\frac{\rho_+\theta^2}{k+1}\left(1-\frac{a_+^2}{\theta^2}\right)\\V_+-V_H&=\frac{V_+}{k+1}\left(1-\frac{a_+^2}{\theta^2}\right)\\u_H-u_+&=\frac{\theta}{k+1}\left(1-\frac{a_+^2}{\theta^2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{10.57}$$

将 p_H、V_H 代进(10.46)的第四式则给出：

$$T_H=\frac{p_HV_H}{R}=\frac{(k\theta^2+a_+^2)^2}{k(k+1)^2R\theta^2} \tag{10.58}$$

只要给出 Q_V 以及 k 值，便可由式(10.54)、(10.55)、(10.57)和(10.58)求得爆轰波阵面上的量：p_H、$V_H(\rho_H)$、u_H、T_H 和 D，然而 k 并不是常数，严格讲它是温度 T_H 的函数，所以如上所给出的解并不是显式解。不过，在一般的应用中均假定 k 为常数，正如前面所做的，见(10.44)式，于是这些解式还是显式的。

10.5.2 对于强爆轰波

所谓强爆轰波，是指 $p_H\gg p_+$，这对于一般的爆轰均满足此种条件。如下考虑这种爆轰波，且假定炸药原处于静止 $u_+=0$.

由于 $p_H\gg p_+$，因此由(10.51)式得到

$$V_+/V_H=\rho_H/\rho_+=\frac{k+1}{k} \tag{10.59}$$

由能量方程，即(10.46)的第三式，略去 p_+，再利用上式，得到

$$p_H=2(k-1)\rho_+Q_V \tag{10.60}$$

把如上两式代进(10.48)式中，考虑到 $u_+=0$，并忽略 p_+，就得到

$$D=\sqrt{2(k^2-1)Q_V} \tag{10.61}$$

上式正是(10.55)式中 $u_+=0$ 并略去 a_+^2 的情形。在(10.49)式中略去 p_+，并考虑到 $u_+=0$，再利用(10.59)和(10.60)式则得到

$$u_H=\sqrt{\frac{2(k-1)}{k+1}Q_V} \tag{10.62}$$

由(10.46)的第四式可求出

$$T_H=\frac{2k(k-1)}{(k+1)R}Q_V \tag{10.63}$$

式(10.59)～(10.63)便是在静止炸药中强爆轰波阵面上的参量。

在具体计算如上参量时要注意：

① Q_V 是单位质量爆药的转化能，一般将它取作爆热 Q_V^*，爆热的单位一般是kcal/kg，

而在以上诸式中 Q_V 的单位通常为 m^2/s^2，这两个量值之间存在以下换算关系(如若 Q_V^* 的单位是 kcal/kg 的话)，即

$$Q_V = 4189 Q_V^* (m^2/s^2) \tag{10.64}$$

② 气体常数 R，它与普适气体常数(universal gas constant)R_* 之间的关系为

$$R_* = M_H R, \quad R_* = 8.31 J/mol \cdot K$$

气体常数 R 与物理单位有关，从(10.63)式看出，若 Q_V 取每千克的能量，则 R 亦应对应于每千克，因此有

$$R = \frac{1000}{M_H} R_* = 8.31 \times 10^3 / M_H (m^2/s^2 \cdot K) \tag{10.65}$$

其中 M_H 为爆轰产物的平均摩尔(克分子)质量。

利用(10.65)式可将(10.63)式写成

$$T_H = 1.2 \times 12^{-4} \cdot \frac{2k(k-1)}{(k+1)} M_H Q_V \quad (K) \tag{10.66}$$

把上式与(10.61)式结合起来，可以得到爆轰波阵面上的温度 T_H 与爆速之间的关系

$$D = \frac{k+1}{k} \sqrt{\frac{8310k}{M_H} T_H}$$

③ T_H 与爆温 T_* 不同，二者之间的关系可利用下式和(10.63)式得到

$$Q_V = C_V T_*, \quad C_V = \frac{1}{k-1} R \tag{10.67}$$

$$T_H = \frac{2k}{k+1} T_* \tag{10.68}$$

强爆轰波阵面上参量的另一种形式，通常用爆速来换算成表示爆轰波阵面上的物理量，这是因为爆速往往不是直接由(10.61)式算出来的，而是测出来的。利用(10.61)式可将(10.60)、(10.62)、(10.63)式改写，现把强爆轰波阵面诸参量新的表达式综合如下：

$$\left.\begin{aligned} D &= \sqrt{2(k^2-1)Q_V} = \sqrt{8378(k^2-1)Q_V^*} \ (m/s) \\ \rho_H &= \frac{k+1}{k} \rho_+ \\ p_H &= \frac{1}{k+1} \rho_+ D^2 \\ u_H &= \frac{1}{k+1} D \\ T_H &= \frac{kD^2}{(k+1)^2 R} = 1.2 \times 10^{-4} \frac{k}{(k+1)^2} M_H D^2 \quad (K) \end{aligned}\right\} \tag{10.69}$$

将(10.57)式和(10.58)式中的 a_+/θ 项略去，并令 $u_+=0$，就会得到上式。(在上式中，Q_V^* 的单位为 kcal/kg)

10.5.3 爆轰波阵面的化学反应区中最高压力

按 ZND 模型，爆轰波阵面是一个冲击波后跟一个化学反应区，显然这个冲击波上的压力 p_B 和密度 ρ_B 最高，大于爆轰波阵面(化学反应区结束处)上的压力 p_H 和密度 ρ_H。

根据多方气体的冲击波关系式(7.68)的第二式，当波前 $u_+=0$ 时，则有

$$p_B - p_+ = \frac{2}{k+1}\rho_+ D^2\left(1 - \frac{a_+^2}{D^2}\right) \tag{10.70}$$

由于假定爆轰是稳定的，所以冲击波速 D 就是爆轰波速度。

对于爆轰波阵面上的压力，在 $u_+=0$ 时由式(10.57)的第一式得到

$$p_H - p_+ = \frac{1}{k+1}\rho_+ D^2\left(1 - \frac{a_+^2}{D^2}\right) \tag{10.71}$$

由以上两式推出

$$\frac{p_B - p_+}{p_H - p_+} = 2 \tag{10.72}$$

对于强爆轰，上式中 p_+ 可以略去，于是推出

$$p_B \approx 2p_H \tag{10.73}$$

这些结果再次表明，爆轰波阵面的反应区中因放热，而出现产物膨胀现象，故反应区后产物的压力 p_H 比冲击波压缩炸药的压力 p_B 几乎小一半，从而说明化学峰(chemical peak)的存在。

由(7.68)式和(10.57)式的第二式可推出

$$V_B = 2V_H - V_+ \quad 或 \quad \frac{1}{\rho_B} = \frac{2}{\rho_H} - \frac{1}{\rho_+} \tag{10.74}$$

10.5.4 一些计算结果

根据如上公式，可以计算爆轰波阵面上的参量，表 10.4 列出了儒格计算的某些气体混合爆炸物的爆轰波参数。

表 10.4 在混合气体中的爆轰波参数

气体混合物	T_H(K)	ρ_H/ρ_+	p_H/p_+	爆速 D(m/s)	
				计算值	实测值
$2H_2+O_2$	3960	1.88	17.5	2630	2819
CH_4+2O_2	4080	1.90	27.4	2220	2257
$2C_2H_2+5O_2$	5570	1.84	54.5	3090	2961
$(2H_2+O_2)+5O_2$	2600	1.79	14.4	1690	1700

虽然儒格当年计算时所用的气体热容量与温度关系的数据不太精确，但是计算的爆速与实测的爆速之符合程度仍令人满意。

路易斯(Lewis)等人对含有杂质的爆鸣气体做了类似的计算，在计算中分别考虑了爆轰产物瞬时离解度与不计产物分解度的两种情况，现把计算结果列在表 10.5 中。由表中数值可知，考虑了产物中的离解情况时的理论计算值与实测结果符合得较好。

由如上结果得出，应用爆轰的流体力学理论对气体混合物的爆轰波参数进行理论计算所得到的结果，同测量值一致这一事实这说明了 C—J 假设的合理性以及它在理论上和实际应用上的重要意义。当然，如果对爆轰过程做更精细的研究，C—J 理论是不够的。

表 10.5　含有各种杂质的爆鸣气体的爆轰波参数

气体混合物	p_H/p_+	ρ_H/ρ_+	$u_H(m/s)$	$T_H(K)$	D的计算值(m/s)		D的实测值(m/s)
					未考虑离解	考虑离解	
$2H_2+O_2$	18.05	1.773	1225	3583	3278	2806	2819
$2H_2+O_2+N_2$	17.37	1.779	1040	3367	2712	2378	2409
$2H_2+O_2+3N_2$	15.63	1.748	870	3003	2194	2033	2055
$2H_2+O_2+5N_2$	14.39	1.754	797	2685	1927	1850	1822
$2H_2+O_2+O_2$	17.4	1.786	1013	3390	2630	2302	2319
$2H_2+O_2+3O_2$	15.3	1.739	818	2970	2092	1925	1922
$2H_2+O_2+2H_2$	17.25	1.773	1465	3314	3650	3627	3527
$2H_2+O_2+4H_2$	15.97	1.779	1590	2976	3769	3749	3532
$2H_2+O_2+1.5Ar$	17.60	1.724	890	3412	2500	2117	1950
$2H_2+O_2+3Ar$	17.11	1.704	788	3265	2210	1907	1800

10.6　真实气体爆轰波阵面上的物理量

在上节我们求出了理想气体爆轰波阵面上的参数。将爆轰气体及其产物作为理想气体(即完全气体)的条件是:密度不太大、压力不太高。这对于原处于较小压力下的混合气体爆轰是满足的,实验已证明它的正确性。

对于理想气体的强爆轰波,其爆速、爆轰波阵面上的质点速度和温度与其原气体的密度 ρ_+无关,见(10.61)、(10.62)和(10.63)式。迪克逊(Dickson)对混合气体 $2H_2+O_2$ 的爆轰做了测量,当初压 p_+由 760mm 汞高增至 1500mm 汞高时,其爆速由 2821 米/秒增加到 2872 米/秒,从而说明爆速 D 与 ρ_+几乎无关。

然而对于处于高压下的稠密气体则不然,如对乙炔混合气体,当 p_+由 5 个大气压升到 30 个大气压时,爆速 D 由 1000 米/秒增加到 1600 米/秒,这说明 ρ_+对 D 的影响很大,即对理想气体适用的克拉珀龙方程(Clapeyron's equation of state)不成立了,即气体不能作为理想气体。

10.6.1　描述真实气体的状态方程

理想气体只是一种极端情形。真实气体不满足克拉珀龙方程,描述真实气体的状态方程很多,其中有

1. 范德瓦耳斯方程(Van der Waals'equation)

$$\left(p+\frac{h}{V^2}\right)(V-b)=RT$$

其中 h、b 为常数。

2. 维里方程(Virial equation)

$$\frac{pV}{RT}=1+\frac{B(T,n_i)}{V}+\frac{C(T,n_i)}{V^2}+\cdots$$

其中,B、C 为已知函数,n_i 为单位质量混合气体中第 i 种气体的克分子(摩尔)数。但上式的 n_i 亦可能代表一个“矢量”的各个分量。

3. 阿贝尔方程(Abel's equation)

$$p(V-\alpha)=RT$$

式中 α 称作余容(residual volume)。

4. 库克方程(Cook's equation)

$$p[V-b(V)]=RT$$

式中 $b(V)$ 为 V 的已知函数。

5. BKW 方程(Becker-Kistiakowsky-Wilson equation)

$$pV=RT(1+xe^{\beta x})$$

其中

$$x=\frac{\gamma}{V_*T^\alpha}\sum_{i=1}n_ib_i$$

后修正为

$$x=\frac{\gamma}{V_*(T+\theta)^\alpha}\sum_{i=1}n_ib_i$$

其中,α、β、γ、θ 为常数,b_i 和 n_i 分别为第 i 种气体成分的余容和克分子数,V_* 为所生成气体的总体积,V 为比容。

6. 玻耳兹曼—范德瓦耳斯—勃洁方程(Boltzmann-Van der Waals-Berger equation)

$$p+\frac{\alpha}{V^2}=\frac{RT}{V}(1+x+0.625x^2+0.287x^3+0.193x^4)$$

$$x=\frac{1}{V_*}\sum_{i=1}n_ib_i$$

当然还有其他形式的描述真实气体的状态方程。现在我们仅以阿贝尔状态方程来描述真实气体的爆轰过程。

$$p(V-\alpha)=RT \tag{10.75}$$

按此状态方程可以得到与理想气体同样的结果——气体比内能 e 与比容 V 无关。因为

$$\mathrm{d}e=\left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_V\mathrm{d}T+\left(\frac{\partial e}{\partial V}\right)_T\mathrm{d}V \tag{10.76}$$

而由热力学给出

$$\left(\frac{\partial e}{\partial V}\right)_T=T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V-p \tag{10.77}$$

将(10.75)式代进上式则推出 e 与 V 无关,即有

$$\left(\frac{\partial e}{\partial V}\right)_T=0 \tag{10.78}$$

在此我们再做如上节那样的多方气体假设,即

$$\left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_V=C_V\equiv\mathrm{const} \tag{10.79}$$

于是由(10.76)式得到

$$e=C_VT \tag{10.80}$$

根据热力学第一定律

$$T\mathrm{d}S=\mathrm{d}e+p\mathrm{d}V$$

再据(10.75)和(10.80)式,便给出

$$\mathrm{d}S = \frac{C_V \mathrm{d}T}{T} + \frac{R\mathrm{d}V}{V - \alpha}$$

积分后给出

$$T(V - \alpha)^{k-1} = \frac{1}{R}p(V - \alpha)^k = \text{const} \cdot e^{S/C_V}$$

即有

$$p(V - \alpha)^k = A(S) \tag{10.81}$$

式中 A 为熵 S 的函数，k 为(10.43)式的定义的绝热指数。

由(10.81)式得到音速 a 的表达式为

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \frac{kpV^2}{V - \alpha} \tag{10.82}$$

10.6.2 爆轰波阵面上的相容关系式

根据爆轰波阵面上($\lambda=1$)的守恒方程(10.24)式以及 C－J 条件(10.30)式和如上状态方程(10.75)式，则给出真实气体爆轰波阵面的相容关系为：

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_+ (D - u_+) = \rho_H (D - u_H) \\
&p_+ + \rho_+ (D - u_+)^2 = p_H + \rho_H (D - u_H)^2 \\
&e_H - e_+ = \frac{1}{2}(p_H + p_+)(V_+ - V_H) + Q_V \\
&e_H = C_V T_H = \frac{1}{k-1} p_H (V_H - \alpha) \\
&e_+ = C_V T_+ = \frac{1}{k-1} p_+ (V_+ - \alpha) \\
&D = u_H + a_H \\
&a_H = V_H \sqrt{\frac{k p_H}{V_H - \alpha}}
\end{aligned}\right\} \tag{10.83}$$

由头两式可求得

$$\rho_+^2 (D - u_+)^2 = \rho_H^2 (D - u_H)^2 = \frac{p_H - p_+}{V_+ - V_H} \tag{10.84}$$

将(10.83)的第六、七式代进上式中，则得到

$$\rho_H^2 a_H^2 = \frac{k p_H}{V_H - \alpha} = \frac{p_H - p_+}{V_+ - V_H} = \frac{p_H - p_+}{(V_+ - \alpha) - (V_H - \alpha)}$$

即有

$$\frac{V_+ - \alpha}{V_H - \alpha} = \frac{(k+1)p_H - p_+}{k p_H} \tag{10.85}$$

在强爆轰波的条件下，即 $p_H \gg p_+$，于是由上式得到与(10.59)式不同的关系式：

$$\frac{V_+ - \alpha}{V_H - \alpha} = \frac{k+1}{k} \tag{10.86}$$

将上式代进(10.84)式中，得到

$$\rho_+^2 (D - u_+)^2 = \frac{(p_H - p_+)(k+1)}{V_+ - \alpha}$$

在上式中略 p_+，就得到

$$p_H=(D-u_+)^2\frac{V_+-\alpha}{(k+1)V_+^2} \tag{10.87}$$

由(10.83)式的能量方程，并考虑到 $p_H \gg p_+$，得到

$$\frac{1}{k-1}p_H(V_H-\alpha)=\frac{1}{2}p_H(V_+-V_H)+Q_V \tag{10.88}$$

利用(10.86)和(10.87)式消去上式中的 p_H 和 V_H，得到

$$D=\frac{V_+}{V_+-a}\sqrt{2(k^2-1)Q_v}+u_+ \tag{10.89}$$

如果爆轰波面前 $u_+=0$，则

$$D=\frac{V_+}{V_+-\alpha}\sqrt{2(k^2-1)Q_V}=\frac{1}{1-\alpha\rho_+}\sqrt{2(k^2-1)Q_V} \tag{10.90}$$

上式与多方气体强爆轰的关系式(10.61)不同之处在于：D 依赖于密度 ρ_+，爆速随着 ρ_+ 的增加而增加，这正是真实气体与理想气体不同的地方。

将(10.89)式代进(10.87)式中得到

$$p_H=\frac{2(k-1)Q_V}{V_+-\alpha} \tag{10.91}$$

将(10.86)和(10.91)式代进(10.83)的第七式，给出

$$a_H=\sqrt{2(k^2-1)Q_V}\,\frac{kV_++\alpha}{(k+1)(V_+-\alpha)} \tag{10.92}$$

将(10.89)和(10.92)式代进(10.83)的第六式，给出

$$u_H=\sqrt{\frac{2(k-1)}{k+1}Q_V} \tag{10.93}$$

将(10.91)和(10.86)式代进(10.75)式中，给出

$$T_H=\frac{2k(k-1)}{(k+1)R}Q_V \tag{10.94}$$

如上给出了满足阿贝尔状态方程的真实气体其爆轰波阵面上的参数，在整个求解过程中余容 α 保持不变，即 $\alpha=\text{const}$。

从(10.90)式看出，D 随 ρ_+ 增加而增加，这种结果已被实验所证实，如对爆鸣气($2H_2+O_2$)，在其 $\alpha=0.75\text{cm}^3/\text{g}$ 时，按(10.90)式的理论结果与实验测量值恰好一致，见图 10.8。当 ρ_+ 由 0.1g/cm^3 增加到 0.5g/cm^3 时，D 值由 3000m/s 增加到 4400m/s。

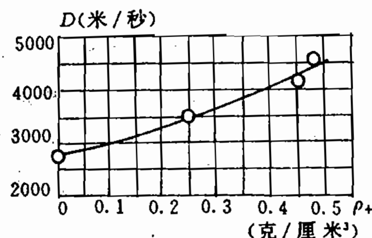


图 10.8 爆鸣气爆速 D 与初始密度 ρ_+ 的关系
(。一实验值；曲线一理论值)

当然对于其他真实气体的爆速 D 同样可以进行如上的理论计算，但关键在于给出余容。

对于服从阿贝尔状态方程的气体而言，余容 α 可以这样求得：作为真实气体，它的爆速 D 应满足(10.90)式，现将这个爆速记作 D_R；再将该气体作为理想气体，于是爆速 D 满

足(10.61)式,将这个爆速记作 D_I,将(10.90)式同(10.61)式对比,则给出

$$D_K/D_I = \frac{1}{1-\alpha\rho_+} \tag{10.95}$$

通过理论计算求得 D_I,再通过实验测得 D_K,然后利用上式便可以求得余容 α,这是假定 α 不变的条件下求得的 α。其实,α 亦是变化的,如上的作法只是一定程度的近似而已。

10.7 凝聚炸药爆轰产物的状态方程

在本章的前一段讲述的是气体炸药的爆轰理论。然而我们常遇到的也是最有用的炸药是凝聚炸药(condensed (condensation) explosives),如爆炸压接中所用的。所谓凝聚炸药是指固态炸药和液态炸药。不过,气体爆轰的那套理论乃是描述凝聚炸药爆轰的理论基础。

凝聚炸药,除了体态与气体爆炸物不同外,还在于它的密度大、爆速高、爆压大、能量密度高,从而成为威力较大的能源。同时,由于凝聚炸药便于储存、运输、加工和使用,因此在军事上和民用上广泛使用。

基于凝聚炸药的重要性,所以研究它的爆轰在某种意义上讲比研究气体爆轰更重要。研究凝聚炸药的爆轰有两种方式:一种是借用气体爆轰理论;另一种是使用半径验的办法。

按气体爆轰来处理凝聚炸药爆轰时,必须给定凝聚炸药爆轰产物的状态方程。

10.7.1 把凝聚炸药之爆轰产物的行为近似为固体

在这种近似下,可采用近似的格林乃森状态方程(Grüneisen equation of state):

$$p = AV^{-k} + \frac{B}{V}T \tag{10.96}$$

其中,A、k、B 都是材料常数,它们与炸药的性质有关。上式中右边第一项称作冷压,第二项称作热压。对于密度较大的凝聚炸药而言,其冷压部分远远大于热压,因此最常使用类似于多方气体的状态方程(10.42),即将(10.96)式中的热压项略去而成为

$$p = AV^{-k} \tag{10.97}$$

使用上式的关键是确定指数 k,确定 k 值有许多方法,其中有:

1. 根据爆轰产物的组分来确定 k 值

阿平(Я. А. Апин)和瓦斯卡包埃尼科夫(И. М. Воскобойников)1961 年提出依据凝聚炸药爆轰产物的组成,可以近似地确定多方指数 k,其公式如下:

$$k = \frac{\Sigma n_i}{\Sigma \frac{n_i}{k_i}} \tag{10.98}$$

其中,n_i 为爆轰产物中第 i 种成分的克分子数;k_i 为爆轰产物中第 i 种成分的多方指数。表 10.6 列出了爆轰产物中几种主要成分的多方指数。

表 10.6 爆轰产物中各种成分的多方指数

第 i 种成分	H_2O	CO_2	CO	N_2	O_2	C	H_2	CH_4
k_i	1.9	4.5	2.85	3.70	2.45	3.35	—	—

如果已知炸药爆炸后产物的成分及其克分子数，则可利用(10.98)式和表 10.6 求得该炸药爆轰产物的多方指数 k。

然而在大多数情况下，我们只知炸药而不知其爆轰产物的组成。理论上只能近似地确定出它的组成。一般所用的高能炸药(high explosive)主要是由 C、H、N、O 四种元素组成，它们在爆炸的瞬间所形成的典型产物成分为 H_2O、CO、CO_2、N_2、H_2、O_2 和 C，此外还有少量的 CH_4、C_2H_2、HCN、HN_3 等气体。如果炸药中含有 Al、Mg 等金属粉末，则在爆轰产物中还会生成一部分金属氧化物及微量的氮化物；同时在爆炸瞬间由于高温，产物间又会发生二次反应。总之，爆轰反应是个复杂的化学过程。

为了简单起见，我们只考虑由 a 个 C 原子，b 个 H 原子、c 个 N 原子、d 个 O 原子组成的炸药，其分子式记作 $C_aH_bN_cO_d$，爆炸所生成的主要产物如上面所述，其产物生成遵循如下规律：

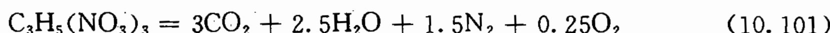
① 对于正氧和零氧平衡炸药，则有

$$d \geqslant 2a + \frac{b}{2} \tag{10.99}$$

其爆轰产物的构成符合最大能量释放原则，即 $C_aH_bN_cO_d$ 中的碳全部氧化成 CO_2、氢全部氧化成为 H_2O，整个爆炸反应的近似方程为

$$C_aH_bN_cO_d = aCO_2 + \frac{b}{2}H_2O + \frac{c}{2}N_2 + \frac{1}{2}\left(d - 2a - \frac{b}{2}\right)O_2 \tag{10.100}$$

例如硝化甘油爆炸的反应方程可写成



$$C_3H_5(NO_3)_3 = 3CO_2 + 2.5H_2O + 1.5N_2 + 0.25O_2 \tag{10.101}$$

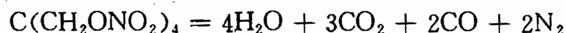
② 对于一般的负氧平衡炸药，则有

$$a + \frac{b}{2} \leqslant d < 2a + \frac{b}{2}$$

这一类炸药，如太安和黑索金等，所含氧量足以使氢被氧化成 H_2O、使碳全部氧化成 CO，还不足以使全部的碳变成 CO_2，它们爆炸反应的近似方程为

$$C_aH_bN_cO_d = \frac{b}{2}H_2O + \left(d - a - \frac{b}{2}\right)CO_2 + \left(2a + \frac{b}{2} - d\right)CO + \frac{c}{2}N_2 \tag{10.102}$$

例如太安爆炸的反应方程可写成



$$C(CH_2ONO_2)_4 = 4H_2O + 3CO_2 + 2CO + 2N_2$$

对于正氧、零氧和一般负氧平衡炸药，其爆炸生成物遵循的大致原则是：$C_aH_bN_cO_d$ 中的氧优先把氢氧化成 H_2O，而后使碳氧化成 CO，如果还有多余的氧，会使 CO 再氧化成 CO_2，即生成物组分的顺序为



$$H_2O \longrightarrow CO \longrightarrow CO_2 \tag{10.103}$$

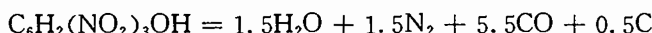
③ 对于严重的负氧平衡炸药，一般则有

$$\frac{1}{2}b \leqslant d < a + \frac{b}{2} \tag{10.104}$$

这一类炸药，如梯恩梯、三氨基三硝基苯(TATB)，它们的含氧量不足以使爆轰产物完全氧化，其爆炸反应方程可近似写作

$$C_aH_bN_cO_d = \frac{b}{2}H_2O + \frac{c}{2}N_2 + (d - \frac{b}{2})CO + (a - d + \frac{b}{2})C \qquad (10.105)$$

例如苦味酸炸药爆炸反应方程可写成



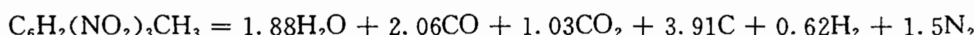
$$C_6H_2(NO_2)_3OH = 1.5H_2O + 1.5N_2 + 5.5CO + 0.5C$$

对于严重负氧平衡炸药，其生成产物的优先顺序大致为



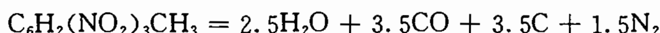
$$H_2O \longrightarrow CO \longrightarrow C \qquad (10.106)$$

对于以上所述的规律只是个大致原则，而且尚存在不同看法，如对严重负氧平衡炸药有人提出另一种规律：$C_aH_bN_cO_d$ 中$\frac{3}{4}$的 H 被氧化成 H_2O，余下的氧均等地用来生成 CO 和 CO_2，例如对于 TNT 则有



$$C_6H_2(NO_2)_3CH_3 = 1.88H_2O + 2.06CO + 1.03CO_2 + 3.91C + 0.62H_2 + 1.5N_2$$

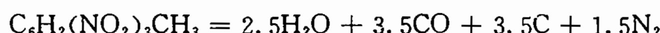
而按(10.105)式所提出的原则则写成



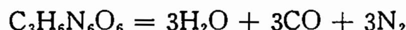
$$C_6H_2(NO_2)_3CH_3 = 2.5H_2O + 3.5CO + 3.5C + 1.5N_2$$

所以说上述诸原则都不是绝对的，只是个参考规律；同时还应强调一点，对于 $C_aH_bN_cO_d$ 炸药所生成的产物成分绝非上述几种，有人曾考虑到 20 种。

现在我们利用公式(10.98)和(10.105)所示的原则来计算 TNT 和 RDX 的 k 值。按(10.105)式则有



$$C_6H_2(NO_2)_3CH_3 = 2.5H_2O + 3.5CO + 3.5C + 1.5N_2$$



$$C_3H_6N_6O_6 = 3H_2O + 3CO + 3N_2$$

再据(10.98)式和表 10.6 可求得 TNT 和 RDX 的 k 值分别为

$$k_{TNT} = 2.80, \quad k_{RDX} = 2.61 \qquad (10.107)$$

2. 根据炸药的初始密度来确定 k 值

上面所述的方法简单方便，但由于只考虑炸药的成分和爆轰产物的组分，而不论其炸药的密度大小，必然有时与实际不符。1973 年，杜福尼(M. Defourneaux)从炸药密度的角度对凝聚的 $C_aH_bN_cO_d$ 炸药提出如下的经验公式

$$k = 1.9 + 0.6\rho_0 \qquad (10.108)$$

其中，ρ_0 为炸药的初始密度，其单位为 g/cm^3、kg/dm^3 或 t/m^3，该公式由于忽略了炸药与产物的组分，显然亦有很大的局限性。

该公式对于爆轰产物组分难以确定的混合炸药非常方便，例如对于爆炸压接所用的太乳炸药，密度 $\rho_0=0.9g/cm^3$，按公式(10.108)计算 k：

$$k = 2.44 \qquad (10.109)$$

这个值同我们采取理论计算并结合简单的实验测量所求得结果一致[4]，我们求得：

$$k = 2.4$$

3. 根据炸药的初始密度及产物成分来确定 k

鉴于上述确定 k 值方法的片面性，1976 年，吴雄对所收集的各种凝聚炸药爆轰产物 k 值的实验数据做了分析，提出如下经验公式

$$k = k_0 + k^*(1 - e^{-0.5459\rho_0}) \qquad (10.110)$$

其中

$$k_0 = 1.25$$

$$k^* = \sum n_i / \sum \frac{n_i}{k_i^*}$$

其中，n_i 为产物第 i 种成分的摩尔数，k_i^* 为产物第 i 种成分的绝热指数，它们的取值列在表 10.7 中。

利用(10.110)式的关键在于确定爆轰产物的成分，对于 $C_aH_bN_cO_d$ 炸药的爆轰产物组成可以参照式(10.99)到式(10.106)所述的原则。对于负氧平衡炸药或严重负氧平衡炸药他又做了细致的分析，详见文献[1]和[5]。

表 10.7

第 i 种成分	N_2	H_2O	CO_2	CO	CH_4	C	O_2	H_2
k_i^*	3.8	1.68	3.10	2.67	2.93	3.50	3.35	3.4

4. 几点说明

① 对于某种炸药的爆轰产物的多方指数 k 而言，它随炸药的初始密度 ρ_0 的增加而增大，但增大不是无限的，k 有个最大极限值。

② k 除了与 ρ_0 有关外，还与爆轰产物的压力 p 有关。p 越大，k 值也越大，因此在爆轰波阵面上($p=p_H$)其 k 值最大，即 $\max k = k(p_H) = k_H$.

在爆轰产物的膨胀过程中，压力不断下降，所以在不同时刻在产物流场的不同位置上 k 值亦是不同的。

③ 上面所述的求 k 值的几种方法，给出的 k 值都是平衡意义下的值，即不考虑 k 随压力的变化，在描述整个爆轰产物流动时，取 $k=\text{const}$。在解决工程问题和一般的理论计算中所需要的正是这样的 k 值。

对于高猛炸药，如果密度较高(如在 1.6g/cm^3 左右)或者其爆压较大(如在 150～300kb)，其平均意义下的 k 值或称“有效”k 值一般约为 3 左右，即 $k\approx 3$. 所以在描述高猛炸药爆轰产物流动的一般理论模型中均假定：

$$k = 3 \tag{10.111}$$

但对如在爆炸加工中所用的炸药一般密度小爆速低，将 k 取成(10.111)式的值则偏大了。

10.7.2 把凝聚炸药的爆轰产物视作稠密气体

按稠密气体(dense gas)可采用阿贝尔方程(10.75)式，但将余容 α 作为 V 和 T 的函数，即

$$\left.\begin{aligned} p(V-\alpha) &= RT \\ \alpha &= \alpha(V,T) \end{aligned}\right\} \tag{10.112}$$

亦有将 α 只视作 p 的函数，即状态方程写成

$$\left.\begin{aligned} p(V-\alpha) &= RT \\ \alpha = \alpha(p) &= a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 \end{aligned}\right\} \tag{10.113}$$

其中，a_1、a_2、a_3 是与炸药性质有关的常数。还有的采用类似于维里型展式的状态方程，即

$$\left.\begin{aligned} pV &= RT\left(1+\frac{\alpha}{V}+0.625\frac{\alpha^2}{V^2}+0.287\frac{\alpha^3}{V^3}+0.193\frac{\alpha^4}{V^4}\right) \\ \alpha &= 6.023\times 10^{23}\ \text{再乘以分子体积的四倍} \end{aligned}\right\} \tag{10.114}$$

10.8 凝聚炸药爆轰参数的计算

爆轰的 C—J 理论是对于气体爆轰提出来的，它正确地描述了气体爆轰过程的物理本质，按此理论算出的爆轰参数符合实际。对于凝聚炸药的爆轰，C—J 理论是否适用，现在还有不同看法，不过多年来，人们一直使用该理论处理凝聚炸药的爆轰问题，得到令人满意的结果。

现在假定凝聚炸药的爆轰波是稳定的，并且 C—J 条件成立。这样，凝聚炸药的爆轰问题则同气体爆轰一样处理，根据气体爆轰波阵面上的方程组(10.24)和 C—J 条件(10.30)式则有：

$$\left.\begin{aligned}&\rho_+(D-u_+)=\rho_H(D-u_H)\\&p_++\rho_+(D-u_+)^2=p_H+\rho_H(D-u_H)^2\\&e_H-e_+=\frac{1}{2}(p_H+p_+)(V_+-V_H)+Q_V\\&D=u_H+a_H\end{aligned}\right\}\tag{10.115}$$

其中，

$$\begin{cases}\rho_+=\rho_0=\dfrac{1}{V_0}=\dfrac{1}{V_+}\text{ 为炸药的初始密度}\\p_+=p_0\text{ 为炸药的初始压力}\\u_+=u_0\text{ 为炸药的初始速度，一般为零，在以下处理中均令 }u_0=0\end{cases}$$

状态方程和内能方程为如下形式

$$\left.\begin{aligned}p&=p(\rho,T)\\e&=e(\rho,T)\end{aligned}\right\}\tag{10.116}$$

方程(10.115)和(10.116)式联立起来共六个方程，在炸药的初始状态已知的情况下，方程组正好封闭，完全可确定爆轰波阵面上的参数。

10.8.1 状态方程取“多方指数”形式，即取(10.97)式形式

$$p=AV^{-k}\tag{10.117}$$

根据热力学第一定律

$$TdS=de+pdV$$

如再假定过程是等熵的，即 $dS=0$ 且 $A=\text{const}$，$k=\text{const}$，则由上式和(10.117)式推出内能的表达式如同理想气体的形式

$$e=\frac{1}{k-1}pV\tag{10.118}$$

在描述爆轰产物膨胀时，一般均假定等熵，因此上式适用于描述爆轰产物的内能。不管如何，对于状态方程取(10.117)形式时，我们就以(10.118)形式来描述爆轰产物的内能，式(10.116)有时称作广义形式内能或**广义状态方程**。

根据声速的定义和(10.117)式，在 $k=\text{const}$ 的情况下，得出

$$a^2=\frac{kp}{\rho}=kpV\tag{10.119}$$

将式(10.115)、(10.118)和(10.119)式联立起来,并略炸药的初始压力和初始内能,则求得:

$$\left.\begin{aligned} p_H &= \frac{1}{k+1}\rho_+ D^2 = \frac{1}{k+1}\rho_0 D^2 \\ \rho_H &= \frac{k+1}{k}\rho_+ = \frac{k+1}{k}\rho_0 \\ u_H &= \frac{1}{k+1}D \\ a_H &= \frac{k}{k+1}D \\ D &= \sqrt{2(k^2-1)Q_V} \end{aligned}\right\} \qquad (10.120)$$

如上给出了爆轰波阵面上所有的参量,这与对于理想气体爆轰的波阵面的关系式(10.69)完全一致,但不包括温度 T_H,对于凝聚炸药的爆轰产物而言,温度的状态方程是复杂的,现在我们只取阿平给出的经验公式

$$T_H = 4.8\frac{p_H}{\rho_H}\left(\frac{1}{\rho_H} - 0.20\right)M_H \qquad (10.121)$$

其中,$\begin{cases} M_H \text{ 为爆轰产物的平均分子量} \\ p_H \text{ 的单位为 kb} \\ \rho_H \text{ 的单位为 g/cm}^3 \\ T_H \text{ 的单位为 K} \end{cases}$

在 p_H、ρ_H、M_H 已知的情况下,便可求得爆轰波阵面上的温度 T_H.

10.8.2 **状态方程采用阿贝尔形式,即用(10.112)式**

$$p(V-\alpha) = RT$$

比内能则为:

$$e = C_V T = \frac{1}{k-1}p(V-\alpha) \qquad (10.122)$$

其中

$$k = (C_V + R)/C_V$$

这样,对于凝聚炸药爆轰的处理就相当§10.6对于真实气体爆轰一样处理。

史密特(Schmidt)利用(10.95)式计算了某些凝聚炸药在不同密度下的余容。他发现太安的密度 ρ_0 由 0.5g/cm³ 增加到 1.6g/cm³ 时,其余容 α 由 0.79cm³/g 下降到 0.44 cm³/g;对于梯恩梯、苦味酸和特屈儿等炸药也得到类似的结果。

表 10.8 TNT 爆轰波的几个参数

ρ_0(即 ρ_+) (g/cm³)	α (cm³/g)	D (m/s)	T_H (K)
1.0	0.58	4700	3250
1.29	0.52	5900	3530
1.46	0.48	6500	3550
1.59	0.45	6900	3630

在 Q_V、k、α 已知的情况下,由(10.86)、(10.90)、(10.91)、(10.93)和(10.94)式可以求出凝聚炸药的爆轰参数 V_H(或 ρ_H)、D、p_H、u_H、T_H。如果 α 未知,可由上述诸式再加上(10.95)式联立而求得 α、D(即 D_R)、u_H、ρ_H、p_H 和 T_H. 史密特计算了一些炸药的主要参数,其中对于 TNT 的 D、α、

T_H 已列在表 10.8 中。

鲍姆等人对史密特的方法提出了批评，认为该方法会得出“流速 u_H 与 ρ_0 等无关”的错误结果，尽管该方法计算的爆速有时与实际测量值一致[2]。

10.9　用 BKW 方程计算凝聚炸药的爆轰参数

上节在计算爆轰产物时使用了简单的状态方程。假若对爆轰参数做更精细的研究，显然就不够了。当前在国际上使用得较广、也是标定得最好的应首推在 § 10.6 所提到的 BKW 方程：

$$pV = RT(1 + xe^{\beta x}) \tag{10.123}$$

其中

$$x = \frac{\gamma}{V_{\bullet}(T+\theta)^{\alpha}} \sum_{i=1} n_i b_i$$

其中常数 α、β、γ、θ 有两种取法，对于其爆轰产物中不生成或很少生成固体碳的炸药，即与黑索金相似的炸药，使用称之为“适合于 RDX 的参数”；对于其爆轰产物中生成大量固体碳的炸药，使用称为“适合于 TNT 的参数”。对于这些参量的具体取值，见表 10.9。

表 10.9　参量 α、β、γ、θ 的取值

	α	β	γ	θ
适于 RDX 的参数	0.50	0.16	10.91	400
适于 TNT 的参数	0.50	0.09585	12.685	400

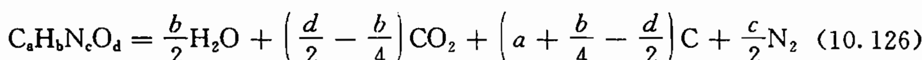
对于一种 $C_aH_bN_cO_d$ 炸药，判断它适于哪组参数，根据康姆莱特（M. Kamlet）的意见，这要根据质量分数 $G_{\bullet}$，它定义作

$$G_{\bullet} = N_{\bullet} M_H \tag{10.124}$$

其中，$N_{\bullet}$ 为单位质量（每克）炸药生成爆轰产物气体的克分子数，M_H 为爆轰产物气体的平均分子量。

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } G_{\bullet} > 0.820 \text{ 时，使用适于 RDX 的参数} \\ \text{当 } G_{\bullet} < 0.820 \text{ 时，使用适于 TNT 的参数}\end{array}\right\} \tag{10.125}$$

对于 $N_{\bullet}$ 和 M_H 是这样计算的，根据最大放热原则，炸药 $C_aH_bN_cO_d$ 的爆炸反应方程式可以写成



$$C_aH_bN_cO_d = \frac{b}{2}H_2O + \left(\frac{d}{2} - \frac{b}{4}\right)CO_2 + \left(a + \frac{b}{4} - \frac{d}{2}\right)C + \frac{c}{2}N_2 \tag{10.126}$$

由此看出

$$\begin{cases}\text{一克分子炸药生成气体的克分子数} = \dfrac{b}{2} + \left(\dfrac{d}{2} - \dfrac{b}{4}\right) + \dfrac{c}{2} = \dfrac{c}{2} + \dfrac{d}{2} + \dfrac{b}{4} \\ \text{炸药的分子量} = 12a + b + 14c + 16d\end{cases}$$

所以

$$N_{\bullet} = \frac{\dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{2} + \dfrac{d}{2}}{12a + b + 14c + 16d} = \frac{b + 2c + 2d}{48a + 4b + 56c + 64d}$$

所生成的气体产物的平均分子量

$$M_H = \frac{\dfrac{b}{2}\cdot 18 + \left(\dfrac{d}{2} - \dfrac{b}{4}\right)\cdot 44 + \dfrac{c}{2}\cdot 28}{\dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{2} + \dfrac{d}{2}} = \frac{88d + 56c - 8b}{b + 2c + 2d}$$

由如上两式便得到质量分数 $G_{\bullet}$

$$G_* = \frac{22d + 14c - 2b}{12a + b + 14c + 16d} \tag{10.127}$$

其实,求炸药生成产物气体的质量比 G_* 无须通过如上步骤,据(10.126)式直接计算即可。

对于黑索金(RDX),分子式为 $C_3H_6N_6O_6$,由(10.127)式可求得

$$G_* = 0.919 > 0.820$$

故在使用(10.123)式时,用适于 RDX 的参数。

对于太安(PENT),分子式为 $C_5H_8N_4O_{12}$,由(10.127)式求得

$$G_* = 0.962 > 0.820$$

所以在使用(10.123)式时,用适于 RDX 的参数。

对于梯恩梯(TNT),分子式为 $C_7H_5N_3O_6$,由(10.127)式可算出

$$G_* = 0.722 < 0.820$$

所以在使用(10.123)式时,用适于 TNT 的参数。

对于二氨基三硝基苯(DATB),分子式为 $C_6H_5N_5O_6$,由(10.127)式可算出

$$G_* = 0.790 < 0.820$$

所以在使用(10.123)式时,用适于 TNT 的参数。

关于(10.123)式中的余容 b_i,可参照表 10.10.

表 10.10 BKW 方程中爆轰产物的余容

名称	H_2O	CO_2	CO	N_2	NO	H_2	O_2
b_i	250	600	390	380	386	180	350

在利用 BKW 方程计算时,亦有人利用爆轰产物的几何余容(它定义作 1 克分子的分子围绕其中心旋转的体积),表 10.11 列出了几种爆轰产物的几何余容。

表 10.11 凝聚炸药的几种爆轰产物的几何余容

名称	CH_4	CO	CO_2	H_2	H_2O	N_2	NO	O_2	Al
余容	528	390	735	180	420	380	386	350	350
名称	AlO	Al_2O	Al_2O_3	C	C_2	C_5	H_2S	NO_2	
余容	800	1300	1350	180	380	750	680	650	

对于 $C_aH_bN_cO_d$ 炸药,其主要的爆轰产物为 H_2O、CO_2、N_2 和 CO 等。从表 10.10 可以看出,在 BKW 方程中所选取的爆轰产物的余容 b_i 与其相应的分子量 M_i 几乎成正比,见表 10.12,现将其比例常数取作表 10.12 中所示的 H 值,从而

$$b_i = HM_i$$

$$H = 13.76$$

于是(10.123)式中的一些量可以化简:

表 10.12 主要爆轰产物的余容与分子量之比 H_i

爆轰产物名称	b_i	$H_i = b_i/M_i$
H_2O	250	13.89
N_2	380	13.57
CO	390	13.93
CO_2	600	13.64
$H = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} H_i$		13.76

$$\sum_{i=1} n_i b_i = H \sum_{i=1} n_i M_i = HG$$

$$x = \frac{\gamma}{V_*(T+\theta)^\alpha} \sum_{i=1} n_i b_i = \frac{\gamma \rho H}{(T+\theta)^\alpha}$$

其中

$$\begin{cases} G = \sum_{i=1} n_i M_i \text{ 为生成的产物气体的总质量或“总分子量”} \\ \rho = \dfrac{G}{V_*} \text{ 为生成的产物气体的平均密度} \end{cases}$$

根据以上所引进的诸量，则 BKW 方程(10.123)可以写成

$$\left.\begin{aligned} p &= RT\rho(1 + xe^{\beta x}) = \frac{R_* T\rho}{M_H}(1 + xe^{\beta x}) \\ x &= \frac{\gamma H \rho}{(T+\theta)^\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (10.128)$$

其中，R_* 为普适气体常数。式(10.128)因去掉了余容因子项，所以比使用(10.123)式更方便，为了使用方便，我们再引进炸药生成产物的总克分子数 N

$$\left.\begin{aligned} N &= \Sigma n_i \\ M_H &= \frac{G}{N} \end{aligned}\right\} \quad (10.129)$$

于是(10.128)式可写成

$$p = \frac{N\rho R_* T}{G}\left\{1 + \frac{\gamma H \rho}{(T+\theta)^\alpha} \exp\left[\frac{\gamma \beta H \rho}{(T+\theta)^\alpha}\right]\right\} \quad (10.130)$$

利用式(10.130)形式的 BKW 状态方程再加上方程组(10.115)以及 $e=e(\rho,T)$ 的函数关系，原则上便可计算爆轰参数。然而计算起来非常麻烦，如在(10.130)式中的参数 N、G 等未定，若确定它们则需要对爆轰产物的实际组成进行计算，这又涉及到一系列的数学处理与近似，详见曼德尔(G. L. Mader)等人的文章[6],[7]。

1963 年，曼德尔利用 BKW 方程对三十多种炸药的爆轰参数在计算机上进行了计算，他除了计算 $C_aH_bN_cO_d$ 炸药之外，还考虑了含有 Al、F、B 等成分的炸药，计算中考虑的爆轰产物为 18 种气体产物和两种固态产物，计算的数据与实测相符。现将一些常用凝聚炸药的计算数据与实测数据一并列在本章附录 10.2 中。

凝聚炸药爆轰参数的理论计算是一种相当复杂的反复叠代过程，随着高速计算机的发展，国外早在 60 年代已经形成了两种计算程序：STRETCH-BKW 和 RUBY，不过二者计算的结果差别不大。

10.10 计算凝聚炸药爆轰参数的半经验方法

如上对于爆轰参数的计算，都是沿袭气体爆轰的办法，从三大守恒定律出发在 C－J 假设的前提下求得爆轰参数，凝聚炸药的爆轰与气体炸药的爆轰不同之处在于产物气体的状态方程。下面介绍不从守恒定律出发，求解爆速和爆压的半经验办法。

10.10.1 对于均质炸药或简单混合炸药

美国科学家康姆莱特(M. Kamlet)等人在研究了曼德尔用 BUBY 程序计算的凝聚炸

药爆轰参数之后，发现了一条重要规律：如下所定义的参量 φ，对于炸药爆轰产物的确切组成变化不敏感，即爆轰产物的组成取得稍微不准，对 φ 值影响不大，φ 的定义为

$$\varphi = N_{*}\sqrt{M_{H}Q} \tag{10.131}$$

其中，M_H 和 N_{*} 分别为上节所定义的爆轰产物气体的平均分子量和单位质量（如每克）炸药爆炸后所形成气体产物的总克分子数；Q 为炸药的化学反应热（取定压爆热、单位为 kcal/kg 或 cal/g）。

这一发现很重要，它给爆轰参数的计算带来了巨大的优越性，因在理论计算中最大的难题是确定炸药爆轰产物的确切组成。由于 φ 对于产物的平衡组成不敏感，我们则可以根据简单的热力学和热化学原理来确定爆轰过程，利用爆轰产物的近似组成来确定 φ 值，如对 $C_aH_bN_cO_d$ 炸药爆轰产物的组成，可以按最大放热的 H_2O——CO_2 分解法则，于是对该炸药爆轰可按（10.126）式：

$$C_aH_bN_cO_d = \frac{b}{2}H_2O + \left(\frac{d}{2} - \frac{b}{4}\right)CO_2 + \left(a + \frac{b}{4} - \frac{d}{2}\right)C + \frac{c}{2}N_2 \tag{10.132}$$

由上式可以求出

$$\left.\begin{aligned} N_{*} &= \frac{2c + 2d + b}{48a + 4b + 56c + 64d} \\ M_H &= \frac{56c + 88d - 8b}{2c + 2d + b} \end{aligned}\right\} \tag{10.133}$$

$$Q = \frac{28.9b + 47.0\left(d - \frac{1}{2}b\right) + \Delta H}{12a + b + 14c + 16d} \tag{10.134}$$

其中，ΔH 为炸药的生成热，单位取 cal/mol。

康姆莱特等人除了发现 φ 的变化对爆轰产物的组成不敏感外，其重要的贡献是他们在如上的基础上对 $C_aH_bN_cO_d$ 炸药的爆速 D 和爆压 p_H 的计算提出半经验公式：

$$\left.\begin{aligned} D &= 1.01\varphi^{1/2}(1 + 1.30\rho_0) \\ p_H &= 15.58\rho_0^2\varphi \end{aligned}\right\} \tag{10.135}$$

其中，ρ_0 为炸药的密度。在上式中当 ρ_0 单位取 g/cm^3、N_{*} 为每克炸药生成的气体产物的克分子数、M_H 为平均分子量、Q 的单位为 cal/g 时，求得的 p_H 的单位为 kb，D 的单位为 km/s 或 mm/μs。

［例］ 使用如上半经验公式计算黑索金的爆速和爆压。已知 RDX 的分子式为 $C_3H_6N_6O_6$，初始密度 ρ_0=1.8g/cm^3，根据（7.120）式算出

$$N_{*} = \frac{2\times 6 + 2\times 6 + 6}{48\times 3 + 4\times 6 + 56\times 6 + 64\times 6} = 0.0338(\text{mol/g})$$

$$M_H = \frac{56\times 6 + 88\times 6 - 8\times 6}{2\times 6 + 2\times 6 + 6} = 27.2(\text{g/mol})$$

已知 RDX 的生成热 ΔH=14.7kcal/mol，则由（7.121）式有

$$Q = \frac{(28.9\times 6 + 47\times 3 + 14.7)\times 10^3}{12\times 3 + 6 + 14\times 6 + 16\times 6} = 1482(\text{cal/g})$$

将如上诸量代进（10.131）式中，则有

$$\varphi = 0.0338 \times \sqrt{27.2 \times 1482} = 6.786$$

再将 φ 代进(10.135)式中,则有

$$\begin{cases} D = 1.01 \times \sqrt{6.786} \times (1 + 1.30 \times 1.8) = 8.788(\text{mm}/\mu\text{s}) \\ p_H = 15.58 \times 6.786 \times 1.8^2 = 342.6(\text{kb}) \end{cases}$$

而实际测量的值

$$\begin{cases} D = 8.754(\text{mm}/\mu\text{s}) \\ p_H = 341 \sim 347(\text{kb}) \end{cases}$$

可见康姆莱特半经验公式算出的爆速与爆压、同实验结果相当符合。

康姆莱特曾对 18 种各种密度的单质炸药和 19 种二元混合炸药的爆速做了数值计算,除太安及部分含太安的混合爆药以外,绝大多数的计算值与实验平均值相差在 3%以内。对 24 种炸药的爆压值做了计算,其计算值与实验平均值相差在 5%左右。由此可见,康姆莱特半经验公式还是相当准确的。本章附录 10.3 列出了用该公式计算的高能炸药爆速及爆压的数值以及实验值。

10.10.2 对于混合炸药

由于武器装备发展的需要以及工程爆破(engineering blasting)、爆炸加工(如爆炸焊接、爆炸压接导线)等需要,具有特殊性能(如极高爆速,或极低爆速)的混合炸药使用得越来越多。这种具有极端爆速且安定好的炸药都是以高能炸药为主体,再添加两种以上的附加成分,因此使得爆轰参数的理论计算变成异常复杂。如下介绍对混合炸药的爆速和爆压计算的简单近似方法。

1. 关于混合炸药爆速计算的近似方法

通过大量实验,发现混合炸药的爆速 D 可按下式计算:

$$D = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i D_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\right) D_a \tag{10.136}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_i &= \tau_i^* / \tau_0 = w_i \frac{\rho_0}{\rho_i^*} \\ w_i &= m_i / m_0 \end{aligned}\right\} \tag{10.137}$$

按这种办法计算爆速称作**体积加和法**。

n——混合炸药的组分个数;τ_0——混合炸药的实际装药总体积;τ_i^*——混合炸药中第 i 种组分在理论密度下的体积;m_0——混合炸药的总质量;m_i——混合炸药中第 i 种组分的质量;D_i——第 i 种组分在理论密度下的爆速(对于可爆组分)或传爆速度(对于非爆炸组分),关于一些炸药及非爆炸添加物的 D_i 列在表 10.13 中;D_a——在空气或空隙中爆轰波的传播速度;ρ_0——混合炸药装药的实际密度;ρ_i^*——第 i 种组分的理论(即晶体)密度。

[注] 在表 10.13 中 ρ_i^* 为各种材料的理论密度;加"* *"符号的表示是按康姆莱特经验公式的计算值。DNT 为二硝基甲苯;KelF 为聚三氟氯化乙烯聚合体;Viton A 为氟化橡胶 A;PVAC 为聚醋酸乙烯酯。

式(10.136)对于 n 种组分的混合炸药成立,它当然亦可用于单质炸药在非理论密度

的装药情形，设其装药密度为 ρ_0，在这种特殊情况下：

$$n = 1,\quad w_1 = 1$$

于是由(10.136)和(10.137)式得出

$$D = \varepsilon_1 D_1 + (1-\varepsilon_1)D_a = \frac{\rho_0}{\rho_1^*}D_1 + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1^*}\right)D_a = D_a + \frac{D_1 - D_a}{\rho_1^*}\rho_0 \tag{10.138}$$

其中，ρ_1^* 和 D_1 分别为该炸药的理论密度和在该密度下的爆速。

表 10.13 部分炸药及常用添加物的 D_i 值

炸药或添加剂材料	ρ_i^* (g/cm³)	D_i (m/s)	炸药或添加剂材料	ρ_i^* (g/cm³)	D_i (m/s)
氨基甲酸乙酯橡胶 L	1.15	5690	LiF	2.64	6070
氯丁橡胶	1.23	5020	$Ba(NO_3)_2$	3.24	3800
聚乙烯	0.93	5550	$KClO_4$	2.52	5470
聚苯乙烯	1.05	5280	$LiClO_4$	2.43	6320
硅橡胶 160		5720	NH_4ClO_4	1.95	6250
硅酮树脂	1.05	5100	SiO_2	2.20	4000
聚四氟乙烯	2.15	5330	Mg/Al 61.5/38.5	2.02	6900
Kel-F 弹性体	1.85	5380	硝化棉(NC)	1.50	6700
Kel-F 800/827	2.00	5830	RDX**	1.81	8800
Viton A	1.82	5390	RDX**	1.816	8842
Kel800	2.02	5500	DNT**	1.521	6184
亚硝基氟橡胶	1.92	6090	TNT	1.65	6987
蜂蜡	0.96	5460	TNT	1.65	6970
KelF 蜡	1.78	5620	HMX	1.90	9150
铝 Al	2.70	6850	PETN	1.77	8280
镁 Mg	1.74	7200	4 号炸药	1.78	8748
空气或间隙		1500	2 号炸药	1.842	8970
PVAC$(C_4H_6O_2)_n$	1.17	5400	基那(DINA)	1.63	7708
			硝基胍 NQ	1.72	8740

［例］ 现利用(10.138)式计算装药密度 $\rho_0 = 1.77\text{g/cm}^3$ 的 HMX 的爆速 D，根据表 10.13 则可求得

$$D = 1500 + \frac{9150 - 1500}{1.90} \times 1.77 = 8627\ (\text{m/s})$$

而由附录 10.3 查得 HMX 的实验值为：8500m/s，由此可见二者相符。但不是对于所有炸药在任意装药密度下(10.138)式都适用。有人建议对于 $\rho_0 \geqslant 1.0\text{g/cm}^3$ 的单质装药，其爆速可采用(10.138)的修正式来计算，即采用：

$$D = \frac{D_1}{4} + \frac{D_1 - D_a}{\rho_1^*}\rho_0 \tag{10.139}$$

上式同(10.138)式一样，仍有局限性。

式(10.138)和(10.139)都表明爆速 D 与装药密度成线性关系，装药密度 ρ_0 越大 D

也就越大。

为了将 n 种组分的混合炸药的爆速计算式改写成对于单质装药的形式，我们引进两个量——混合装药的最大密度(即理论密度)ρ_{max}和在该密度下的爆速 D_{max}，显然：

$$\left.\begin{aligned}\rho_{max} &= m_0/\sum_{i=1}^{n}\tau_i^* = m_0/\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{\rho_i^*} = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{\rho_i^*}\right)^{-1} \\ D_{max} &= \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i D_i\end{aligned}\right\} \tag{10.140}$$

根据如上定义，则式(10.136)可以改写成同(10.140)形式：

$$D = D_{max} + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{max}}\right)D_a = D_a + \frac{D_{max} - D_a}{\rho_{max}}\rho_0 \tag{10.141}$$

2. 关于混合炸药爆压 p_H 的近似计算方法

对于单质或二元混合的 $C_aH_bN_cO_d$ 炸药的爆压计算已有半经验公式(10.135)式，对一般混合炸药，特别是含有非爆炸成分的炸药，计算爆压不能利用简单公式(10.135)式。如果在混合炸药中非爆炸组分在爆炸过程中不参加化学化应，不放出化学能量；同时这种添加成分所占的比例不大，不因其本身吸热而影响爆轰产物的爆压，在这种情况下可以使用(10.135)的修正式，即用修正的康姆莱特公式来计算爆压 p_H：

$$p_H = 15.58(\varphi_e w)\rho_0^2 \tag{10.142}$$

其中，φ_e 是对于混合炸药中能够爆炸成分的 φ，φ 的定义如(10.131)式；w 为能爆炸成分占整个混合炸药的质量比。

10.11 爆速的测量

在爆轰学研究中最重要的爆轰参数是爆压和爆速，对于爆压的精确测量相对而言比较困难，一般使用自由表面法、水箱法、电磁法和压阻法等，这些方法均属于间接测量，而对于爆速可以直接测量。

实验测定像爆炸这种极快过程的速度的方法已达到很高的水平。按照所用的仪器或装置，它可以分为两大类：一类是利用各种类型的测时仪器或装置，如示波器(测时仪器，它是记录过程的时间间隔的)；另一类采用各种类型的摄影记录器——光学仪器，借助于爆轰波阵面的发光效应，将爆轰波沿炸药装药传播的过程记录下来。光学测定方法比测时仪器具(timer)有一定的优点，它能无影响地记录过程的各种现象，不存在因置于传感元件(sensor)而带来误差，同时记录能连续进行，从而可测出过程的真实速度，而不是平均速度。

下面简单介绍测量爆速的几种方法。

1. 导爆索法

该方法亦称作道特里什法(Dautriche's method)，这是一种古老而简便的方法，不需要特殊仪器设备。至今，对于工业炸药爆速的粗略测定，仍采用这种方法，如在爆炸压接中常用它。该方法的实质是通过同已知爆速的导爆索相比较，以求得被测装药的爆速。

具体测量装置如图 10.9 所示。取长度为 30～40cm 的被测炸药试样，装在直径约 2cm 的纸管或金属管中，再取总长约 1m、爆速稳定的导爆索，将导爆索的两端固定在被测

试样的 A、B 两点上，A 和 B 的间距取 10～20cm 为宜，导爆索的中段固定在一块铅板上，铅板上面预先刻一记号，设在 K 点，并使导爆索的中点落在 K 点上。炸药起爆后，当爆轰波阵面到达 A 点时，则将导爆索的 A 端引爆，但爆轰波阵面仍继续沿炸药试样传播，它到达 B 点时又将导爆索的 B 端引爆，于是，由导爆索(detonating fuse)两头先后发生的爆轰波在导爆索的 K_1 点相遇，由于两波对撞，在 K_1 点造成一道深而明显的沟痕，精确地量出 K 与 K_1 点之距离 h，便可求得炸药试样的爆速，如果炸药爆速不稳定，这样得出的爆速则为$\overline{AB}$段的平均爆速。

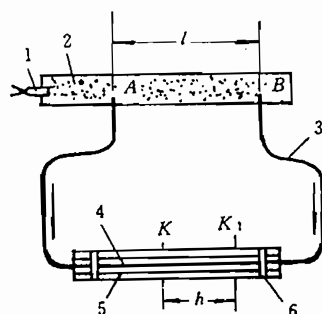


图 10.9 测量爆速的导爆索法装置图
1—雷管；2—被测炸药；3—导爆索
4—铅板(或铝板)；5—垫板；6—木卡子

简单的数学推算如下，设炸药的爆速为 D；导爆索的爆速为 D_L；导爆索的总长度为 l_L，$\overline{KK_1}=h$；炸药的$\overline{AB}=l$，根据时间的对应关系，则有

$$\frac{\overset{\frown}{AK}+\overline{KK_1}}{D_L}=\frac{\overline{AB}}{D}+\frac{\overset{\frown}{BK_1}}{D_L}$$

而

$$\overset{\frown}{AK}=\frac{1}{2}l_L,\ \overset{\frown}{BK_1}=\frac{1}{2}l_L-h,\ \overline{AB}=l,\overline{KK_1}=h$$

故有

$$\frac{\frac{1}{2}l_L+h}{D_L}=\frac{l}{D}+\frac{\frac{1}{2}l_L-h}{D_L}$$

则推出

$$D=\frac{l}{2h}D_L \tag{10.143}$$

只要 l、h、D_L 已知，便可求得被测炸药的爆速 D。

这种测量炸药爆速的精度取决于导爆索爆速 D_L 的精度以及距离 l 和 h 量度的准确程度。

由(10.143)式给定的 D 与 l、D_L、h 的函数关系，可以给出因 l、D_L、h 的不准确性而造成 D 的最大相对误差表达式

$$\frac{\mathrm{d}D}{D}=\pm\left(\frac{\mathrm{d}l}{l}+\frac{\mathrm{d}D_L}{D_L}+\frac{\mathrm{d}h}{h}\right) \tag{10.144}$$

注意在上式中，误差量 $\mathrm{d}l$、$\mathrm{d}D_L$、$\mathrm{d}h$ 均取正值。

现在可以简单地估计一下按这样测量造成 D 的最大误差，导爆索的爆速 D_L 的相对精度可达 1.5～2%；假定测距 $l=20$cm，误差为 0.1cm；测距 $h=10$cm，由于导爆索中点 K 的标定不精确以及 K、K_1 间距离量度不准，造成的误差为 0.2cm，即

$$\frac{\mathrm{d}D_L}{D_L}=2\%,\quad \frac{\mathrm{d}l}{l}=0.5\%,\quad \frac{\mathrm{d}h}{h}=2\%$$

于是由(10.144)求得

$$\frac{\mathrm{d}D}{D}=\pm\ (2\%+0.5\%+2\%)=\pm\ 4.5\%$$

即由这种方法测量炸药的爆速可能产生的最大相对误差约为±4.5%。

测量时必须注意下列几点：

① 导爆索的爆速必须预先抽样测定，导爆索的爆速一般约为 6500～7200m/s 左右。不同产品、不同批号的爆速不一样，如果事先不测准 D_L 的值，误差将增大。

② 被测装药的 A 点应离开起爆端一定距离，使 A 点在不稳定爆轰区之外。对柱状装药，A 点距离雷管底部，应大于 3～4 倍装药直径。导爆索两端与被测装药的连接方式应当一致。

③ 固定在铅板上的导爆索应拉直固牢，两端略垫高，使这段导爆索与铅板之间有 3 毫米左右的间隙，这样击痕明显。

④ 铅板（可用厚度约 2 毫米的黄铜板或铝板代管，也可以用铅垫条）应平直，下面垫一块垫板（如厚 5 毫米以上的钢板），平放在地上。还要防止铅板抛出打弯。

2. 探针法

为了更精确地测量爆轰速度，可以使用脉冲示波器(oscilloscope)。测量原理与上相同，亦是测定爆轰波阵面通过炸药的两个截面距离以及所用的时间，不过记录时间改为示波器。这是利用爆轰波阵面具有导电性而建立起来的一种近代计时式的爆速测量法，测量装置由探针(probe)、脉冲讯号发生装置及电子示波器组成，如图 10.10 所示。图中 A、B、C、D 为四对探针（探针的对数可根据需要决定，但至少为两对），它们起传感作用。每对探针（相当于一对触点）都是两根直径为 10～30 微米的镍铬丝或铜丝，两根探针的间距为 1 毫米左右。爆轰波未到达之前，连接两根探针的回路是开路，当爆轰波阵面到达时线路接通（这是由于波阵面的产物处于高温高压状态下被电离成正负离子，具有很好的导电性）。当爆轰波阵面到达 A 点时立即将该处的一对探针接通，使回路上的电容 C_1 放电，给示波器一个脉冲信号。爆轰波继续传播到 B、C、D 各点，依次接通各对探针的回路，使示波器屏幕上出现一个个脉冲波形，用相机将这条带有一个个脉冲波形的扫描线连同时标拍摄下来，通过显微镜或比长仪(microscope or length-gaure)从底片上量出各脉冲的间隔时间 Δt_i，图 10.11 表示的为两对脉冲间的时间间隔 Δt。再利用两对探针间的相应距离 Δl_i，便可得到各个测量段上的平均爆速 D_i：

$$D_i=\frac{\Delta l_i}{\Delta t_i} \tag{10.145}$$

用这种方法测定的爆速在理论上可以得到 0.1%的精度。

可以用数字显示的微秒级的时间间隔测定仪或者专用的爆速测定仪来代替示波器，这样能直接读出爆轰波阵面通过各测量段所经历的时间 Δt_i，精度高而且使用方便。

3. 高速摄影法

[illegible]是属于前面所说的第二类爆速测定方法——扫描摄影法。该方法是利用爆轰波阵[illegible]强光，通过高速摄影机(high-speed camera)，把爆轰波阵面随时间的运动过程记[illegible]从而得到一条爆轰波阵面的位移与时间曲线（即轨迹扫描线），而后用工具显

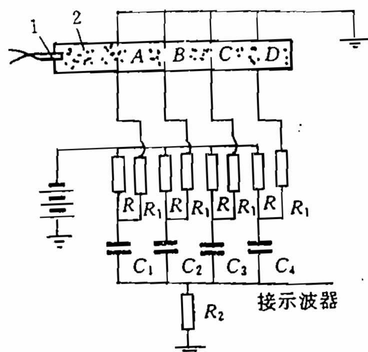


图 10.10　探针法测量系统示意图
1—雷管；2—被测装药

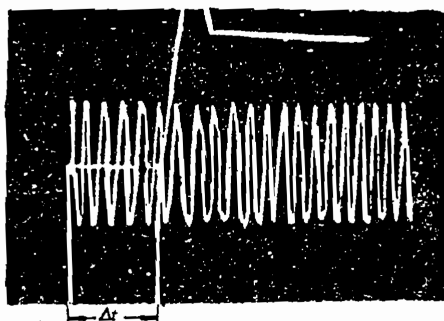


图 10.11　示波器屏幕上的脉冲信号与时标(原照临摹)

微镜测出曲线上各点的斜率，便得到各点的瞬时速度。

在这种方法中，目前常用的拍摄频率为每秒数百万幅的转镜式高速摄影机。这种摄影机可不分画幅而连续扫描摄影，从而可记录物体沿某一方向的高速运动过程。拍摄时，使用狭缝光阑(narrow stop)，狭缝方向与爆轰传播方向一致，通过狭缝摄取一条沿爆轰波传播方向的影像。由于摄影机光路中的一个平面反射镜的旋转，使反射到底片上的爆轰波阵面光点不但上下移动而且左右移动，于是在底片上形成一条感光曲线，现设爆轰波阵面的传播方向为 Y，转镜的扫描方向为 x，在展平的底片上，这条感光曲线如图 10.12(b)所示。

在图 10.12 中坐标 y 与 Y 方向一致，但坐标单位不同，相差一个倍数 β，y 与 Y 的关系为

$$y = \beta Y,\ \beta\text{—— 像物比(即放大系数)} \tag{10.146}$$

设转镜在底片上的扫描速度 v=const，则有

$$x = x_{A'} + vt,\quad x_{A'} = \text{const} \tag{10.147}$$

而爆速的定义为

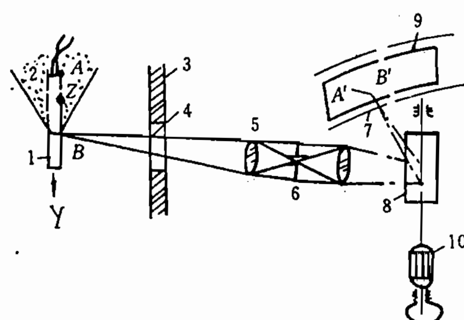
$$D = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$$

根据如上两式推出

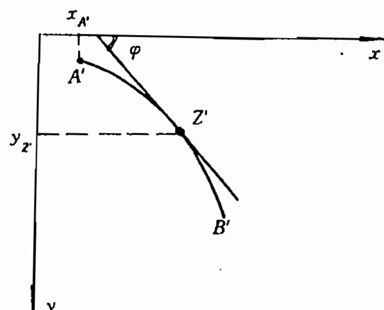
$$D = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{\beta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v}{\beta}\tan\varphi \tag{10.148}$$

其中，$\tan\varphi$ 为感光曲线(即扫描曲线)的斜率，只要找出曲线上某一点的切线倾角 φ，便可确定该点所对应的炸药柱截面处的爆速，如图 10.12(a)中药柱 Z 点对应着图 10.12(b)的 Z' 点。

如果被测装药段爆速稳定，则在底片上的扫描曲线为一条直线。图 10.13 所示的为包在压接管(即圆柱管)上、厚为 4.5mm 的太乳炸药爆轰过程的高速摄影照片，右边为被测装药示意图。爆轰自上而下，转镜自右向左旋转，故形成自右上角至左下角的扫描。照片上亮带的前缘是爆轰波阵面的扫描线(scanning line)、其后白亮区是爆轰产物。该照片的像物比和扫描速度为



(a) 测量原理示意图



(b) 反射光线在胶片上的扫描曲线示意图

图 10.12 转镜式高速摄影机测爆速的示意图

1—药柱；2—爆轰产物；3—防护墙；4—透光玻璃窗口；5—物镜；

6—狭缝；7—相机框；8—转镜；9—胶片；10—高速电机

$$\beta = 1/11.6, \quad v = 750\text{m/s}$$

从照片上测得对于爆轰稳定段：$\varphi = 21°46'$，这样由(6.135)式求得爆速

$$D = \frac{v}{\beta}\tan\varphi = 3480\text{m/s}$$

这种方法对于稳定爆速的测量误差不超过±0.8%，对于不稳定爆速的测量误差不超过 2.5%(如果扫描线很清晰的话)。该方法的缺点是手续繁多，而且精度不如探针法高。其优点在于能测出爆轰过程装药各截面处的瞬时爆速，以及爆速随时间的连续变化过程。

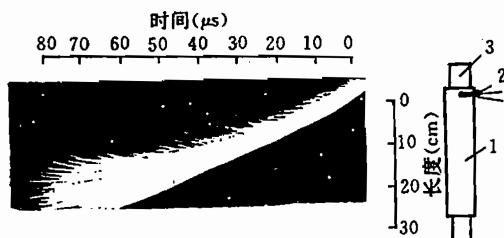


图 10.13 压接管上太乳炸药爆轰过程的扫描照片(原照临摹)

(像：物=1：11.6；扫描速度：750 米/秒)

1—太乳炸药；2—雷管；3—压接管

扫描速度 v 的确定。一般只知高速相机的转数 n 和扫描半径 R，根据几何光学可以确定 v，图 10.14 表示出转镜转角与反射光线的关系。入射光线一定，它与 x 轴的夹角为 γ；设转镜开始处于 MN 位置，入射光线 AO 的反射光线 BO 与 x 轴的夹角 θ

$$\theta = \pi - \gamma$$

当转镜旋转 α，这时它处于 $M'N'$ 的位置，入射光线 AO 的反射光线 $B'O$ 与 x 轴的夹角为：

$$\theta' = \pi - (\gamma - \alpha) + \alpha = \pi - \gamma + 2\alpha$$

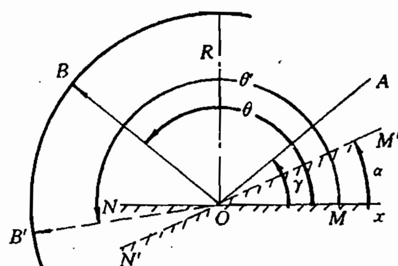


图 10.14 转镜位置与反射光线的关系

于是反射光线的转角 $\Delta\theta$

$$\Delta\theta = \theta' - \theta = 2\alpha \tag{10.149}$$

即转角旋转 α 角时，反射扫描线旋转 2α 角。

利用(10.149)式、转数 n 和扫描半径 R，便可求得扫描速度 v

$$v = 4\pi R n \tag{10.150}$$

除了转镜式高速相机外，还有转鼓式高速相机。这种相机由于转速的限制，只能用于低速过程的测量。

10.12 爆轰波阵面形状的控制

在实际应用中，特别是在军事上和工程技术中，需要一定形状的波阵面：有时需要作用在物体上的爆轰波阵面是平面；有时需要爆轰波阵面是球面或其他形状。而实际炸药的引爆却是在一点或多点，所形成的爆轰波阵面形状为球面状或类球面状，在多数情况下，带有一定的任意性，这与装药形状与均匀度有关。

如在无限大、均质炸药体中某一点处引爆，所形成的爆轰波阵面必然为中心对称的球面波，随着时间的推移，波阵面不断扩大，但波形形状不变，永为球面；但如果炸药非均质各向异性，爆轰波阵面则为非球面。对于无限长的均质柱形装药而言，从端面一点引爆，所形成的爆轰波阵面开始时亦为球面(当然是作为球面的一部分)，不过其曲率半径并不是连续地无限增大，根据实验，当波阵面传播到相当于装药直径的 2～3.5 倍时，对于大多数凝聚炸药其爆轰波阵面的曲率半径不再增大；如果药柱直径小到接近于该炸药的临界直径时，爆轰的波阵面只要传到相当于 1/2 装药直径的距离时，波阵面的曲率半径便不增大了。

对于均质炸药而言，只要一点引爆，在炸药中传播的爆轰波阵面就是球面。之所以如此，是因为爆轰扰动的传播同光波的传播类似，它们都遵守几何光学的惠更斯－费马原理(Huygens-Fermat's principle)，即在均质炸药中从一点开始的爆轰扰动以一定的速度呈球面状向四周扩展，当这个扰动球面扫过炸药的每个点，这些点上的炸药便立即爆轰，它们各自又作为新的爆轰扰动源各呈球面状向未爆炸药中扩展，这些小球面的包络构成一个与原球面同心的新球面——爆轰波阵面，如图 10.15 所示，以此类推，故此爆轰波阵面以球面形式向外传播。

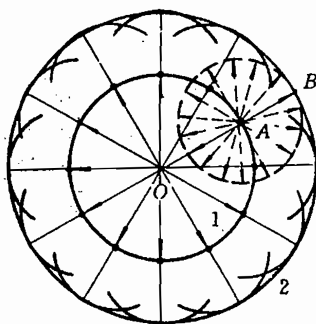


图 10.15 从一点引爆传播的爆轰波阵面
1—$t=t$ 时刻的爆轰波阵面；
2—$t=t+\Delta t$ 时刻的爆轰波阵面；
OA—爆轰扰动沿一个方向传播的轨迹；
A—在 $t=t$ 时刻爆轰波阵面上一个扰动点

上述原理的另一种说法是，扰动从一点传到另一点所用时间最短，即"光程最小"(optical path is minimum)。如图所示扰动从 O 点最先传到 B 点必然沿直线$\overline{OA}$，因所用时间最短。

根据上述原理我们可以利用高低爆速的炸药组合成一定形状的波形发生器(wave-form generator)，以使得在炸药的装药中获得直线形爆轰波、环形爆轰波、平面爆轰波、球面爆轰波等。

10.12.1 直线波发生器和平面波发生器

1. 简单型的波发生器

最简单的直线波发生器如图 10.16 所示。它是由高爆速炸药(敷在最外面一层,很薄,数学处理时视其厚度为零),其爆速为 D_1;和低爆速炸药组成,其爆速为 D_2,整个发生器呈三角板形状,引爆点(放置雷管处)在 O 点,只要两种爆速 D_1、D_2 和角度 α 满足一定的条件,便能形成一个直线波,其波阵面平行于 x 轴。

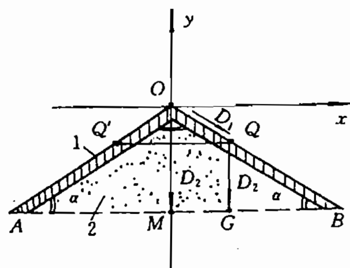


图 10.16 简单直线波发生器

1—高速炸药;2—低速炸药

由 O 点开始的爆轰扰动一方面沿高速药薄层由 $O \to Q \to B$,$O \to Q' \to A$ 传播;另一方面,高速药爆轰后又引起低速药爆轰。现在要求在炸药(不管高速药还是低速药)中传播的各个爆轰扰动都同时到达平行于 x 轴的任何一条直线,如直线$\overline{AB}$,则要求下式满足:

$$\frac{\overline{OQ}}{D_1} + \frac{\overline{QG}}{D_2} = \frac{\overline{OM}}{D_2}$$

其中,Q 为$\overline{OB}$上任意一点,(在这里仍假定高速药厚为零)。根据几何关系,则有

$$\overline{OG} = \overline{OM} - \overline{OQ}\sin\alpha$$

将该式代到上式则推出

$$\frac{D_2}{D_1} = \sin\alpha \tag{10.151}$$

因此,只要波形发生器的底角 α 按(10.151)式来取值,就可获得直线形的爆轰波阵面。将图 10.16 所示的$\overline{AB}$直线之下接上一块平板炸药,则在这块板形炸药中便产生一条直线形的爆轰波阵面,因此把图 10.16 所示的装药称作直线波发生器。

将图 10.16 所示的三角形药板绕 y 轴旋转便构成一个圆锥,这个外敷一层高速药的圆锥体便是一个简单的平面波发生器,在该圆锥面之下安上圆柱形炸药,就可在该炸药中产生平面形爆轰波阵面。

2. 常用的波发生器

如上所述波形发生器最大的缺点是不考虑高爆速炸药的度厚,因而获得的直线波和平面波不精确。实际高速药有一定的厚度,从稳定爆速的角度也应有一定的厚度,而且一般用雷管引爆高速药,中间要经过传爆药,因此常用的直线波发生器,其结构如图 10.17 所示。

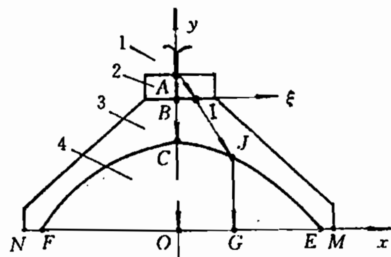


图 10.17 常用的直线波发生器

1—雷管;2—传爆药柱;3—高爆速炸药;4—低爆速炸药

设传爆炸药的爆速为 D_1,高速药的爆速为 D_2,低速药的爆速为 D_3。当然各种炸药在起爆后爆速立刻稳定不变。

按惠更斯一费马原理,雷管引爆后由 A 产生的爆轰扰动沿直线向各方向辐射状传

出，当这种爆轰扰动到达传爆药与高速药的分界 ξ 轴之后，又以新速度 D_2 向高速药中传出，再到达高、低速药的分界面 $\overset{\frown}{ECF}$，爆轰扰动再以新的速度 D_3 向低速药中传出。由 A 点发出的最先到达 x 轴上任一点 G 的爆轰扰动，走 $\overline{AI}$、$\overline{IJ}$、$\overline{JG}$ 这条路线，所用的时间 t 为

$$t=\frac{\overline{AI}}{D_1}+\frac{\overline{IJ}}{D_2}+\frac{\overline{JG}}{D_3} \tag{10.152}$$

由于 G 点是任取的，而且要求最先到达 $\overline{MN}$ 的各爆轰扰动（组成一个波阵面）经历的时间相等，即要求：

$$t\equiv t_0$$

$$t_0=\frac{\overline{AB}}{D_1}+\frac{\overline{BC}}{D_2}+\frac{\overline{CO}}{D_3}$$

现假定 $\overline{AB}=h_1$，$\overline{BC}=h_2$，$\overline{CO}=h_3$，而 I 点和 J 点的坐标为

$$I(\xi,h_2+h_3),\quad J(x,y)$$

于是(10.152)式写成

$$t=\frac{\sqrt{h_1^2+\xi^2}}{D_1}+\frac{\sqrt{(\xi-x)^2+(h_2+h_3-y)^2}}{D_2}+\frac{y}{D_3}\equiv t_0 \tag{10.153}$$

在上式中 h_1、h_2、h_3 为参数，ξ 和 x 为自变量，$y=y(x)$ 未知，它作为高低速药的分界曲线是待求的。从恒等式和费马原理都要求：在(10.153)式中，当 t 作为 ξ、x 的函数时，应有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial t}{\partial \xi}=\dfrac{\xi}{D_1\sqrt{h_1^2+\xi^2}}+\dfrac{\xi-x}{D_2\sqrt{(\xi-x)^2+(h_2+h_3-y)^2}}=0\\[2ex] \dfrac{\partial t}{\partial x}=\dfrac{x-\xi}{D_2\sqrt{(\xi-x)^2+(h_2+h_3-y)^2}}\\[2ex] \qquad +\left[\dfrac{y-h_2-h_3}{D_2\sqrt{(\xi-x)^2+(h_2+h_3-y)^2}}+\dfrac{1}{D_3}\right]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}$$

即

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\xi}{D_1\sqrt{h_1^2+\xi^2}}+\frac{\xi-x}{D_2\sqrt{(\xi-x)^2+(h_2+h_3-y)^2}}=0\\ &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{D_3(\xi-x)}{D_3(y-h_2+h_3)+D_2\sqrt{(\xi-x)^2+(h_2+h_3-y)^2}}\end{aligned}\right\} \tag{10.154}$$

由(10.154)式可以求解出高低速药的分界曲线 $y=y(x)$，即 $\overset{\frown}{ECF}$，这样所求得的 $y=y(x)$ 代进(10.153)式中，它作为恒等式一定满足。高低速药的分界曲线求得后便可在一个平面上做成如图 10.17 所示的直线波发生器。

将图 10.17 所示的直线波发生器绕 y 轴旋转便得到了一定直径的常用平面波发生器。

10.12.2 环形波发生器和球面波发生器

我们这里所研究的是环形收聚爆轰波和球面收聚爆轰波，而不是发散的爆轰波，发散的环形和球面爆轰波无须设计特殊的发生器，只要在均质炸药中一点引爆就可达到目的。

由于实际需要，往往要求产生环形收聚爆轰波和球面收聚爆轰波，如在爆炸压接导线的工艺中就希望采用环形发生器。

一般的环形波发生器都是采用高低爆速炸药组合一定的形状。图 10.18 所示的就是一种典型的环形波发生器。它的外层是一层厚度视为“零”的高速炸药，内里为低爆速炸药。将它套在环形(或柱形)待爆的炸药上便会引起圆形轰波阵面向环形(或柱形)装药的圆心传播；如果待爆的炸药是个薄薄的圆管壳体，这将造成一个从此开始、以管轴为对称的环形爆轰波阵面沿管轴方向传播。

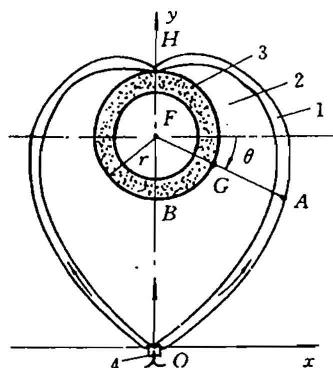


图 10.18 环形波发生器
1—高爆速炸药；2—低爆速炸药；3—待爆装药；4—雷管

由 O 点引爆后的爆轰扰动一方面沿高爆速药层传播，另一方面向低爆速炸药中传播。例如，沿高速药层传到 A 点的爆轰扰动，除了继续沿高爆速炸药传播外，还向低爆速药中传播，按费马原理，从 A 点发出的爆轰扰动最先到达 $r=r_*$ 的圆周线的则一定沿 $\overline{AF}$ 线，于是最先由 O 开始经 A 点到 G 点所用时间：

$$t=\frac{\overset{\frown}{OA}}{D_1}+\frac{\overline{AG}}{D_2}=\frac{\overset{\frown}{OA}}{D_1}+\frac{\overline{AF}}{D_2}-\frac{r_*}{D_2}$$

其中，D_1 为高爆速炸药的爆速，D_2 为低爆速炸药的爆速。

按在 $r=r_*$ 圆周上同时起爆的要求，则要求始发于 O 点的诸爆轰扰动须同时到达这个圆周上，即有

$$\frac{\overset{\frown}{OA}}{D_1}+\frac{\overline{AF}}{D_2}-\frac{r_*}{D_2}=\frac{\overset{\frown}{OB}}{D_2}=\frac{\overline{OF}}{D_2}-\frac{r_*}{D_2}$$

即

$$\frac{\overset{\frown}{OA}}{D_1}+\frac{\overline{AF}}{D_2}=\frac{\overline{OF}}{D_2} \tag{10.155}$$

从(10.155)式的得来，我们会得到意外的一个重要性质：只要该式满足，就可保证同时起爆 r_* 取任何值的待爆炸药环，但须 $r_*\leqslant\overline{FH}$.

现在问题的关键在于，如何根据(10.155)式求得环形波发生器的外形曲线，为此引进极坐标(r,θ)，以图 10.18 的 F 点为极点，θ 为 r 与水平方向的夹角，顺时针为正。这样，A 点的坐标(x,y)可写成

$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos\theta\\y&=r_c-r\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{10.156}$$

其中，$r_0=\overline{OF}$，弧长 $\overset{\frown}{OA}$ 表成

$$\overset{\frown}{OA}=-\int_{\pi/2}^{\theta}\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\mathrm{d}\theta$$

于是(10.155)式可写成

$$-\int_{\pi/2}^{\theta}\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\mathrm{d}\theta=\frac{D_1}{D_2}(r_0-r)$$

将该式对 θ 微分，并考虑到$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}>0$，则推出

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\frac{r}{\sqrt{\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2-1}}$$

积分后，给出

$$r=r_0\cdot\exp\left[\frac{\theta-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2-1}}\right]\tag{10.157}$$

化成直角坐标为

$$\left.\begin{aligned}x&=r_0\cdot\exp\left[\frac{\theta-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2-1}}\right]\cdot\cos\theta\\y&=r_0\left\{1-\exp\left[\frac{\theta-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2-1}}\right]\cdot\sin\theta\right\}\end{aligned}\right\}\tag{10.158}$$

式(10.157)或(10.158)便是所求的环形波发生器的外形曲线——对数螺线(logarithmic spiral)。

然而在实际问题中，预先给定的是环形波发生器的心点 F 到其外边缘的最小距$\overline{FH}$，见图 10.18. 现设：$\overline{FH}=r_{\min}$，由(10.157)式可以推出

$$r_0=r_{\min}\cdot\exp\left[\frac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2-1}}\right]$$

因此式(10.157)和(10.158)可以写成

$$r=r_{\min}\cdot\exp\left[\frac{\theta+\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2-1}}\right]\tag{10.159}$$

$$\left.\begin{aligned}x&=r_{\min}\cdot\exp\left[\frac{\theta+\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2-1}}\right]\cdot\cos\theta\\y&=r_{\min}\left\{\exp\left[\frac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2-1}}\right]-\exp\left[\frac{\theta+\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2-1}}\right]\sin\theta\right\}\end{aligned}\right\}\tag{10.160}$$

在上式中消去角 θ 后，便可给出环形波发生器的外形曲线 $y=f(x)$.

将图 10.18 所示的环形波发生器绕 y 轴旋转便得到了球面波发生器。

为了特殊目的的需要，我们还可实现其他爆轰波形，如将炸药做成某种形状、中间加入一定形状的惰性物质(如塑料)等。本章主要参考文献[1]和[2]。

附录 10.1

炸药爆轰产物的生成热

分子式	炸药名称	C,H,N,O 含量(克原子数/100g)				分子量 M	298K 时的生成热(kcal/mol)
		C	H	N	O		
H_2	氢		100			2	0.0
N_2	氮			7,15		28	0.0
CO	一氧化碳	3.57			3.57	28	26.4
CO_2	二氧化碳	2.27			4.54	44	94.05
H_2O	水		11.12		5.56	18	57.80(气);68.4(液)
H_2O_2	过氧化氢		5.89		5.89	34	44.9
NH_3	氨		17.65	5.88		17	11.04
NH_4N_3	迭氮化铵		6.67	6.67		60	−19.0
CH_4	甲烷	6.25	25.0			15	17.89
CH_3OH	甲醇	3.13	12.5		3.13	32	48.08
CH_2O_2	甲酸	2.17	4.35		4.35	46	86.67
O_2	氧				6.26	32	0.0
OH	氧氢基		5.89		5.89	17	−10.06
N_2O	氧化亚氮			4.54	2.27	44	−18.0
NO	一氧化氮			3.33	3.33	30	−21.60
NO_2	二氧化氮			2.17	4.34	46	−4.1
H	原子氢		100			1	−52.09
N	原子氮			7,15		14	−85.09
O	原子氧				6.25	26	−59.16
HCN	氰氢酸	3.70	3.70	3.70		27	−31.2
C_2N_2	氰气	3.85		3.85		52	−73.9
CH_2O	甲醛	3.33	6.67		3.33	30	27.7
C_2H_2	乙炔	7.70	7.70			26	−54.9
C_2H_6	乙烷	6.67	20.0			30	25.0
C_2H_5OH	乙醇	4.35	13.05		2.17	46	56.24
C(固体)	碳	8.33				12	0.0
CH_3NO_2	硝基甲烷	1.64	4.92	1.64	3.28	61	25.6
$CH_3N_3O_3$	硝酸甲酯	0.95	2.86	2.86	2.86	105	131.9
$CH_4N_4O_2$	硝基胍	0.96	3.84	3.84	1.92	104	18.0
$CH_5N_3O_4$	硝酸脲	0.81	4.07	2.44	3.25	123	130.0
$CH_6N_2O_3$	硝酸甲胺	1.06	6.39	2.13	3.19	94	58.0
$CH_6N_4O_3$	硝酸胍	0.82	4.92	3.28	2.46	122	90.5
$C_2H_5NO_2$	硝基乙烷	2.67	6.66	1.33	2.67	75	35.4
$C_2H_5NO_3$	硝酸乙烷	2.20	5.50	1.10	3.30	91	33.7
$C_2H_4(NO_3)_2$	二硝酸乙烷	1.32	2.63	1.32	3.95	152	56.0
$C_2H_{10}N_4O_6$	二硝酸乙二胺	1.08	5.38	2.15	3.22	186	149.0

分子式	炸药名称	C,H,N,O 含量（克原子数/100g）				分子量 M	298K 时的生成热 (kcal/mol)
		C	H	N	O		
$C_3H_5N_3O_9$	NG（硝化甘油）	1.32	2.20	1.32	3.99	227	82.7
$C_3H_6N_6O_6$	RDX	1.35	2.70	2.70	2.70	222	−18.3
C_3N_{12}	三氮氰脲	1.47		5.88		204	−222.0
$C_4H_6N_4O_{12}$	二硝酸二乙酯	1.33	1.99	1.33	3.97	302	114.0
$C_4H_8N_4O_7$	二甘醇二硝酸酯	2.04	4.08	1.02	3.57	196	99.4
$C_4H_8N_4O_8$	二硝酸二乙酯硝胺	1.67	3.33	1.67	3.33	204	77.5
$C_5H_8N_4O_{12}$	PETN	1.58	2.53	1.27	3.80	316	123.0
$C_6N_{12}O_6$	三硝基三氮苯	1.79		3.57	1.79	336	−272.0
$C_6H_3N_3O_6$	1,2,4 三硝基苯	2.82	1.41	1.41	2.82	213	2.3
	1,3,5 三硝基苯	2.82	1.41	1.41	2.82	213	−12.4
$C_6H_3N_3O_7$	苦味酸	2.62	1.31	1.31	3.06	229	53.5
$C_6H_3N_3O_8$	2,4,6 三硝基间苯二酚	2.45	1.22	1.22	3.27	245	125.0
$C_6H_3N_5O_8$	2,3,4,6 四硝基苯胺	2.20	1.10	1.83	2.93	273	8.5;−2,5(D)
$C_6H_4N_2O_4$	二硝基苯	3.57	2.38	1.19	2.83	168	4.0(m);5.6(P)
$C_6H_4N_2O_5$	二硝基酚	3.26	2.17	1.09	2.72	184	53.0
$C_6H_4N_4O_6$	2,4,6 三硝基苯胺	2.63	1.76	1.76	2.63	228	27.0
$C_6H_5N_3$	叠氮基苯	5.04	4.20	2.52		119	
$C_6H_5NO_2$	硝基苯	4.87	4.07	0.81	1.63	123	6.2
$C_6H_5N_3O_4$	2,3 二硝基苯胺	3.28	2.72	1.64	2.19	183	15.5
$C_6H_5N_3O_7$	三硝基苯甲醚	2.88	2.06	1.24	2.88	243	44.2
$C_6H_5N_2O_2$	硝基苯胺	4.35	4.35	1.45	1.45	138	16.0
$C_6H_6N_4O_7$	苦味酸铵	2.44	2.44	1.62	2.84	246	94.0
$C_6H_8N_6O_{18}$	硝基甘露糖醇	1.33	1.77	1.33	3.98	452	152.0
$C_6H_{14}N_6O_6$	二硝酸六胺	2.25	5.26	2.25	2.25	226	97.5
$C_7H_4N_4O_9$	四硝基苯甲醚	2.43	1.39	1.39	4.32	288	28.5
$C_7H_5N_3O_6$	TNT	3.08	2.20	1.32	2.64	227	13.0
$C_7H_5N_5O_8$	特屈儿	2.44	1.74	1.74	2.79	287	−9.3
$C_7H_6N_2O_4$	DNT	3.85	3.30	1.10	2.20	182	6.9
$C_7H_7NO_2$	硝基甲苯	5.11	5.11	0.73	1.46	137	8.4(O) 12.7(m) 17.3(P)
$C_{10}H_4N_4O_8$	1,3,6,8-四硝基萘	3.24	1.30	1.30	1.30	308	−1.0
$C_{10}H_5N_3O_6$	1,3,8-三硝基萘	3.80	1.90	1.14	2.28	263	6.7
$C_{10}H_6N_2O_4$	二硝基萘	4.59	2.75	0.92	1.84	218	−4.6
$C_{10}H_9N$	萘胺	6.99	6.29	0.70		143	20.9
$C_{10}H_{16}O$	樟脑	6.57	10.52		0.66	152	74.9
$C_{11}H_{15}NO_2$	二乙烯胺基甲酸乙酯	5.70	7.77	0.52	1.04	193	86.2
$C_{12}H_{11}N$	二苯胺	7.10	6.50	0.59		169	−31.4
$C_{13}H_{12}N_2O$	二苯脲	6.13	5.66	0.94	0.47	212	1.0
	硝化棉					212	
	14.1%N	2.02	2.36	3.70	1.01		500.0kcal/kg
	13.45%N	2.10	2.54	3.67	0.96		588.0kcal/kg
	12.81%N	2.18	2.72	3.65	0.91		605.0kcal/kg
	12.2%N	2.25	2.87	3.62	0.87		664.0kcal/kg
	11.64%N	2.32	3.03	3.59	0.83		699.0kcal/kg

分子式	炸药名称	C,H,N,O 含量(克原子数/100g)				分子量 M	298K 时的生成热 (kcal/mol)
		C	H	N	O		
	11.05%N	2.39	3.19	3.57	0.79		754.0kcal/kg
$C_2H_2HgO_2$	雷汞					284.6	−65.4
$C_6H_3N_3O_9Pb$	三硝基间苯二酚铅					468.0	200.0
$Pb(N_3)_2$	叠氮化铅					291.3	−112.0
$C_6H_2ClN_3O_6$	2,4,6 三硝基氯苯					247.6	−111
$C_6HN_3O_8Pb$	斯蒂夫酸铅					450.3	−92.3
C_3H_6O	环氧乙烷					58.081	−22.17(气)
							−28.84(液)
C_3H_8	丙烷					44	24.75
C_4H_{10}	丁烷					58	29.7
C_5H_{12}	戊烷					72	34.7
C_6H_{14}	己烷					86	40.0
C_7H_{16}	庚烷					100	45.4
C_8H_{18}	正辛烷					114	52.7

部分无机盐及氧化物的生成热

分子式	物质名称	分子量 M	298K 时的定压生成热(kcal/mol)
KNO_3	硝酸钾	101.09	118.1
$NaNO_3$	硝酸钠	84.99	111.7
NH_4NO_3	硝酸铵	80.0	87.4
$KClO_3$	氯酸钾	122.54	93.2
$NaClO_3$	氯酸钠	106.44	83.6
$KClO_4$	过氯酸钾	138.54	104.5
$NaClO_4$	过氯酸钠	122.44	93.0
NH_4ClO_4	过氯酸铵	117.45	70.2
Al_2O_3	三氧化二铝	101.96	393.3
Fe_2O_3	三氧化二铁	159.68	198.5
Fe_3O_4	四氧化三铁	231.52	265.7
Sb_2S_3	三硫化锑	339.40	38.2
MgO	氧化镁	40.31	145.8

附录 10.2

按 BKW 状态方程计算的爆轰参数与实测值比较

炸药名称	装药密度 ρ_0 (g/cm^3)	爆轰参数	实测数据	计算数据	
				适于 RDX 参数	适于 TNT 的参数
黑索金(RDX) $C_3H_6N_6O_6$	1.80	D (m/s)	8754	8796	8263
		p_H (kb)	347	324	324
		T_H (K)	—	4039	2861
		k (绝热指数)	2.98	3.29	2.79
黑索金(RDX) $C_3H_6N_6O_6$	1.0	D	5981	6128	
		p_H	—	108	
		T_H	—	3600	
		k	—	2.48	
奥托金(HMX) $C_4H_8N_8O_8$	1.90	D	~9100	9159	8556
		p_H	~393	395	364
		T_H	—	2364	2693
		k	3.0	3.03	2.82
太安(PETN) $C_5H_8N_4O_{12}$	1.67	D	7980	8056	7696
		p_H	300	280	267
		T_H	3400	3018	3226
		k	2.55	2.86	2.70
硝化甘油(NG) $C_3H_5N_3O_9$	1.59	D	7580	7700	
		p_H	—	246	
		T_H	3470	3216	
		k	—	2.83	
特屈儿 $C_7H_5N_5O_8$	1.70	D	7560	7629	
		p_H	—	251	
		T_H	—	2917	
		k	—	2.93	
四硝基甲烷 $C(NO_2)_4$	1.64	D	6360	6421	
		p_H	159	162	
		T_H	2800	1341	
		k	3.17	3.16	
硝基甲烷(NM) CH_3NO_2	1.128	D	6290	6463	6390
		p_H	141	130	130
		T_H	3380	3820	3167
		k	2.17	2.62	2.54
黑喜儿(HNB) $C_6N_6O_6$	1.70	D	8070	7735	
		p_H	—	272	
		T_H	—	4292	
		k	—	2.74	
B 炸药 $C_{6.851}H_{8.75}N_{7.65}O_{8.3}$	1.713	D	8030	8084	
		p_H	294	284	
		T_H	—	2763	
		k	2.76	2.94	

炸药名称	装药密度 ρ_0 (g/cm^3)	爆轰参数	实测数据	计算数据	
				适于 RDX 参数	适于 TNT 的参数
奥克托儿 $C_{6.835}H_{10.025}N_{9.215}O_{10.43}$	1.809	D	8476	8555	
		p_H	343	333	
		T_H	—	2578	
		k	2.79	2.98	
Alex20 $C_{1.873}$ $H_{2.469}$ $N_{1.613}$ $O_{2.039}$ $Al_{0.7338}$	1.801	D	7530	7450	
		p_H	230	243	
		T_H	—	5142	
		k	3.44	3.11	
1/4.45EDNA/TNM $B_{10}H_{18}C_{6.45}N_{17.8}O_{35.6}$	1.427	D	6820	6897	
		p_H	167	196	
		T_H	—	5409	
		k	2.97	2.46	
TFNA $C_5H_7N_4O_6F_3$	1.692	D	7400	7569	
		p_H	249	242	
		T_H	—	2204	
		k	2.72	3.01	
RDX/TFNA 65/35	1.754	D	8220	8278	
		p_H	324	302	
		T_H	—	2446	
		k	2.66	2.98	
HNO_3/CH_3NO_2 $C_{6.434}H_{3.0192}N_{12.869}O_{3.4415}$	1.29	D	6540	6666	
		p_H	145	153	
		T_H	3400	2477	
		k	2.80	2.76	
1/1.25AN/TNM $C_{4.25}H_3N_6O_{10}$	1.380	D	6710	7074	
		p_H	156	192	
		T_H	4000	4760	
		k	2.98	2.59	
梯恩梯(TNT) $C_7H_5N_3O_6$	1.64	D	6950	7197	6950
		p_H	190	213	206
		T_H	—	2829	2937
		k	3.16	2.98	2.85
液态 TNT	1.447	D	6580	6556	6406
		p_H	172	160	157
		T_H	3030	3055	3126
		k	2.64	2.87	2.77
二氨基三硝基苯(DATB) $C_6H_5N_5O_6$	1.788	D	7520	7959	7559
		p_H	259	282	264
		T_H	—	2477	2667
		k	2.90	3.02	2.86
三氨基三硝基苯(TATB)	1.895	D	7900	8411	7348
		p_H	—	326	297
		T_H	—	1887	2428
		k	—	3.11	2.92

附录 10.3

按康姆莱特公式计算的 p_H、D 与实验值的比较

炸药种类及 φ 值	装药密度 ρ_0 (g/cm³)	爆速 D (mm/μs)			爆轰压 p_H (kb)		
		计算值	实测值	差(%)	计算值	实测值	差(%)
TNT($C_7H_5N_3O_6$)	1.00	5.111	5.100	+0.2	75.4	76.3	−1.2
φ=4.838	1.45	6.411	6.457	−0.7	158.5	162.0	−2.2
	1.59	6.814	6.940	−1.8	190.6	202	−5.6
	1.62	6.898	7.000	−1.4	197.8	210	−5.8
	1.64	6.954	6.950	+0.1	202.7	190	+6.7
RDX($C_3H_6N_6O_6$)	1.00	6.048	5.980	+1.1	—	—	—
φ=6.784	1.20	1.731	6.750	−0.3	152.2	152	+0.1
	1.59	8.063	8.100	−0.5	267.1	287	−6.9
	1.63	8.199	8.314	−1.7	280.8	283.7	−1.0
	1.80	8.780	8.754	+0.3	342.5	347.0	−1.3
HMX($C_4H_8N_8O_6$)	1.90	9.117	9.100	+0.2	380.9	393	−3.1
φ=6.772	1.77	8.671	8.500	+2.0	—	—	—
特屈儿($C_7H_5N_5O_8$)	1.614	7.413	7.581	−2.2	227.9	226.4	+0.7
φ=5.615	1.70	7.681	7.560	+1.6	252.8	263	−3.9
TNT/RDX40/60	1.680	7.902	7.950	−1.0	263.4	283	−7.0
φ=5.992	1.715	—	—	—	274.6	287	−4.3
	1.720	7.999	7.900	+0.4	—	—	—
HMX/TNT75/25	1.803	—	—	—	318.4	314	+1.4
φ=6.288	1.800	8.451	8.357	+0.9	—	—	—
PETN/TNT50/50 φ=5.796	1.682	7.748	7.662	+1.1	255.5	245.5	+4.1
PETN/TNT45/55 φ=5.680	1.677	7.653	7.420	+3.1	248.9	239.6	+3.9
4号炸药($C_5H_6N_6O_{14}$)	1.694	8.453	8.158	+3.5	305.45	—	—
φ=6.8319	1.780	8.748	—	—	337.25	—	—
PETN($C_5H_8N_4O_{12}$)	1.67	—	—	—	295.7	310	−4.6
φ=6.805	1.67	8.354	7.980	+4.7	295.7	300	−1.4
	1.77	8.695	8.600	+1.1	332.1	350	5.1
EDNA($C_2H_6N_4O_4$) φ=6.473	1.562	7.789	7.750	+0.5	246.1	273	−9.9
TATB($C_6H_6N_6O_6$)	1.847	7.661	7.660	−0.0	264.5	259	+2.1
φ=4.976	1.51	—	—	—	176.8	174.6	+1.3
DATB($C_6H_5N_5O_5$)	1.780	7.655	7.600	+0.7	258.3	251	+2.9
φ=5.233	1.788	—	—	—	260.6	259	+0.6
	1.790	7.685	7.575	+1.5	—	—	—
硝基甲烷(NM)	1.128				134.1	128	+4.7
(CH_3NO_2)	1.125				133.4	140	−4.7
φ=6.769	1.140				137.0	133	+3.0
	1.159				141.6	148	−4.3
RDX/TNT50/50 φ=5.806	1.627	7.580	7.660	−1.1	239.4	231.1	+3.5

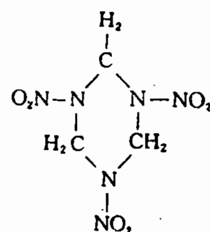
炸药种类及φ值	装药密度 ρ_0 (g/cm^3)	爆速 D (mm/μs)			爆轰压 p_H (kb)		
		计算值	实测值	差(%)	计算值	实测值	差(%)
RDX/TNT64/36 $\varphi=6.063$	1.717	8.036	7.990	+1.2	278.4	295	−5.6
	1.714	8.040	7.990	+0.6	277.5	293	−5.3
	1.714	—	—	—	277.5	290	−4.4
	1.713	—	—	—	277.2	294	−5.8
PDX/TNT75/25 $\varphi=6.292$	1.648	7.960	7.952	+0.1	266.2	275.9	−3.5
RDX/TNT77/23 $\varphi=6.319$	1.743	—	—	—	299.1	313	−4.4
	1.752	8.137	8.950	+0.2	302.2	316	−4.4
HMX/TNT75/25 $\varphi=6.288$	1.803	8.302	8.539	−0.7	318.4	314	+1.4
HMX/TNT77.6/22.4 $\varphi=6.320$	1.821	8.556	8.480	+0.5	326.6	342	−4.5
TNB($C_6H_3N_3O_6$) $\varphi=5.105$	1.64	7.152	7.270	−1.6	213.9	219	−2.3
NG($C_3H_6N_3O_9$) $\varphi=6.837$	1.592				269.9	253	+6.7

习题

10.1 求黑索金($C_3H_6N_6O_6$)的生成热。

已知在黑索金的分子结构中有：

$$\begin{cases} 6\text{个}: H-C \\ 6\text{个}: C-N \\ 3\text{个}: N-NO_2 \end{cases}$$



题图 10.1

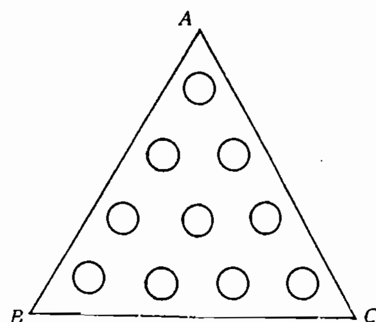
10.2 求密度 $\rho_0=1.8\text{g/cm}^3$，爆速 $D=8830\text{m/s}$ 的 RDX(黑索金)在爆轰波阵面上的压力 p_H、密度 ρ_H，速度 u_H 温度 T_H。

10.3 计算混合炸药 85HMX/15 Viton A 的爆速 D，已知该炸药的密度 $\rho_0=1.860\text{g/cm}^3$。

10.4 计算混合炸药 80TNT/20Al 的爆压 p_H，已知该炸药密度为 $\rho_0=1.7\text{g/cm}^3$.

10.5 计算混合炸药 80HMX/20VitonA 的爆压 p_H，已知该混合炸药的密度 $\rho_0=1.870\text{g/cm}^3$。

10.6 如图所示的等边三角形均厚的药板，板上打了如图示的圆孔。如果从三角药板的一角(如 A 点)起爆且起爆后立即成为稳定爆轰，则爆轰扰动就能近似地同时到达该角所对应的边(如 BC)。试证明之。



题图 10.6

参考文献

[1] 北京工学院八系．爆炸及其作用．北京:国防工业出版社,1979

[2] Ф. A. 鲍姆等著．众智泽．爆炸物理学．北京:科学出版社,1963

[3] 王礼立．应力波基础．北京:国防工业出版社,1985

[4] 吕洪生,张学书．炸药爆轰产物绝热指数的确定．全国气体动力学物理气体学术会议,1990

[5] 吴雄．混合炸药参数计算及其方程的建立．私人通讯,1976

[6] Mader C L. Detonation properties of Condensed Explosives Computed Using the BKW equation of states. LA-2900

[7] Kamlet M, etal. J. Chem. phys. 1968. 48,43

[8] 柏克寒等．太乳炸药与爆炸压接．北京:水力电利出版社,1978

[9] 薛鸿陆．爆轰学教程．国防科技大学,1982

第十一章　爆轰产物的飞散与爆炸作用

在上一章我们研究了爆热、爆轰波阵面的结构以及爆轰波阵面上的物理量，总之考虑了爆轰波的自身规律。本章将研究爆轰产物的飞散及爆炸作用。

11.1　爆轰产物一维飞散的解

在爆轰波阵面之后的产物中永远伴随着稀疏波的传播，该波紧跟在爆轰波阵的化学反应区之后。之所以造成这种后果，是由于紧靠化学反应区的爆轰产物以很高的速度朝爆轰波传播方向运动，因而产生稀疏波，使之爆轰波阵面后的产物区密度减小，而压力下降。爆轰产物的运动同爆轰波阵面的形状以及周边的环境有关，最简单的情况是一维飞散。

如下，我们先考虑爆轰产物的一维运动，并假定产物作为多方气体的等熵运动。

11.1.1　爆轰产物的一维平面飞散运动

假定爆轰是稳定的，且爆轰波阵面为平面，其后的产物相当在一个无限长的刚性直管中流动。对于这种运动其控制方程组为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0\\&\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0\\&p=A\rho^{k}\\&A=\mathrm{const},\quad k\equiv\mathrm{const}\end{aligned}\right\}\tag{11.1}$$

该方程组即气体的一维平面等熵流动的方程组，当然可以化成(7.115)式的形式，即

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2}{k-1}a\frac{\partial a}{\partial x}=0\\&\frac{2}{k-1}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{2}{k-1}u\frac{\partial a}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0\end{aligned}\right\}\tag{11.2}$$

并可求得特征线解(参见(7.113)式

沿 C_+

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u+a\\&\mathrm{d}u+\frac{2}{k-1}\mathrm{d}a=0\end{aligned}\right\}\tag{11.3.1}$$

沿 C_-

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u-a\\&\mathrm{d}u-\frac{2}{k-1}\mathrm{d}a=0\end{aligned}\right\}\tag{11.3.2}$$

在如上诸式中，t 为时间，x 为坐标，u 为 x 向的速度，a 为音速，k 为绝热指数。将(11.3.1)

式和(11.3.2)式积分，给出

沿 C_+

$$\left.\begin{aligned} x &= (u+a)t + F_+(u) \\ u &+ \frac{2}{k-2}a = \text{const} \end{aligned}\right\} \tag{11.4.1}$$

沿 C_+

$$\left.\begin{aligned} x &= (u-a)t + F_-(u) \\ u &- \frac{2}{k-1}a = \text{const} \end{aligned}\right\} \tag{11.4.2}$$

在如上两式中 $F_+(u)$和 $F_-(u)$分别为沿 C_+和 C_-线的未定积分函数。式(11.4.1)表示相对介质的右传的小扰动波；式(11.4.2)表示相对介质的左传小扰动波，图 11.1 表示出在(x,t)平面上的左、右传波(即 C_+和 C_-特征线族)。

在一般情况下，两族特征线都是曲线，除非特殊流动情形，这将在下节研究。然而存在一种例外，不管是什么样的流动，上述的两族特征线都是直线——这就是在多方指数 $k=3$ 时。当 $k=3$ 时，式(11.3.1)和(11.3.2)成为

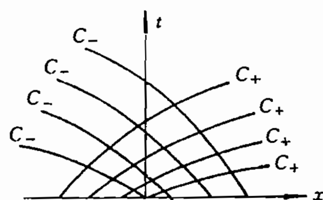


图 11.1　右行特征线和左行特征线

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= u + a \\ u + a &= \text{const} = 2\lambda_1 \end{aligned}\right\} \tag{11.5.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= u - a \\ u - a &= \text{const} = 2\lambda_2 \end{aligned}\right\} \tag{11.5.2}$$

因此沿 C_+特征线积分(11.5.1)的第一式，则有

$$x = 2\lambda_1 + F_*(2\lambda_1) = (u+a)t + F_*(u+a)$$

沿 C_-特征线积分(11.5.2)的第一式，则有

$$x = 2\lambda_2 + F_*(2\lambda_2) = (u-a)t + F_*(u-a)$$

其中 $F_*(u\pm a)$是 $u\pm a$ 的未定函数，但由于沿特征线 $u\pm a=\text{const}$，所以 F_*是沿特征线不变的积分常数，特征线不同当然 F_*的取值亦不同。图 11.2 给出在 $k=3$ 时，在(x,t)平面上的两族特征线。注意它们与 $k\neq3$ 时不同，现在两族特征线都是直线。

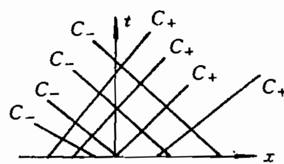


图 11.2　$k=3$ 时两族特征线

现将 $k=3$ 时的积分形式的特征线及沿特征线的相容关系式归纳如下(并将所述的“积分常数”F_*分写成 F_+和 F_-)：

沿 C_+

$$\left.\begin{aligned} x &= (u+a)t + F_+(u+a) \\ u + a &= \text{const} = 2\lambda_1 \end{aligned}\right\} \tag{11.6.1}$$

沿 C_-

$$
\left.\begin{aligned}
x &= (u-a)t + F_-(u-a) \\
u - a &= \text{const} = 2\lambda_2
\end{aligned}\right\} \tag{11.6.2}
$$

11.1.2　炸轰产物的一般形式的一维飞散运动

作为爆轰的一维流动，除了平面流动，还有球对称和柱对称的一维流动，在这种情况下，我们使用柱坐标和球坐标，如图 11.3 所示。

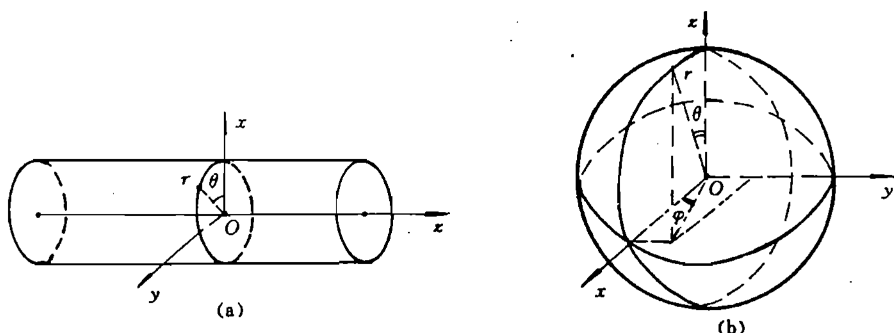


图 11.3　柱坐标和球坐标

在柱对称的情况下

$$
\frac{\partial}{\partial\theta} = 0,\quad \frac{\partial}{\partial z} = 0,\quad \boldsymbol{v} = u\hat{\boldsymbol{r}}_0
$$

其中 u 为径向速度，$\hat{\boldsymbol{r}}_0$ 为径向单位矢量，这时方程(7.14)化成

$$
\left.\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial r} + \rho\frac{\partial u}{\partial r} + \rho\frac{u}{r} = 0 \\
&p = A\rho^k
\end{aligned}\right\} \tag{11.7}
$$

在球对称的情况下

$$
\frac{\partial}{\partial\theta} = 0,\quad \frac{\partial}{\partial\varphi} = 0,\quad \boldsymbol{v} = u\hat{\boldsymbol{r}}_0
$$

于是方程(7.14)化成

$$
\left.\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial r} + \rho\frac{\partial u}{\partial r} + 2\rho\frac{u}{r} = 0 \\
&p = A\rho^k
\end{aligned}\right\} \tag{11.8}
$$

将式(11.1)、(11.7)和(11.8)写成统一形式

$$
\left.\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + (\alpha-1)\rho\frac{u}{x} = 0 \\
&p = A\rho^k
\end{aligned}\right\} \tag{11.9}
$$

其中

$$\alpha=\begin{cases}1, & x=x \quad \text{平面对称} \\ 2, & x=r \quad \text{柱对称} \\ 3, & x=r \quad \text{球对称}\end{cases}$$

由于流动视作多方气体的等熵流动，故同得出式(11.2)一样，可以利用(7.112)式以及 $a^2=dp/d\rho$ 关系将(11.9)式化成

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2}{k-1}a\frac{\partial a}{\partial x}=0\\&\frac{2}{k-1}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{2}{k-1}u\frac{\partial a}{\partial x}+(\alpha-1)a\frac{u}{x}=0\end{aligned}\right\}\tag{11.10}$$

按照平面对称情形的做法，可以求得如上方程组的特征线及其相容关系式：

沿 C_+

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u+a\\ \mathrm{d}u+\dfrac{2}{k-1}\mathrm{d}a+(\alpha-1)\dfrac{au}{x}\mathrm{d}t=0\end{cases}\tag{11.11.1}$$

沿 C_-

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u-a\\ \mathrm{d}u-\dfrac{2}{k-1}\mathrm{d}a-(\alpha-1)\dfrac{au}{x}\mathrm{d}t=0\end{cases}\tag{11.11.2}$$

式(11.11.1)和(11.11.2)一般是不能积分，除了特殊情形之外，比如 $\alpha=1$。然而，导出如上两组式的好处在于它们是沿特征线的常微分方程代替了原来的偏微分方程，从而方便了数值积分(numerical integral)。

11.1.3 边界条件

爆轰产物的流动当然要受周围的环境即边界条件的制约，边界条件不同流动亦不同，然而不管流动的环境千差万别，但是却有同样的一段边界条件——在爆轰波阵面上。

我们假定爆轰为满足 C—J 条件的强爆轰，于是在爆轰波阵面上有

$$\left.\begin{aligned}&u=u_H=\frac{1}{k+1}D\\&p=p_H=\frac{1}{k+1}\rho_0D^2\\&\rho=\rho_H=\frac{k+1}{k}\rho_0\\&a=a_H=\frac{k}{k+1}D\end{aligned}\right\}\tag{11.12}$$

其中，ρ_0 为炸药密度，D 为爆速，下标“H”表示取值在爆轰波阵面上。

11.2 在几种特殊条件下爆轰产物的一维平面等熵流动

如下处理几种典型的，也是具有实际意义的爆轰产物的一维平面等熵流动。

11.2.1 一端封闭的半无限长管中炸药装药的爆轰产物一维平面等熵流动

假定炸药装在半无限长的刚性的封闭管中，从封闭端面起爆。设爆轰是稳定的，爆轰

波阵面为平面，见图 11.4(a)所示。

设爆轰产物为多方气体，且流动是等熵的。这是一个一维平面等熵流动，它满足方程(11.1)且具有(11.4.1)和(11.4.2)式所示的解：

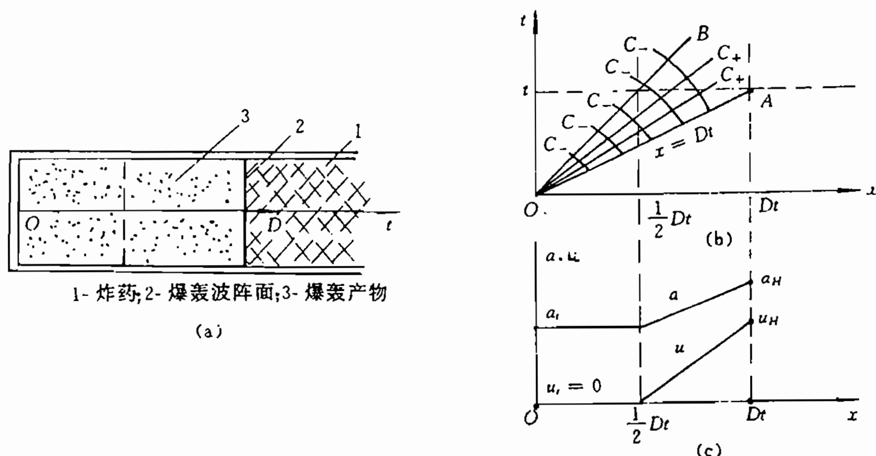


图 11.4　封闭管中炸药装药的爆轰

沿 C_+

$$\left.\begin{aligned} x &= (u + a)t + F_+ (u) \\ u &+ \frac{2}{k-1}a = \text{const} \end{aligned}\right\} \tag{11.13.1}$$

沿 C_-

$$\left.\begin{aligned} x &= (u - a)t + F_- (u) \\ u &- \frac{2}{k-1}a = \text{const} \end{aligned}\right\} \tag{11.13.2}$$

由于炸药从左端起爆，爆轰波向右传，所以从左端只能发出右传的稀疏波，又因爆轰是在 $t=0$ 时从 $x=0$ 开始，故右行特征线 C_+ 均可写成

$$x = (u + a)t, \quad F_+ (u) = 0 \tag{11.14}$$

而左行特征线 C_- 都是从爆轰波阵面轨迹 $x=Dt$ 上发出，见图 11.4(b)，据波阵面条件(11.12)式可以推出沿每条 C_- 特征线都有

$$u - \frac{2}{k-1}a = \text{const} \equiv u_H - \frac{2}{k-1}a_H = -\frac{D}{k-1} \tag{11.15}$$

即在整个爆轰产物区恒有上式成立。

由(11.15)式和(11.13.1)的第二式推出沿每条 C_+ 线都有

$$u = \text{const}, \quad a = \text{const}$$

即所有的 C_+ 线都是如下形式的直线：

$$x = (u + a)t$$

综上所述，在爆轰波阵面 OA 之后的整个产物流动区恒有

$$\left.\begin{aligned} x &= (u+a)t \\ u - \frac{2}{k-1}a &= -\frac{D}{k-1} \end{aligned}\right\} \tag{11.16}$$

即 OA 之后的产物流动区是个右行简单稀疏波区。由上式解出

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{k+1}\left(\frac{2x}{t} - D\right) \\ a &= \frac{k-1}{k+1}\left(\frac{x}{t} + \frac{D}{k-1}\right) \end{aligned}\right\} \tag{11.17}$$

上式就是稀疏波区的解。稀疏波波头与爆轰波阵面 OA 重合，稀疏波尾为 OB，可以根据管左端（O 点）为刚壁的边界条件来确定。

$$\text{在 } x = 0 \text{ 处} \qquad u = u_t \equiv 0 \tag{11.18}$$

OB 为左端壁附近的静止区与稀疏波区的分界线，因此在 OB 之上

$$u = u_t = 0$$

于是由(11.16)式推出 OB 线及在该线上：

$$\left.\begin{aligned} a &= a_t = \frac{D}{2} \\ x &= a_t t = \frac{D}{2}t \end{aligned}\right\} \tag{11.19}$$

所以在 $\frac{1}{2}Dt \leqslant x \leqslant Dt$ 区为稀疏波区，即图 11.4(b)所示的 AOB 区。tOB 区为静止区，即在 $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}Dt$ 区，物理量为

$$\left.\begin{aligned} u &= u_t = 0 \\ a &= a_t = \frac{1}{2}D \end{aligned}\right\} \tag{11.20}$$

图 11.4(c)表示的是在 t 时刻爆轰产物的速度和音速的分布。在任何时刻 t，稀疏波区与静止区的分界点都恰好在爆轰波阵面和起爆端（$x=0$ 处）的中点。

爆轰波阵面之后的压力和密度的分布，可根据等熵条件：

$$\frac{p}{\rho^k} = A = \frac{p_H}{\rho_H^k}$$

以及音速度的表达式

$$a^2 = \frac{kp}{\rho}, \quad a_H^2 = \frac{kp_H}{\rho_H}$$

推得：

当 $\frac{1}{2}Dt \leqslant x \leqslant Dt$ 时，即在稀疏波区

$$\left.\begin{aligned} p &= p_H\left(\frac{a}{a_H}\right)^{\frac{2k}{k-1}} = \frac{1}{k+1}\rho_0 D^2\left\{\frac{k-1}{kD}\left(\frac{x}{t} + \frac{D}{k-1}\right)\right\}^{\frac{2k}{k-1}} \\ \rho &= \rho_H\left(\frac{a}{a_H}\right)^{\frac{2}{k-1}} = \frac{k+1}{k}\rho_0\left\{\frac{k-1}{kD}\left(\frac{x}{t} + \frac{D}{k-1}\right)\right\}^{\frac{2}{k-1}} \end{aligned}\right\} \tag{11.21}$$

当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}Dt$ 时，即在静止区

$$
\left.\begin{aligned}
p = p_t &= \frac{1}{k+1}\left(\frac{k+1}{2k}\right)^{\frac{2k}{k-1}}\rho_0 D^2 \\
\rho = \rho_t &= \frac{k+1}{k}\left(\frac{k+1}{2k}\right)^{\frac{2}{k-1}}\rho_0
\end{aligned}\right\} \tag{11.22}
$$

11.2.2　无限长管中爆轰产物的一维平面等熵流动

炸药装在无限长的管中，从中间起炸，产生向右、左两个爆轰波。设爆轰是稳定的，爆轰波阵面为平面，见图 11.5(a)。

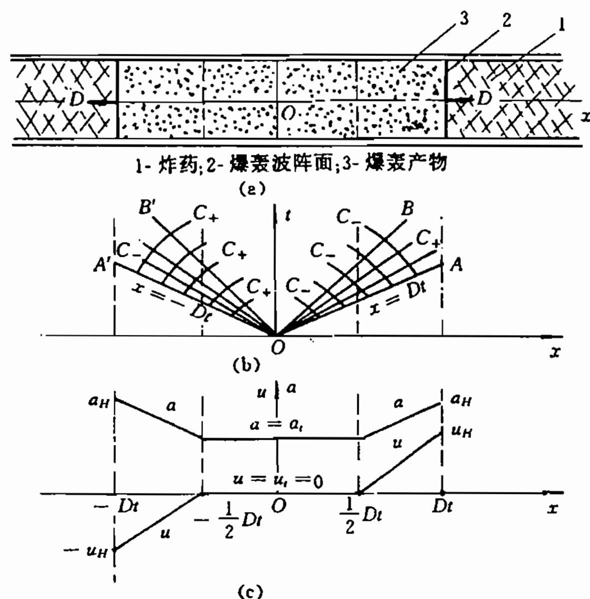


图 11.5　无限长管中炸药装药的爆轰

设爆轰产物为多方气体，流动为等熵。这个问题实质可归结为一端封闭的半限长管中的爆轰产物流动，起爆面（O 点）就作为"封闭端"，在这里

$$
u = u_t \equiv 0 \tag{11.23}
$$

炸药在 $t=0$ 时，起爆从 O 点向右发出一右行中心稀疏波，其波区在

$$
\frac{1}{2}Dt \leqslant x \leqslant Dt
$$

这个右行简单波区的解同(11.17)式。

从 O 点向左发出一左行中心稀疏波，其波区在

$$
-Dt \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2}Dt
$$

在这个流动区中

$$
\left.\begin{aligned}
x &= (u-a)t \\
u + \frac{2}{k-1}a &= \frac{D}{k-1}
\end{aligned}\right\} \tag{11.24}
$$

由上式解出

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{k+1}\left(\frac{2x}{t}+D\right) \\ a &= \frac{k-1}{k+1}\left(-\frac{x}{t}+\frac{D}{k-1}\right) \end{aligned}\right\} \tag{11.25}$$

在$-\frac{1}{2}Dt \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}Dt$区为静止区，在该区中

$$\left.\begin{aligned} u &= u_t = 0 \\ a &= a_t = \frac{1}{2}D \end{aligned}\right\} \tag{11.26}$$

图 11.5(b)表示出在(x,t)上的波系图，图 11.5(c)表示出在某上时刻的波形图。

11.2.3 在无限长管中爆轰产物向真空飞散

在无限长的真空(vacuum)管中部装有长为l的炸药，如图 11.6(a)所示。在$t=0$时刻，从左端面(O点)起爆，爆轰是稳定的，爆轰波阵面为平面。

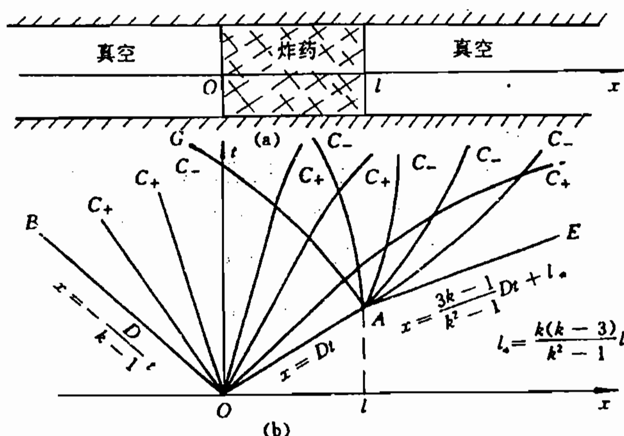


图 11.6 无限长管中爆轰产物向真空飞散

先考虑爆轰波阵面后面的产物向左面真空作一维平面等熵流动。由于爆轰波阵面从O点出发向右运动，所以从O点发出一个右行中心简单波，如图 11.6(b)所示。

在$t \leqslant l/D$时，在整个简单波区有

$$\left.\begin{aligned} x &= (u+a)t \\ u - \frac{2}{k-1}a &= -\frac{D}{k-1} \end{aligned}\right\} \tag{11.27}$$

这个简单波的波头OA与爆轰波阵面重合；波尾为OB，在其上$a=0$，由上式可求出OB线为

$$x = -\frac{D}{k-1}t \tag{11.28}$$

即在$-\frac{D}{k-1}t \leqslant x \leqslant Dt$范围为简单波区。

在$t=l/D$时，爆轰波阵面到达装药的右端，由于右面为真空，所以在此刻向左面的爆

轰产物中发出一个左传中心稀疏波(注意不再是简单波),见图 11.6(b)。

在 $t\geqslant l/D$ 时,在(x,t)平面上:$BOAG$ 区为中心简单稀疏波区;GAE 区为一般流动区在该区中

沿 C_+线

$$\begin{cases}\mathrm{d}x = (u + a)\mathrm{d}t \\ u + \dfrac{2}{k-1}a = \mathrm{const}\end{cases}$$

沿 C_-线

$$\begin{cases}\mathrm{d}x = (u - a)\mathrm{d}t \\ u - \dfrac{2}{k-1}a = \mathrm{const}\end{cases}$$

该区求解只能数值积分,最好根据上面诸式做沿特征线差分,可参照 § 7.10 的作法。GA 区左边界为$\overset{\frown}{AG}$,在其上

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt} = u - a \\ &u - \frac{2}{k-1}a = u_H - \frac{2}{k-1}a_H = -\frac{D}{k-1}\end{aligned}\right\} \tag{11.29}$$

GAE 区的右边界为 AE,它是原右行简单波波头 OA 的延续。当爆轰波到达 $x=l$ 处时,爆轰结束,前面为真空,使之爆轰产物突然加速向真空中膨胀,AE 则为"质点轨迹"可以证明(证明留给读者在习题中做),在 $k=\mathrm{const}$ 的等熵条件下(若考虑产物的实际流动,在低压时,原等熵流动的假设是不成立的,见 § 11.4 中的论述。),在 AE 上:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u = u_H + \frac{2}{k-1}a_H = \frac{3k-1}{k^2-1}D$$

即沿 AE 有

$$\left.\begin{aligned}&u = \frac{3k-1}{k^2-1}D \\ &x = \frac{3k-1}{k^2-1}Dt + \frac{k(k-3)}{k^2-1}l\end{aligned}\right\} \tag{11.30}$$

注意,跟在爆轰波阵面后的爆轰产物,向爆轰传播方向的真空飞散速度,即最大速度点速度 u_1,与向背着爆轰传播方向的真空飞散速度 u_2 是不同的。由上面的结果可知,它们应分别为

$$u_1 = \frac{3k-1}{k^2-1}D \tag{11.31}$$

$$u_2 = \frac{1}{k-1}D \tag{11.32}$$

如上的分析是作为一般普遍情形,即 $k\neq 3$,如果 $k=3$,不管流动区的类型如何,两族特征线 C_+和 C_-都是直线,如果图 11.6(b)中 C_+和 C_-都变成直线,这时$\overset{\frown}{AG}$成为一条直线,据(11.29)式则有

$$k = 3\ \text{时},\qquad x = -\frac{D}{2}t + \frac{3}{2}l \tag{11.33}$$

这时 AE 线成为 OA 的延长线，即 AE 为

$$x = Dt$$

在此情况下，向右、向左面真空中飞散的质点速度分别为

$$u_1 = D, \qquad u_2 = -\frac{1}{2}D$$

11.3 爆轰产物的侧向飞散

上节研究的是装在一维刚性长管中炸药爆轰的产物飞散，飞散是一维的。如果装药的管壁不是刚性的或者管壁不存在，产物飞散将是三维的，即存在侧向飞散。现研究侧向飞散，为了简单起见，我们研究装药为半无穷平面，爆轰波阵面为平面，它与装药的边界成 ε 角，如图 11.7 所示。

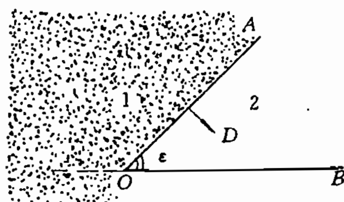


图 11.7 半无穷平面装药的平面爆轰波
1—爆轰产物；2—炸药；
AO—平面爆轰波阵面；
BO—装药边界

这是一个典型的二维不定常产物流动，但在随爆轰波阵面沿装药边界 BO 运动的坐标系中看，整个流动是二维定常的。在这样的动坐标系中描述，方程(7.14)变成：

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{dir}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \\ &\boldsymbol{v} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}) = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p \\ &\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_H}{\rho_H^k} \end{aligned}\right\} \tag{11.34}$$

将如上方程组用极坐(r,θ)来描述，则写成

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}(\rho u r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v) = 0 \\ &u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ &u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\ &\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_H}{\rho_H^k} \end{aligned}\right\} \tag{11.35}$$

其中 r—为矢径；θ—为极角，它从图 11.8 的$\overline{OH}$线算起顺时针为正；$\overline{OH}$—为爆轰产物向真空的飞散边界；u—为径向速度分量；v—为角向速度分量；$\overline{OE}$—为产物飞散扰动的另一条边界。

边界条件：

① 在爆轰波阵面$\overline{OA}$上，即当 $\theta=\theta_*$ 时的条件

如果在空间固定坐标系中看，在$\overline{OA}$上则有：

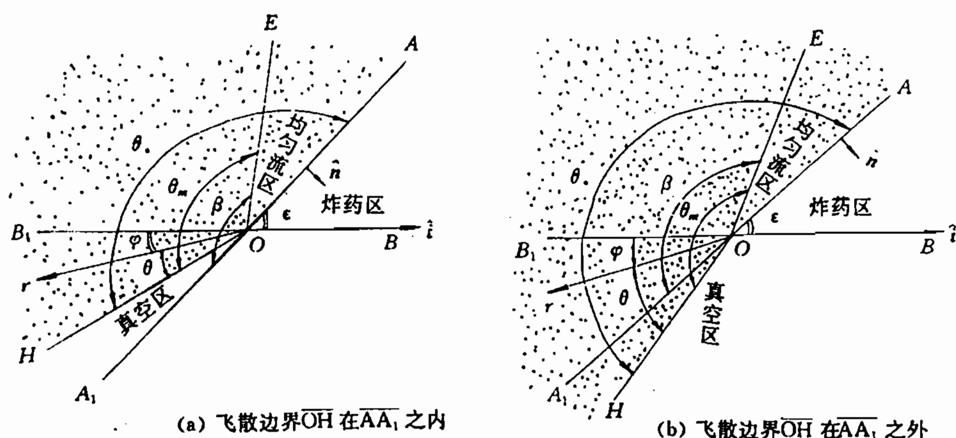


图 11.8 在坐标系中的极坐标及产物飞散边界

$$\left.\begin{aligned}
p &= p_H = \frac{1}{k+1}\rho_0 D^2 \\
\rho &= \rho_H = \frac{k+1}{k}\rho_0 \\
\bar{v} &= \bar{v}_H = u_H\hat{n} = \frac{1}{k+1}D\hat{n}
\end{aligned}\right\} \tag{11.36}$$

其中 $\bar{v}$ 为在固定坐标系中爆轰产物的速度,$\hat{n}$ 为垂直$\overline{OA}$的单位矢量,其他符号同前。随 O 点沿$\overline{B_1B}$运动的坐标系(r,θ)的移动速度 $\bar{v}_0$ 为

$$\bar{v}_0 = \frac{D}{\sin\varepsilon}\hat{i} \tag{11.37}$$

其中 $\hat{i}$ 为沿$\overline{B_1B}$的单位矢量,如图所示。

现在动坐标系(r,θ)考虑问题。这时爆轰产物的流动速度 $\boldsymbol{v}$ 为

$$\boldsymbol{v} = (u,v) = \bar{v} - \bar{v}_0 = \bar{v} - \frac{D}{\sin\varepsilon}\hat{i} \tag{11.38}$$

在动坐标系下,除了速度外,压力和密度同在固定坐标系一样,这时爆轰波阵面上的条件式(11.36)写成

$$\theta = \theta_*,\left\{\begin{aligned}
p &= p_* = p_H = \frac{1}{k+1}\rho_0 D^2 \\
\rho &= \rho_* = \rho_H = \frac{k+1}{k}\rho_0 \\
u &= u_* = -D\cot\varepsilon \\
v &= v_* = -\frac{k}{k+1}D
\end{aligned}\right. \tag{11.39}$$

② 在自由面$\overline{OH}$上的条件

$$\theta = 0,\quad \left\{\begin{aligned} p &= 0 \\ \rho &= 0 \end{aligned}\right. \tag{11.40}$$

11.3.1 方程的求解

根据方程组(11.35)和边界条件(11.39)及(11.40)式,得知决定流动的自变量和参量

则为

$$r、\theta、\rho_0、D、k、\varepsilon$$

除了上述这些主定量外,似乎 θ_* 亦是个主定量,其实它是个被定量,即使作为一个主定量在运用 π 定理时也不妨,因为它是个"无量纲的常量"。利用量纲分析的 π 定理得知:u、v、p、ρ 只依赖 θ,而与 r 无关,即在动坐标系看,产物流动是从 O 点发出的中心简单波。

$$\rho = \rho(\theta), \quad p = p(\theta), \quad u = u(\theta), \quad v = v(\theta) \tag{11.41}$$

将这些函数代进方程(11.35)中,推出

$$\left.\begin{aligned} &\rho u + \frac{\mathrm{d}(\rho v)}{\mathrm{d}\theta} = 0 \\ &\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} - v = 0 \\ &v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} + uv + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta} = 0 \\ &\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_H}{\rho_H^k} \end{aligned}\right\} \tag{11.42}$$

现暂且不管上式中的第四式,并考虑到:$\mathrm{d}p = a^2\mathrm{d}\rho$,则上式化成

$$\left.\begin{aligned} &u + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} + \frac{v}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta} = 0 \\ &\frac{a^2}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta} + v\left(u + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\right) = 0 \\ &\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = v \end{aligned}\right\} \tag{11.43}$$

由此推出

$$\left.\begin{aligned} &v^2 = a^2 \\ &\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = v \end{aligned}\right\} \tag{11.44}$$

如上式子虽简单,但不封闭,因(11.44)式是两 个方程,三个未知函数(u,v,a)。要想求解,必须补上关于 a 的方程,鉴于来流均匀且流动定常等熵,故在整个流区伯努利方程成立

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} \equiv \text{const} = \frac{q_m^2}{2} \tag{11.45}$$

其中 q_m 为最大飞散速度,即在$\overline{OH}$上的速度,它可以利用爆轰波阵面$\overline{OA}$上的条件(11.39)式来确定,即有

$$q_m = \sqrt{(u_*^2 + v_*^2) + \frac{2}{k-1}a_*^2} = \frac{D}{\sin\varepsilon}\cdot\sqrt{\frac{k^2 - \cos^2\varepsilon}{k^2 - 1}} \tag{11.46}$$

$$a_* = a_H = \sqrt{\frac{kp_H}{\rho_H}} = \frac{k}{k+1}D \tag{11.47}$$

式(11.44)和(11.45)构成封闭的方程组,由这个方程组推出(注意:θ 增加时 u 减小)

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\sqrt{\frac{k-1}{k+1}(q_m^2 - u^2)} \tag{11.48}$$

将上式积分,并考虑到(11.44)式的第一式,则有(注意在现在所取的坐标系中,v 为负值)

$$
\left.\begin{aligned}
u &= q_m \cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\theta\right) \\
v &= -a = -q_m\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\sin\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\theta\right)
\end{aligned}\right\} \quad (11.4
$$

（$0 \leqslant \theta \leqslant \theta_m$，$\theta_m$ 为产物的最大飞散角，见图 11.8）

11.3.2 确定飞散角度

由§7.12可知，定常超音速流动的马赫角 α 为

$$
\sin\alpha = a/q = a/\sqrt{u^2+v^2}, \quad q^2 = u^2+v^2 \quad (11.5
$$

由于现在的流动是定常超音速的，根据(11.50)和(11.49)式求得

$$
\tan\alpha = \frac{a}{|u|} = \left|\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\mathrm{tg}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\theta\right)\right| \quad (11.5
$$

当：$\theta=\theta_m$，即坐标点取压$\overline{OE}$线上时：$\alpha=\alpha_H$，于是由式给出

$$
\tan\alpha_H = \left|\sqrt{\frac{k-1}{k-1}}\mathrm{tg}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\theta_m\right)\right| \quad (11.52.
$$

另一方面，由于$\overline{OE}$与$\overline{OA}$之间为均匀流区，所以在$\overline{OE}$线

$$
a = a_* = a_H, \quad u = u_*, \quad \alpha = \alpha_H
$$

于是由上式与(11.51)式求得

$$
\begin{aligned}
\tan\alpha_H &= \frac{a_*}{|u_*|} = \left|\frac{k}{k+1}\tan\varepsilon\right| \\
&= \frac{k}{k+1}\tan\varepsilon, \quad (\varepsilon \leqslant \pi/2)
\end{aligned} \quad (11.52.2
$$

于是由(11.52.1)和(11.52.2)式推出最大飞散角 θ_m 的表达式

$$
\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\tan\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\theta_m\right) = \pm\frac{k}{k+1}\tan\varepsilon \quad (11.53
$$

当爆轰波阵面的入射角 ε 已知时，便可由上式求得爆轰产物受侧向扰动而产生的整个飞散角度 θ_m.

爆轰产物受稀疏扰动区与未受扰动区的分界线$\overline{OE}$是一条特征线，$\overline{OE}$与 $\boldsymbol{v}_*$ 的几何关系如图 11.9 所示（$\boldsymbol{v}_* = \boldsymbol{u}_*\hat{\boldsymbol{r}}_0 + \boldsymbol{v}_*\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ 为爆轰波阵面上的产物速度）。根据图示的几何关系和(11.39)的最后两式，则有

$$
\tan(\beta - \alpha_H) = \frac{k}{k+1}\tan\varepsilon \quad (11.54)
$$

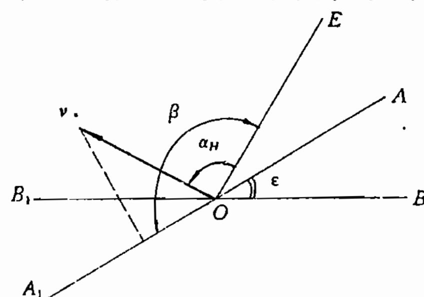


图 11.9 扰动区与未扰区的边界同爆轰波阵面的几何关系

利用(11.52.1)式，则由上式推出

$$
\tan\beta = \frac{2k(k+1)\tan\varepsilon}{(k+1)^2 - k^2\tan^2\varepsilon} \quad (11.55)
$$

其中 β 为$\overline{OE}$与$\overline{AA_1}$的夹角，如图 11.9 所

示。角 β 与图 11.8 所示诸角之间的关系为

$$\beta - \theta_m = \varepsilon - \varphi - \theta \tag{11.56}$$

由此得到

$$\varphi = \theta_m - \beta + \varepsilon - \theta \tag{11.57}$$

显然 φ 为 θ 和 ε 的函数，因从式(11.53)和(11.55)看出 θ_m 和 β 均作为 ε 的函数。

11.3.3 确定流动在空间固定坐标系中的方向

在以 $\overline{v_0}$ 速度沿装药表面 $\overline{B_1B}$ 移动的动极坐标系中，沿每条矢径不变的速度矢量 $\boldsymbol{v}$，已由式(11.49)给出。现将它换算到空间固定坐标系中，这时 $\boldsymbol{v} \to \bar{\boldsymbol{v}}$，二者之间的关系为

$$\bar{\boldsymbol{v}} = (\bar{u}, \bar{v}) = \boldsymbol{v} + \bar{\boldsymbol{v}}_0 \tag{11.58}$$

在这里 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 虽是空间固定坐标系中的速度矢量，但分量 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 的按动坐标系中的 $\hat{r}_0$ 向和 $\hat{\theta}_0$ 向分解的，于是上式写成

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= q_m \cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\theta\right) - \frac{D}{\sin\varepsilon} \cdot \cos\varphi \\ \bar{v} &= -q_m \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \sin\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\theta\right) - \frac{D}{\sin\varepsilon} \cdot \sin\varphi \end{aligned}\right\}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_m \tag{11.59}$$

从图 11.10 可以看出，流场中任一点 G 的速度 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 与装药表面 $\overline{B_1B}$ 所成的角 ψ 由下式给出

$$\tan(\psi - \varphi) = \frac{-\bar{v}}{\bar{u}} \tag{11.60}$$

一旦 ε 和 θ 给定，便可由上式确定出 ψ 值，因在 ε 和 θ 已知的情况下，由式(11.57)可确定出 φ 的值；由式(11.59)可确定出 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 的值。

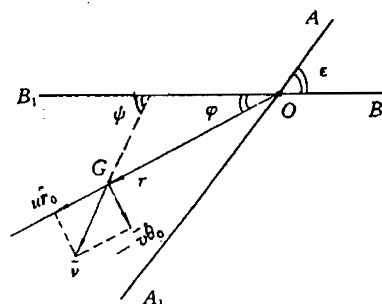


图 11.10 绝对速度 $\bar{v}$ 与矢径 r 的几何关系

密度和压力可这样确定：由(11.46)和(11.49)式得到

$$a^2 = \left[\frac{D}{\sin\varepsilon} \cdot \frac{\sqrt{k^2 - \cos^2\varepsilon}}{k+1} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\theta\right)\right]^2 \tag{11.61}$$

于是可求得压力和密度：

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho_H\left(\frac{a}{a_H}\right)^{\frac{2}{k-1}} = \frac{k+1}{k}\rho_0\left[\frac{\sqrt{k^2 - \cos^2\varepsilon}}{k\sin\varepsilon} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\theta\right)\right]^{\frac{2}{k-1}} \\ p &= p_H\left(\frac{a}{a_H}\right)^{\frac{2k}{k-1}} = \frac{1}{k+1}\rho_0 D^2\left[\frac{\sqrt{k^2 - \cos^2\varepsilon}}{k\sin\varepsilon} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\theta\right)\right]^{\frac{2k}{k-1}} \end{aligned}\right\} \tag{11.62}$$

11.3.4 一种特殊情况下爆轰产物的侧向飞散例子

现在研究具有很大意义的一种情况——爆轰波阵面垂直于装药表面，即：

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2}$$

由(11.53)式推出

$$\theta_m=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\frac{\pi}{2}$$

由(11.52.2)或(11.54)式得到

$$\alpha_H=\pi/2,\quad \beta=\pi$$

由(11.57)式得出

$$\varphi=\left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}-1\right)\frac{\pi}{2}-\theta$$

于是由(11.46)、(11.59)、(11.60)、(11.62)式得到

$$q_m=kD/\sqrt{k^2-1}$$

$$\begin{cases}\bar{u}=-D\cdot\cos\left[\left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}-1\right)\frac{\pi}{2}-\theta\right]+\frac{kD}{\sqrt{k^2-1}}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\theta\right)\\ \bar{v}=-D\cdot\sin\left[\left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}-1\right)\frac{\pi}{2}-\theta\right]-\frac{kD}{k+1}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\theta\right)\end{cases}$$

$$0\leqslant\theta\leqslant\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases}\rho=\frac{k+1}{k}\rho_0\left[\sin\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\theta\right)\right]^{\frac{2}{k-1}}\\ p=\frac{1}{k+1}\rho_0D^2\left[\sin\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\theta\right)\right]^{\frac{2k}{k-1}}\end{cases}$$

$$\tan\left(\psi-\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\bar{v}/\bar{u}$$

当 $\theta=0$ 时：

$$\begin{cases}\rho=p=0\\ \bar{u}=-D\sin\left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\frac{\pi}{2}\right)+\frac{kD}{\sqrt{k^2-1}}\\ \bar{v}=D\cos\left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

$$\tan\left(\psi-\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\cos\left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\frac{\pi}{2}\right)-\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}}$$

若再令 $k=3$,则有

$$\begin{cases}\bar{u}=0.2650D\\ \bar{v}=-0.6058D\end{cases}$$

$$|\bar{v}|=0.6612D$$

$$\psi = 103°39'$$

这时产物向真空的飞散方向如图 11.11 所示，它与装药表面的法线成 13°39′角，即几乎垂直于装药的表面。

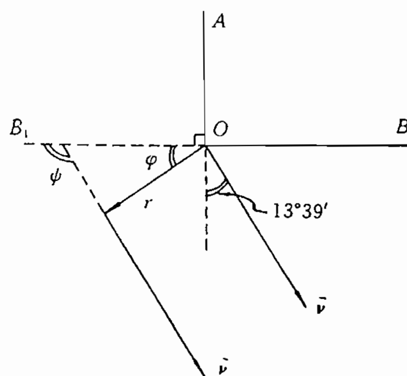


图 11.11 在 $\epsilon=\pi/2$、$\theta=0$、$k=3$ 时，在装药边界上爆轰产物的飞散方向

11.4 在空气中爆轰产物的飞散

前面所讨论的爆轰产物均在真空中飞散，而且假定产物为 $k=\text{const}$ 的多方气体等熵流动，但实际爆炸多在空气中进行，所以概述一下爆轰产物在空气中的膨胀规律，特别是它的作用范围是非常有意义的。

11.4.1 产物向空气中飞散与向真空中飞散的区别

1. *产物在真空中的飞散*

若爆轰发生在真空中，则具有一定压力的爆轰产物将无止境地膨胀，其压力和密度外部小内部大，而产物的速度相反，外部大，内部小。爆轰产物的最大飞散速度与爆轰产物的边界传播速度一致。在产物飞散的边界上压力和密度为零。如下考虑在真空中两种爆轰情况的产物最大速度。产物飞散的最大速度 u_{max} 取决于装药的形状、爆轰波的传播规律、以及爆热 Q。

①对于正常爆轰的一维飞散。正常的一维爆轰其产物的最大飞散速度（见(11.31)式）为

$$u_{max} = \frac{3k-1}{k^2-1}D$$

而 $D=\sqrt{2(k^2-1)Q}$，见(10.61)式，于是

$$u_{max} = (3k-1)\sqrt{\frac{2Q}{k^2-1}}$$

对于标准炸药

$$Q = 1 \text{ 千卡/克}, \quad k = 5/4, \text{则 } u_{max} = 11000 \text{ 米/秒}$$

②对于瞬时爆轰的一维飞散。所谓瞬时爆轰(instantaneous detonation)，是指整个装药在瞬间同时变成爆轰产物，而无爆轰进行过程。由于产物来不及膨胀，爆炸产生的能量 Q 全部变成产物的内能 e，即在这种情况下

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho}_H = \rho_0 \\ e &= \bar{e}_H = Q \end{aligned}\right\} \tag{11.63}$$

若这时的爆轰产物仍作为多方气体，即

$$\bar{e}_H = \frac{1}{k-1}\frac{\bar{p}_H}{\bar{\rho}_H} \tag{11.64}$$

其中，$\bar{\rho}_H$、$\bar{p}_H$、$\bar{e}_H$ 表示瞬时爆轰其产物开始膨胀时的密度、压力和比内能，而 ρ_0 为炸药的密度。据(11.63)和(11.64)式，则有

$$\bar{p}_H = (k-1)\rho_0 Q \tag{11.65}$$

根据 Q 与 D 的关系式(10.61)就求得

$$\bar{p}_H=\frac{1}{2(k+1)}\rho_0 D^2=\frac{1}{2}p_H \tag{11.66}$$

由于爆轰产物向真空作一维膨胀，故在产物中形成左行或右行简单波，即在流场中有下式成立(见(11.4)式)

$$u\pm\frac{2a}{k-1}=\text{cosnt}=\pm\frac{2\bar{a}_H}{k-1}$$

于是得到瞬时爆轰的产物最大飞散速度 u_{max}

$$|u_{max}|=\frac{2}{k-1}\sqrt{\frac{k}{2(k+1)}}D=2\sqrt{\frac{kQ}{k-1}} \tag{11.67}$$

对于标准炸药而言，由上式求得

$$u_{max}=9000\text{m/s}$$

凝聚炸药爆炸时，若初始阶段的爆轰产物不是多方气体，则这些简单的公式将为复杂的公式所代替。但流动的最大速度几乎保持不变，正常爆轰时 $u_{max}\approx12000$m/s，瞬时爆轰时 $u_{max}\approx10000$m/s

2. 产物在空气中的飞散

当爆轰在空气中进行时，情况与真空不同。装药边界上的爆轰产物一开始飞散就与周围的空气发生作用，在空气中形成冲击波，同时向产物内部反射稀疏波。为了说明问题，举一个瞬时爆轰作为一维膨胀的例子，在一个一端闭封的半无限长刚性管中所装的一段炸药瞬时爆轰，如图 12.12 所示。

图 11.12 在空气中炸药的一维瞬时爆轰波系图

在 $t=0$ 时炸药瞬时爆轰，其爆轰产物(假定 $k=3$)的流动分别为：恒值区 GOH，在该区中

$$\begin{cases} u = \bar{u}_H = 0 \\ a^2 = \bar{a}_H^2 = \dfrac{3}{8}D^2 \\ p = \bar{p}_H = \dfrac{1}{8}\rho_0 D^2 \\ \rho = \bar{\rho}_H = \rho_0 \end{cases}$$

以及中心稀疏波区 HOE；均匀流区 EOB，$\overline{OB}$为爆轰产物与空气流的分界线，BOA 区为空气均匀流区，$\overline{OA}$为向空气中传播的冲击波，据(7.58)和(7.63)式，当冲击波前 $u=0$，$p=p_a\approx 0$ 时，则有

$$N_a = V_a\sqrt{\frac{p_1}{V_a - V_1}}$$

$$u_1 = \sqrt{p_1(V_a - V_1)}$$

$$\frac{V_a}{V_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = \frac{\rho_1}{\rho_a} \tag{11.68}$$

其中，N_a 为冲击波速度，$V_1=\dfrac{1}{\rho_1}$，$V_a=\dfrac{1}{\rho_a}$，γ 为空气的绝热指数。在分界线$\overline{OB}$上

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p_2 \\ u_1 &= u_2 \end{aligned}\right\} \tag{11.69}$$

因 HOE 左行简单波，所以在波区亦即在$\overline{OE}$上则有

$$u_2 + a_2 = \bar{a}_H = \frac{\sqrt{6}}{4}D \tag{11.70}$$

而

$$\left.\begin{aligned} a_2^2 &= \frac{3p_2}{\rho_2} \\ \frac{p_2}{\rho_3^3} &= \frac{\bar{p}_H}{\bar{\rho}_H^3} \end{aligned}\right\} \tag{11.71}$$

由(11.68—11.71)式便可解出 p_1、p_2、ρ_1、ρ_2、u_1、u_2、a_2、N_a，于是均匀区 BOA 和 EOB 的状态就确定了。显然，产物的最大飞散速度 u_2 与产物向真空飞散的速度不同(见(11.67)式)。

在图 11.12 中：

$$\overline{OA}:\ x = N_a t,\quad \overline{OB}:\ x = u_1 t,\quad \overline{OE}:\ x = (u_2 - a_2)t$$

在中心简单波区 HOE 中

$$\left.\begin{aligned} x &= (u-a)t \\ u + a &= \frac{\sqrt{6}}{4}D \end{aligned}\right\} \tag{11.72}$$

$\overline{OH}$为简单波区与均匀区的分界线：

$$x = -\bar{a}_H t = -\frac{\sqrt{6}}{4}Dt$$

当$\overline{OH}$从固壁反射后情况复杂了，冲击波$\overline{OA}$和分界线$\overline{OB}$由直线变成了曲线：$\widehat{AJ}$和

$\overset{\frown}{BL}$。在$\overline{HE}$——$\overline{EB}$——$\overline{BA}$以上的区域，除了 IEB 区和 LBA 区为简单波外，全为一般流动区，甚至还会在产物流动区内产生冲击波。所以除了上述几个区域可以给出分析解外，其它的区域只能数值积分求解。

11.4.2 爆轰产物膨胀范围的估计

在爆轰产物膨胀的初期阶段，即在原装药附近，流动可以按如上那样描述。在压力还比较高（比如大于 $2000\mathrm{kg/cm^2}$）时，可以假定其流动还是等熵的，但是随着产物的扩展，压力下降，原等熵假设的规律已不成立（绝热指数也在变化）。这样，再按基本方程求解问题就更复杂了。为了估计出产物的飞散范围，可以不去研究那些规律，而按下述方法做。

① 假定装药为球形或柱形，爆轰为瞬时的，爆轰产物的初始状态为 $p=\bar{p}_H, \rho=\bar{\rho}_H=\rho_0$，产物的初始体积为 $\tau=\tau_0$（即炸药的体积）。

② 假定产物膨胀分段等熵，以临界压力 p_c 为分界判据，p_c 一般取作

$$p_c = 2000\mathrm{kg/cm^2} \tag{11.73}$$

当 $p \geqslant p_c$ 时

$$p\tau^k = \mathrm{const} = \bar{p}_H\tau_0^k = p_c\tau_c^k \tag{11.74}$$

当 $p \leqslant p_c$ 时

$$p\tau^\gamma = \mathrm{const} = p_c\tau_c^\gamma \tag{11.75}$$

k 与 γ 不同，一般取

$$\begin{cases} k \approx 3 \\ \gamma = \dfrac{5}{4} \sim \dfrac{7}{5} \end{cases} \tag{11.76}$$

根据上述假设，按平均压力，从整体角度出发，可以估算产物膨胀的最大体积。即当产物压力 $p=p_a$ 时，产物膨胀达到最大体积 τ_∞，于是由(11.74)和(11.75)式得到

$$\tau_\infty = \left(\frac{\bar{p}_H}{p_c}\right)^{\frac{1}{k}}\left(\frac{p_c}{p_a}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\tau_0 \tag{11.77}$$

对于 $\rho_0=1.6\mathrm{g/cm^3}$，$k=3$，$D=7000\mathrm{m/s}$ 的标准炸药，$\bar{p}_H\approx10^5\mathrm{kg/cm^2}$，而 $p_a=1\mathrm{kg/cm^2}$。若 $\gamma=7/5$ 时，得出

$$\tau_\infty = 800\tau_0$$

即产物膨胀的最大体积为炸药的体积的 800 倍。若装药为球形，其产物体积的半径为装药半径的 9 倍；若为柱形装药则为 28 倍。

若 $\gamma=5/4$ 时，由(11.77)式得到

$$\tau_\infty = 1600\tau_0$$

即产物膨胀的最大体积为装药体积的 1600 倍。若装药为球形，其体积的半径为炸药半径的 12 倍；若为柱形装药则为 40 倍。

一般讲，$\gamma=\dfrac{5}{4}\sim\dfrac{7}{5}$，故对于球形装药，产物膨胀约为原半径的 10 倍，对于柱形装药则约为原半径的 30 倍。由此可见，爆轰产物的飞散距离不大，产物对目标的作用距离有限。

应当指出，尽管爆轰产物达到上述的最大体积 τ_∞，运动并没有停止，由于惯性作用它将继续向外运动，直到边界上的产物速度为零为止，因而造成最初膨胀的体积可能比

τ_∞大 30～40%，其平均压力 p 低于 p_a，于是造成在边界附近一系列振荡，经过衰减最后才达到极限体积 τ_∞。

还应该指出，虽然膨胀开始时产物与空气分界清楚，但随着时间的推移将变得越来越模糊。这是由于在分界面附近产生了涡流(vortex)，使其区域不断扩大，最终将分界面冲毁。但是产物向空气中的扩散较慢，因此在飞散的第一阶段分界面存在。这样，我们可以估算出在爆轰产物中所滞留的能量 E_∞。假定当产物膨胀到极限体积 τ_∞时，产物内部平均压力为 p_a，则有

$$E_\infty = \frac{p_a \tau_\infty}{\gamma - 1} \tag{11.78}$$

炸药爆炸的初始总能量 E_H：

$$E_H = \rho_0 \tau_0 Q \tag{11.79}$$

转入被冲击波扰动的空气介质中的能量 E_A：

$$E_A = E_H - E_\infty = \rho_0 \tau_0 Q - \frac{p_a \tau_\infty}{\gamma - 1} \tag{11.80}$$

由此得到

$$\frac{E_A}{E_H} = 1 - \frac{p_a}{(\gamma - 1)\rho_0 Q} \cdot \frac{\tau_\infty}{\tau_0} \tag{11.81}$$

对于标准炸药 $Q=1\text{kcal/g}$，$\tau_\infty/\tau_0=800$，$\rho_0=1.6\text{g/cm}^3$，这样：

$$\begin{cases} \text{当 } \gamma = \dfrac{7}{5} \text{ 时} \quad E_A/E_H = 0.97 \\ \text{当 } \gamma = \dfrac{5}{4} \text{ 时} \quad E_A/E_H = 0.91 \end{cases}$$

由此可见，绝大部分爆炸能量都转入被扰动的空气中，当然，由于熵的增加和自由能的相对减少，转入被冲击波扰动的空气中的能量，要比如上所计算的少。

11.5 点爆炸理论・自模拟运动

到此为止，我们研究的基本上是靠近装药附近的情况，即爆炸产物的运动起作用的地方。在离装药稍远一些地方，爆轰产物扩展不到那里，在那里起作用的是在空气中传播的冲击波和被冲击波扰动的空气，所以在研究这些地方的压力冲击等作用时，可以不去考虑产物，而把装药视作一个释放能量的"几何点"，周围的介质均作为空气，这种研究方法就是所谓的**点爆炸理论**(theory of point explosion)。

在如下的处理中，我们不仅仅研究一个"空间几何点"装药爆炸的情况，而是把空间"一条直线"装药的同时爆炸和"一个平面"装药的同时爆炸两种情况亦纳入统一研究。

11.5.1 点爆炸问题的准确提法

点爆炸引起空气介质的运动是一维不定常流动，其运动的控制方程组为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u) + (\alpha - 1)\frac{\rho u}{r} = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) + u\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11.82}$$

其中

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{为平面对称，对应于空间平面装药同时爆炸情形}\\ 2 & \text{为柱对称，对应于空间直线装药同时爆炸情形}\\ 3 & \text{为球对称，对应于空间点装药爆炸的情形}\end{cases}$$

$t=0$ 时爆炸，这时周围空气介质的状态为

$$u=0,\quad p=p_a,\quad \rho=\rho_a \tag{11.83}$$

爆炸在空气中引起冲击波，它的传播轨迹和速度分别为：

$$r=r_*(t),\quad N=\frac{\mathrm{d}r_*}{\mathrm{d}t} \tag{11.84}$$

在冲击波阵面之前的状态为

$$u_+=0,\quad p_+=p_a,\quad \rho_+=\rho_a \tag{11.85}$$

在冲击波阵面之后缘，即波阵面上的状态为

$$\left.\begin{aligned}u&=u_*=\frac{2}{\gamma+1}N\left(1-\frac{a_a^2}{N^2}\right)\\ p&=p_*=p_a+\frac{2\rho_a N^2}{\gamma+1}\left(1-\frac{a_a^2}{N^2}\right)\\ \rho&=\rho_*=\frac{(\gamma+1)\rho_a}{\gamma-1+\frac{a_a^2}{N^2}}\end{aligned}\right\} \tag{11.86}$$

其中

$$a_a^2=\gamma p_a/\rho_a$$

式(11.83)—(11.86)给出的条件不足以定解，必须再补充定解条件。在 $r=0$ 处可给出 $u\equiv 0$ 的条件，但在该处的压力、密度等无法给出。然而，作为总体的能量守恒条件总是满足的，设炸药释放的“总能量”为 E_0，于是则有下式满足

$$E_0+\frac{p_a}{(\gamma-1)\rho_a}\cdot\rho_a\tau_*=\int_0^{r_*}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{(\gamma-1)\rho}\right)\cdot\rho\mathrm{d}\tau \tag{11.87}$$

式中 τ_* 为冲击波阵面所包的空气体积：

$$\text{当 }\alpha=1\text{ 时},\tau_*=2r_*;\quad \alpha=2\text{ 时},\tau_*=\pi r_*^2;\quad \alpha=3\text{ 时},\tau_*=\frac{4}{3}\pi r_*^3$$

将其写成统一表达式为

$$\tau_*=\frac{2(\alpha-1)\pi}{\alpha}r_*^\alpha+(\alpha-2)(\alpha-3)r_*^\alpha$$

而“总能”E_0 是这样取的：$\alpha=1$ 时（面爆炸），E_0 为单位面积炸药的释放的能量；$\alpha=2$ 时（线爆炸），E_0 为单位长度装药所释放的能量；$\alpha=3$ 时（点爆炸），E_0 为整个装药所释放的能量。

方程组(11.82)式和定解条件(11.83)～(11.87)式完全可以确定流动的解。据方程组和定解条件可以确定其被定量所依赖的主定量为

$$u,p,\rho \parallel r,t,E_0,p_a,\rho_a,\gamma,\alpha$$

$$r_*\text{ 或 }N \parallel t,E_0,p_a,\rho_a,\gamma,\alpha$$

现在的问题为纯力学问题，不考虑温度，因此基本物理量只剩下三个，其量纲为 L、M、T（见 § 8.2）。在现问题中的主定参量中量纲无关的个数亦是三个，即 E_0、p_a、ρ_a：

$$[E_0] = ML^{\alpha-1}T^{-2}, \quad [p_a] = ML^{-1}T^{-2}, \quad [\rho_a] = ML^{-3}$$

由于主定参量中量纲独立的个数等于基本物理量的量纲个数，所以问题不能简化，运动不是自模拟的。（注意 E_0 的量纲可根据(11.87)式确定）。

11.5.2 **强点爆炸情况下运动的自模拟解**

所谓强点爆炸，是指在空气中所造成的冲击波阵面上的压力 $p_* \gg p_a$（或者 $N \gg a_a$）的点爆炸。在这种情况下冲击波上的条件(11.86)变成

$$\left.\begin{aligned} u &= u_* = \frac{2N}{\gamma+1} \\ p &= p_* = \frac{2\rho_a N^2}{\gamma+1} \\ \rho &= \rho_* = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_a \end{aligned}\right\} \tag{11.88}$$

同时在这种情况下，当 r_* 不是很大时 $p_a\tau_*/(\gamma-1) \ll E_0$，在(11.87)式中略去该项，则有

$$E_0 = \int_0^{r_*} \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1} \right) \tau' \mathrm{d}r \tag{11.89}$$

其中

$$\tau' = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}r} = 2(\alpha-1)\pi r^{\alpha-1} + \alpha(\alpha-2)(\alpha-3)r^{\alpha-1}$$

于是气体流动的解可由方程组(11.82)以及(11.88)与(11.89)式完全确定，据方程和定解条件则

$$u, p, \rho \parallel r, t, E_0, \rho_a, \gamma, \alpha \tag{11.90}$$

在(11.90)式中有量纲的主定参量只有 E_0 和 ρ_a，根据量纲理论（见 § 8.3），选定 r, t, ρ_a 作为量纲无关的最大主定量组，于是推出

$$\frac{ut}{r}, \quad \frac{pt^2}{\rho_a r^2}, \quad \frac{\rho}{\rho_a} \parallel \xi, \gamma, \alpha \tag{11.91}$$

即有

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{r}{t} \cdot f_1(\xi, \gamma, \alpha) \\ p &= \rho_a \left(\frac{r}{t} \right)^2 \cdot f_2(\xi, \gamma, \alpha) \\ \rho &= \rho_a \cdot f_3(\xi, \gamma, \alpha) \end{aligned}\right\} \tag{11.92}$$

其中 f_1、f_2、f_3 为未定函数，须由方程组(11.82)来确定，而 ξ 为

$$\xi = r \left(\frac{\rho_a}{E_0 t^2} \right)^{\frac{1}{\alpha+2}} \tag{11.93}$$

对于冲击波速 N 或冲击波轨迹 r_* 现依赖于：

$$r_* \parallel t, E_0, \rho_a, \gamma, \alpha \tag{11.94}$$

根据量纲分析可推得

$$r_*\left(\frac{\rho_a}{E_0t^2}\right)^{\frac{1}{\alpha+2}} = f_*(\gamma,\alpha) = \text{const} = \xi_*$$

从而有

$$r_* = \xi_*\left(\frac{E_0t^2}{\rho_a}\right)^{\frac{1}{\alpha+2}} \tag{11.95}$$

$$N = \frac{\mathrm{d}r_*}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{\alpha+2}\xi_*\left(\frac{E_0t^2}{\rho_a}\right)^{\frac{1}{\alpha+2}}\cdot t^{-1} = \frac{2}{\alpha+2}\frac{r_*}{t} \tag{11.96}$$

其中 ξ_* 为待定常数。

为了方便求解，引进无量纲变量 $\lambda=r/r_*$ 代替 ξ，据(11.95)和(11.93)式则有

$$\lambda = \frac{r}{r_*} = \frac{\xi}{\xi_*} = \frac{r\left(\frac{\rho_a}{E_0t^2}\right)^{\frac{1}{\alpha+2}}}{\xi_*} \tag{11.97}$$

再引进新的无量纲被定量：

$$f = \frac{u}{u_*},\quad g = \frac{\rho}{\rho_*},\quad h = \frac{p}{p_*} \tag{11.98}$$

由(11.97)式得知 λ 作为 ξ 的函数，从而由(11.92)、(11.88)和(11.96)式推出 f、g、h 也作为 λ 的函数，即

$$\begin{cases} f = \dfrac{(\alpha+2)(\gamma+1)}{4}\lambda\cdot f_1(\xi_*\lambda,\gamma,\alpha) \\ h = \dfrac{(\gamma+1)(\gamma+2)^2}{8}\lambda^2\cdot f_2(\xi_*\lambda,\gamma,\alpha) \\ g = \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\cdot f_3(\xi_*\lambda,\gamma,\alpha) \end{cases}$$

将(11.98)式的诸量代进(11.82)式中，对 f、h、g 求导时考虑到：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{r_*}\right) = \frac{1}{r_*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{r_*}\right) = -\frac{N\lambda}{r_*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{11.99}$$

于是得到无量纲形式的控制方程组

$$\left.\begin{aligned} &\left(f-\frac{\gamma+1}{2}\lambda\right)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\lambda} + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}+\frac{\alpha-1}{\lambda}f\right)g = 0 \\ &\left(f-\frac{\gamma+1}{2}\lambda\right)g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{\gamma-1}{2}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\lambda} - \frac{\alpha(\gamma+1)}{4}fg = 0 \\ &\left(f-\frac{\gamma+1}{2}\lambda\right)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\lambda} + \lambda\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}+\frac{\alpha-1}{\lambda}f\right)h - \frac{\gamma+1}{2}\alpha h = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11.100}$$

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

这就是强点爆炸的自模拟运动方程组，它只有一个自变量 λ，比原方程组少了一个自变量，故为自模拟运动，该方程组为一阶常微分方程组。

如上方程组的边界条件：在爆炸中心，即 $\lambda=0$ 处，速度永远为零，即

$$f(0) = 0 \tag{11.101}$$

在冲击波阵面上，即当 $\lambda=1$ 时，据(11.98)式则有

$$f(1)=g(1)=h(1)=1 \tag{11.102}$$

根据方程组(11.100)式和边界条件(11.101)与(11.102)式，经过一系列的变换解出

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= F^{-\frac{2}{\alpha+2}}\left[\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(F-\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)\right]^{\beta_2}\left\{\frac{2[\alpha\gamma-\alpha+2]}{3\alpha-2-\gamma(\alpha-2)}\right.\\
&\quad\cdot\left.\left[\frac{(\alpha+2)(\gamma+1)}{2(\alpha-1)\gamma-2\alpha}-F\right]\right\}^{-\beta_1}\\
g &= \left[\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(F-\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)\right]^{\beta_3}\left[\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma+1}{2}-F\right)\right]^{-\beta_5}\\
&\quad\cdot\left\{\frac{2(\alpha\gamma-\alpha+2)}{3\alpha-2-\gamma(\alpha-2)}\left[\frac{(\alpha+2)(\gamma+1)}{2(\alpha-1)\gamma-2(\alpha-3)}-F\right]\right\}^{-\beta_4}\\
h &= F^{\frac{2}{\alpha+2}}\left[\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma+1}{2}-F\right)\right]^{1-\beta_5}\\
&\quad\cdot\left\{\frac{2(\alpha\gamma-\alpha+2)}{3\alpha-2-\gamma(\alpha-2)}\left[\frac{(\alpha+2)(\gamma+1)}{2(\alpha-1)\gamma-2(\alpha-3)}-F\right]^{\beta_4-2\beta_1}\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{11.103}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
F &= \frac{f}{\lambda}\\
\beta_1 &= \beta_2+\frac{\gamma-1}{\alpha\gamma-\alpha+2}-\frac{2}{\alpha+2}\\
\beta_2 &= \frac{\gamma-1}{2\gamma-2+\alpha}\\
\beta_3 &= 1-2\beta_2\\
\beta_4 &= \frac{\alpha+2}{2-\gamma}\beta_1\\
\beta_5 &= \frac{2}{2-\gamma}
\end{aligned}\right\} \tag{11.104}$$

这就是自模拟运动方程的解，有兴趣的人可参阅 В. П. Корбейников, Теория Точечноговзрыва, физматгиз, 1961. 由 g 和 h 可以求得无量纲温度 l

$$l=\frac{T}{T_*}=\frac{p}{p_*}\cdot\frac{\rho_*}{\rho}=h/g \tag{11.105}$$

其中 T 为气体温度，T_* 为冲击波阵面上的温度，对于 $\gamma=1.4$ 时，上述解作图如图 11.13 所示。

将式(11.103)代进式(11.98)中，便得到强点爆炸所扰动的空气流动的有量纲解，然而这并不是流动问题的最后解，因不管是自变量还是函数中均含有一个未知常数 ξ_*，如下来确定它。

根据(11.89)式和以上结果则有

$$\begin{aligned}
E_0 &= \zeta\int_0^{r_*}\left(\frac{\rho u^2}{2}+\frac{p}{\gamma-1}\right)r^{\alpha-1}\mathrm{d}r\\
&= \zeta\frac{E_0}{\gamma-1}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^2\left(\frac{2}{\alpha+2}\right)^2\xi_*^{\alpha+2}\int_0^1\left(\frac{\gamma+1}{2}gf^2+\frac{\gamma+1}{2}h\right)\lambda^{\alpha-1}\mathrm{d}\lambda
\end{aligned} \tag{11.106}$$

其中

$$\zeta = 2(\alpha-1)\pi + \alpha(\alpha-2)(\alpha-3)$$

在上式中消去 E_0，并将(11.103)式代进，积分后可以给出 $\xi_* = \xi_*(\gamma,\alpha)$。

当 $\gamma=1.4$ 时：

$$\xi_* = \begin{cases} 0.985, & 当\ \alpha = 1 \\ 1.016, & 当\ \alpha = 2 \\ 1.033, & 当\ \alpha = 3 \end{cases}$$

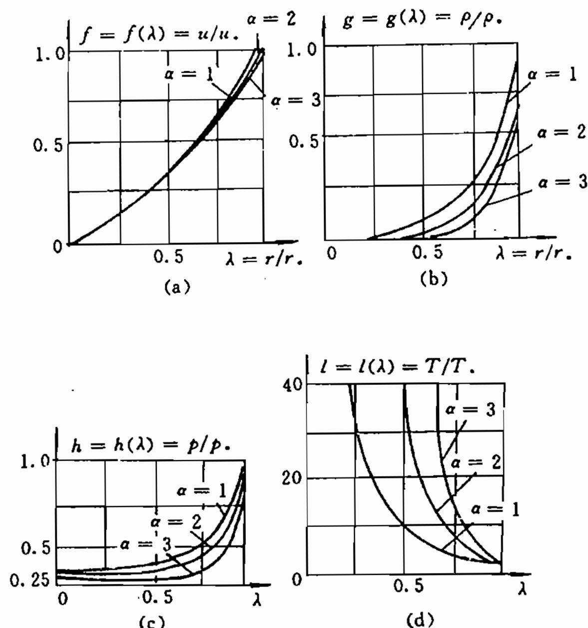


图 11.13　强点爆炸的物理量分布(无量纲形式)

至此为止，强点爆炸求解问题全部完成。

11.5.3　强点爆炸得出的几点重要结果及其他

① 冲击波阵面的运动规律。由(11.95)式给出在点爆炸($\alpha=3$)的情况下

$$r_* = \xi_*\left(\frac{E_0}{\rho_a}\right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}} \tag{11.107}$$

这个结论已经被实验所证实，1945 年美国在本土新墨西哥州爆炸了世界上第一颗原子弹，高速摄影机记录了爆炸后 $t=0.1\times10^{-3}s$(这时 $r_*=1$m)到 $t=62\times10^{-3}s$(这时 r_* 185m)爆炸产生的冲击波运动情况，根据实验数据整理出如下的经验公式

$$\frac{5}{2}\log_{10}r_* - \log_{10}t = 6.915 \tag{11.108}$$

其中 r_* 的单位为米、t 的单位为秒，实验数据点见图 11.14 所示。(详见 G. I. Taylor, Proceedings of the Royal Society, No. 8, p1065, 1950)。将(11.108)式改写一下则有

$$r_* = 184.5t^{\frac{2}{5}}$$

即

$$r_* \sim t^{\frac{2}{5}} \qquad (11.109)$$

这与按自模拟解的结果(11.107)式一致。

上述的点爆炸理论是美国的泰勒(G. I. Taylor)和原苏联的谢道夫(Л. И. Седов)在40年代的工作，但是他们的论文在第二次大战后才分别公开。

从实验数据看出，除了靠近爆炸中心外，直到爆炸后 $t=0.1$ 秒还满足理论给出的规律。如果时间再长，因强点爆炸的假定不成立，而出现偏差。

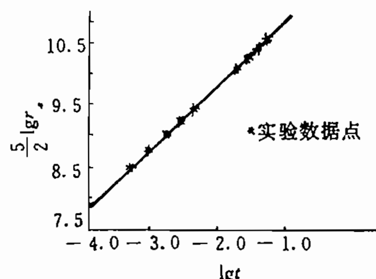


图 11.14 点爆炸冲击波的传播规律

② 关于防爆炸冲击的安全距离

在§9.2中提到了防爆安全距离和殉爆距离，并给出了工程上使用的经验公式。根据强点爆理论可以推出类似的结果，爆炸产生的作用最强烈的是在冲击波到达那里的一瞬间，即冲击波阵面上的压力 p_* 起主要作用，所以殉爆距离和殉爆安全距离通常均以压力 p_* 来衡量。由式(11.88)和(11.96)可以得出 p_* 的表达式如下：

$$p_* = \eta E_0 r_*^{-\alpha} \qquad (11.110)$$

其中 η 为常数，$\alpha=1,2,3$。当 $\alpha=3$ 时，由上式给出

$$p_* = \eta E_0 r_*^{-3} \qquad (11.111)$$

总能量 E_0 当然与炸药的质量 W 成正比，从而上式可表成

$$p_* = bW r_*^{-3}, \quad b \text{ 为常数} \qquad (11.112)$$

对于质量不同的两块同种炸药在空气中发生点爆炸，则有

$$\left.\begin{aligned} p_{*1} &= bW_1 r_{*1}^{-3} \\ p_{*2} &= bW_2 r_{*2}^{-3} \end{aligned}\right\}$$

如果二者作用相同，即 $p_{*1}=p_{*2}$，则有

$$r_{*1}/r_{*2} = \sqrt[3]{W_1/W_2} \qquad (11.113)$$

如果从实验上已确定出第一种装药的破坏距离，即冲击波到达的距离，则第二种装药的破坏距离就可由(11.113)式确定，于是可以得到类同第9.2节第三段的殉爆距离 R 或安全距离 R_*。

$$R = A\sqrt[3]{W} \quad A \text{ 为常数} \qquad (11.114)$$

同理，当在(11.110)式中 $\alpha=2$(即柱装药)时，则可推出(9.4)式和(9.5)式的结果。

③ 强点爆炸的流场性质小结

a. 爆炸中心处 $f(0)=0$, $g(0)=0$, $h(0)<1$，由此可见，爆炸中心处气体非常稀薄，压力小于冲击波阵面上的压力，而 $T/T_*=h(\lambda)/g(\lambda)$，所以爆炸中心的气体将一直保持在极高的温度状态下。

b. 冲击波阵面上的压力最大，但在 $r=0$ 到 $r=0.5r_*$ 这段范围，压力几乎为常数；同时，由 $g(\lambda)$ 的分布可见，强爆炸发生后，爆炸冲击波所包围的气体质量几乎全部集中在波阵面附近。

c. 在任何时刻，波阵面后的流场速度接近与 r 成正比。

因此，就动力学效应来讲，强爆炸所造成的破坏作用，主要发生在冲击波阵面经过的

一瞬间。

尽管强爆炸理论做了一些假设，而且也未考虑爆炸中心附近因温度极高而使气体发生的物理化学性质变化，但是它在理论研究上和实际应用上都起过重要作用（直到今天，点爆炸理论仍具有重要的应用价值）。它也是用量纲理论简化问题并得到有价值的结果的最成功实例之一。

11.5.4 关于自模拟运动的概念

在前面，我们提到了自模拟的概念。所谓自模拟运动（automodeling motion），——是指对于一个运动而言，如果描述该运动的方程组经过某种变换（量纲分析亦是一种变换手段），能使原控制方程组的求解问题归结为另一个方程组的求解问题，而这个新方程组的自变量个数少于原方程组的自变量个数，——这个运动就称作自模拟运动，亦简称自模运动。

显然前面所研究的爆轰产物的侧向飞散和强点爆炸都 是自模运动，因为经过量纲分析后，问题均归为一个自变量的求解问题。

自模拟运动的另一种说法是：如果决定整个运动的所有主定量，它们藉幂次相乘的办法所组成的独立的无量纲自变量的个数少于原来的自变量的个数，则称这种运动为自模拟运动。

自模拟运动的判断准则

对于一个运动，如果在所有的主定量中除自变量以外，余下的那些主定量（参量）中既没有为长度和时间量纲的量；同时它们也组不成时间和长度的量纲，——这个运动必为自模拟的。（证明从略）

11.6 一维爆轰对迎面刚壁的冲击作用

现考虑如图 11.15(a)所示的装药，炸药装在左端开口、右端封闭的半无限长刚性管中，装药初始密度为 ρ_0、长为 l，其左端临接真空、右端为刚壁，在 $t=0$ 时从左端起爆，爆轰是稳定的，爆速为 D。

为了简单起见，假定爆轰产物流动是等熵的，绝热指数 $k=3$；同时假定爆轰波 OA 在刚壁反射的冲击波 AB 为弱激波（注意所考虑的不是爆轰波反射之初，爆轰波在刚壁上反射之初将在§11.10 中专门研究），于是反射波 AB 可视作宽度极窄的左行压缩波，成为"一条左行特征线"。

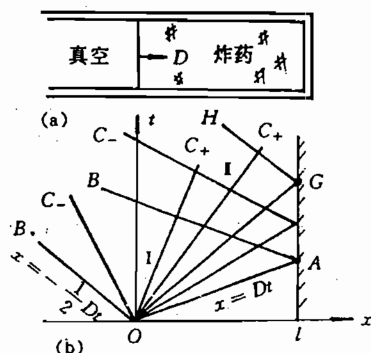


图 11.15 一维爆轰对迎面刚壁的作用($k=3$)

在 $t\leqslant l/D$ 时，爆轰产物流动为右行中心简单波（参见(11.27)式）：

$$\left.\begin{aligned} x &= (u+a)t \\ u-a &= -\frac{1}{2}D \end{aligned}\right\} \tag{11.115}$$

该简单波头与爆轰波阵面 OA 重合，在 OA 上物理量满足（见(11.12)式）：

$$
\left.\begin{aligned}
u &= u_H = \frac{1}{4}D \\
p &= p_H = \frac{1}{4}\rho_0 D^2 \\
\rho &= \rho_H = \frac{4}{3}\rho_0 \\
a &= a_H = \frac{3}{4}D
\end{aligned}\right\} \tag{11.116}
$$

OA 线为：

$$x = (u_H + a_H)t = Dt \tag{11.117}$$

在稀疏波波尾 OB_* 上，$a=0$，则由(11.115)式推出 OB_* 为

$$x = ut = -\frac{1}{2}Dt \tag{11.118}$$

在 $t \geqslant l/D$ 时，由于爆轰波之后的稀疏波从刚壁上反射，形成与简单波区Ⅰ不同的一般流动区Ⅱ，因整个流动(包括区域Ⅰ和Ⅱ)是“等熵的”，且 $k=3$，则有(见(11.6)式)：

沿 C_+ 特征线：

$$x = (u + a)t \tag{11.119}$$

沿 C_- 特征线：

$$x = (u - a)t + F_*(u - a) \tag{11.120}$$

由于每条 C_- 特征线都是从刚壁上发出的(见图 11.15(b))，它们也是诸 C_+ 特征线在刚壁上的反射线，而 AB 作为弱激波(一条左行特征线)，穿过它视黎曼第一不变量近似为常数，故在Ⅱ区中的诸 C_+ 特征线是Ⅰ区中诸 C_+ 的延长，所以任一条 C_+ 特征线(如 OG)的方程均为(11.119)式的形式。现考虑刚壁 lA 上任一点 G，按照 OG 特征线关系式，在 G 点则有

$$x_G = (u_G + a_G)t_G \tag{11.121}$$

按照 GH 特征线关系式，在 G 点应有

$$x_G = (u_G - a_G)t_G + F_*(u_G - a_G) \tag{11.122}$$

而在 G 点又满足

$$x_G = l, \qquad u_G \equiv 0 \tag{11.123}$$

于是由以上诸式，再考虑到沿 GH 线有：$u-a \equiv u_G - a_G$，从而推出

$$F_*(u - a) \equiv F_*(u_G - a_G) = 2l \tag{11.124}$$

如上所考虑的 G 点是沿 lA 线任取的，因此从刚壁上发出的任一条 C_- 特征线的方程形式均为如下形式

$$x = (u - a)t + 2l \tag{11.125}$$

于是在Ⅱ区中任一点都有下式成立

$$
\left.\begin{aligned}
x &= (u + a)t \\
x &= (u - a)t + 2l
\end{aligned}\right\} \tag{11.126}
$$

由上式求解出

$$u = \frac{x}{t} - \frac{l}{t} \tag{11.127.1}$$

$$a = \frac{l}{t} \tag{11.127.2}$$

利用等熵条件和音速表达式联立可求解压力和密度：

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho^3} &= \frac{p_H}{\rho_H^3} = \frac{27}{256} \cdot \frac{D^2}{\rho_0^2} \\ a^2 &= \frac{3p}{\rho} \end{aligned} \tag{11.128}$$

现把弱反射激波 AB 视作一条满足(11.125)式的特征线，故有

$$x = -Dt + 2l \tag{11.129}$$

作用在右端刚壁上的压力可表为

$$p = p_H\left(\frac{\rho}{\rho_H}\right)^3 = p_H\left(\frac{a}{a_H}\right)^3 = \frac{16}{27}\rho_0 D^2\left(\frac{l}{Dt}\right)^3 \tag{11.130}$$

作用在刚壁的单位面积上的冲量 i_0 为

$$i_0 = \int_{l/D}^{\infty} p\mathrm{d}t = \int_{l/D}^{\infty} \frac{16}{27}\rho_0 D^2\left(\frac{l}{Dt}\right)^3 \mathrm{d}t = \frac{8}{27}\rho_0 l D \tag{11.131}$$

作用在刚壁上的总冲量 I 为

$$I = i_0 s_0 = \frac{8}{27}\rho_0 s_0 D = \frac{8}{27} m D \tag{11.132}$$

其中 $m=\rho_0 l s_0$ 为装药质量，s_0 为右端刚壁的面积。

当然应该指出，当爆轰产物稀疏到一定程度，即当 t 很大时，假定绝热指数 k 取值为 3 则不成立了。这时 $k<3$，于是由(11.130)和(11.131)求得 p 和 i_0 值与实际相比可能偏低。但是考虑到 p 值按 t^{-3} 量级下降极快，后期的 p 值对冲量 i_0 影响不大，因此，由于 k 值的变化对 i_0 产生的影响，可暂略不计。

如上考虑的是图 11.15(a)所示的装药左端起爆对右刚壁的冲击作用。可以证明，如果起爆从封闭的右端开始，且起爆后亦立即成为 C—J 爆轰，则产物对右刚壁的冲击作用同从左端自由面起爆对右刚壁的冲量是一样的，即冲量也是(11.131)式给出的结果。由此得出结论，对于图 11.15(a)所示的装药情况，不论从左端起爆，还是从右端起爆，爆轰产物对右端刚壁的冲量是等同的。

当然也应指出，上述结论是在种种假定的前提下得出的，结果如何还有待实验验证。

如上研究的是爆轰产物作严格的一维流动，管壁作为刚壁。实际上是不可能的，不管管壁多么坚厚，它至少要发生一定的侧向变形，引起产物侧向飞散，作为一种极限情况是没有管壁的裸露药柱爆轰。

在爆轰产物作三维流动的情况下，爆轰产物对端部刚壁的冲量计算仍可按(11.132)式。不过，须将该式中的装药质量 m 换成有效装药质量 m_f 即按下式计算对端部的总冲量。

$$I = \frac{8}{27} m_f D \tag{11.133}$$

这一见解是弗拉索夫(O. E. Власов)等提出来的。所谓装药的有效部分是指其爆轰产物向指定方向飞散的那部分装药。

鲍姆(Ф. А. Баум)等给出了有效装药部分的计算方法，具体如下。图 11.16 所示的柱形装从中间某个截面$\overline{MM}$处起爆，爆轰产物向左、右两个方向飞散的质量 m_1 和 m_2 按下式计算

$$
\left.\begin{aligned}
m_1 &= \rho_0 \frac{4l_1 + 5l_2}{9} s_0 \\
m_2 &= \rho_0 \frac{5l_1 + 4l_s}{9} s_0
\end{aligned}\right\} \tag{11.134}
$$

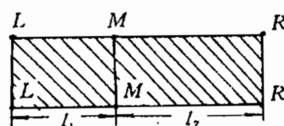


图 11.16 柱形装药与中间某个截面$\overline{MM}$

其中 s_0 为药柱的横截面的面积。

如果起爆面在装药的左端面，即 $l_1=0$，$l_2=l$，于是从上式得到爆轰产物向右飞散的质量

$$m_2 = \rho_0 l_* s_0 \tag{11.135}$$

其中

$$l_* = \frac{4}{9} l \tag{11.136}$$

即相当把整个装药长度 l 分成两部分，其靠右端的长为 l_* 段装药的爆轰产物向右飞散。

上面所考虑的仍相当于炸药装在管中其产物作一维飞散，故考虑不够“精确”。因当装药没有外壳，产物还要向侧向飞散，从而使得 l_* 这部分装药的爆轰产物不能全部作用到右端面上，其产物能够作用到右端面上的有效质量 m_f 则相当一个圆锥(cone)，如图 11.17(a)所示。即为

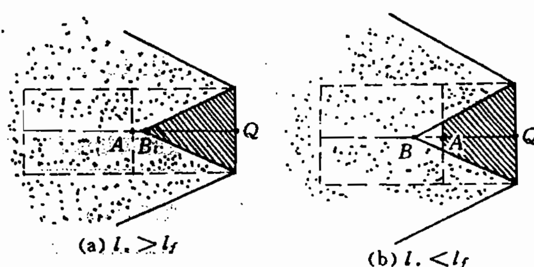


图 11.17 裸体药柱爆轰时，其产物可作用在端面上的有效质量锥

$$m_f = \frac{1}{3} \rho_0 \pi r^2 l_f \tag{11.137}$$

式中 r 为装药圆柱半径，l_f 为圆锥高，可据下式计算

$$l_f / D = r / v \tag{11.138}$$

式中 v 为横向稀疏速度，根据实际考察，它几乎为爆速 D 的 1/2，故取

$$v = D/2 \tag{11.139}$$

由于(11.138)式推得

$$l_f = 2r \tag{11.140}$$

显然，当 $l_* \geq l_f$，即 $l \geq 4.5r$ 时，有效质量即图 11.17(a)所示的圆锥(在该图中 $AQ = l_*$，

$BQ=l_f$)质量为

$$m_f = \frac{1}{3}\rho_0\pi r^2 l_f = \frac{2}{3}\rho_0\pi r^3$$

将上式代进(11.133)式中则求得

$$I = \frac{16}{81}\rho_0\pi r^3 D \tag{11.141}$$

当 $l_* < l_f$，即 $l<4.5r$ 时，由于其产物朝右方向飞散的装药长度 l_* 小于 l_f，那只有图 11.17(b)所示的截头圆锥装药部分作用在右端面上(图中 $AQ=l_*$，$BQ=l_f$)，则有效质量 m_f 为

$$m_f = \frac{1}{3}\rho_0 l_*(r_1^2 + r^2 + r_1 r)\pi$$

而

$$l_* = \frac{4}{9}l,\quad r_1 = r\frac{l_f - l_*}{l_f} = r - \frac{2}{9}l$$

于是求得

$$m_f = \left(\frac{4}{9} - \frac{8}{81}\frac{l}{r} + \frac{16}{2187}\frac{l^2}{r^2}\right)\rho_0\pi r^2 l$$

将上式代进(11.133)式中求得

$$I = \frac{8}{27}\left(\frac{4}{9} - \frac{8}{81}\frac{l}{r} + \frac{16}{2178}\frac{l^2}{r^2}\right)\rho_0\pi r^3 l D \tag{11.142}$$

从上式可以看出，当 $l<4.5r$ 时冲量随着装药长度 l 增加而增加，但是当 l 增加到满足 $l \geqslant 4.5r$ 时，冲量保持不变，即与 l 无关，见(11.141)式。

上述粗估 m_f 和求 I 的办法，已得到实验证实，表 11.1 列出了柱形装药 TNT 对端部比冲量 $i_0=I/\pi r^2$ 的实验值和计算值。

表 11.1　TNT 装药对端部比冲量的实验值和计算值

装药长度 l (mm)	半径 r (mm)	装药密度 ρ_0(g/cm³)	爆速 D (m/s)	比冲量 i_0(kg.s/cm²)	
				实验值	计算值
80	10.00	1.40	6320	0.162	0.178
80	11.75	1.40	6320	0.217	0.208
80	15.70	1.40	6320	0.305	0.280
80	20.00	1.40	6320	0.378	0.360
70	10.00	1.50	6640	0.205	0.200
70	11.75	1.50	6640	0.266	0.234
70	15.70	1.50	6640	0.325	0.314
43	20.00	1.30	6025	0.296	0.272
61	20.00	1.30	6025	0.316	0.305
67	20.00	1.30	6025	0.318	0.310

表 11.1 的计算值利用了公式(11.141)和(11.142)式。从表中可以看到粗估的计算值同实验值比较接近。

当装药有外壳时，径向稀疏波的影响要比裸体装药的情形小，因而对装药端部的冲量相应地增大，当然(11.141)和(11.142)式一般就不能使用了。

11.7 一维刚管中爆轰对侧壁的冲击作用

在无穷长的真空管中部装有一段长为 l、密度为 ρ_0、爆速为 D 的炸药，见图 11.18(a)，从左端面起爆，这相当于§11.2 第三部分情况。不过现在与那里稍有不同，现取 $k=3$，并且考虑距装药左端为 ξ 处的管壁上某一点 Q 处的比冲量 i_*.

爆轰产物流动分成两个区，I 区为右行简单波区；Ⅱ 区为一般流动。在 $k=3$ 的情况下，I 区的边界(参见§11.2 第三部分)：

$$\left.\begin{aligned} &OB_* \text{线} \quad x=-\frac{1}{2}Dt \\ &OA \text{线} \quad x=Dt \\ &AB \text{线} \quad x=-\frac{D}{2}t+\frac{3}{2}l \end{aligned}\right\} \tag{11.143}$$

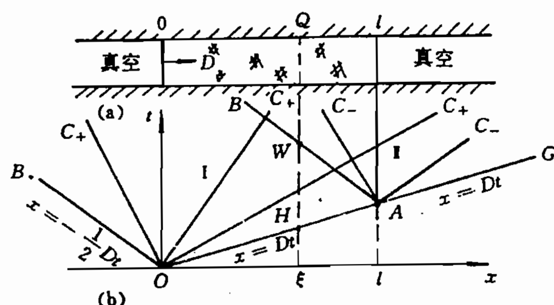


图 11.18 无限长管中一段炸药的爆轰($k=3$)

Ⅱ 区的边界：

$$\left.\begin{aligned} &AG \text{线} \quad x=Dt \\ &AB \text{线} \quad x=-\frac{D}{2}t+\frac{3}{2}l \end{aligned}\right\} \tag{11.144}$$

在 I 区的物理量(据(11.27)式)则有

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{x}{2t}-\frac{D}{4} \\ a&=\frac{x}{2t}+\frac{D}{4} \end{aligned}\right\} \tag{11.145}$$

在 Ⅱ 区中，沿 C_+特征线

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u+a \\ u+a=\text{const} \end{cases}$$

再考虑到所有的 C_+特征线都是从 0 点发出的，则有

$$x=(u+a)t \tag{11.146}$$

在Ⅱ区，沿 C_- 特征线

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u - a \\ u - a = \text{const}\end{cases}$$

再考虑到所有 C_+ 特征线都是从 A 点发出的，则有

$$x = (u-a)\cdot\left(t - \frac{l}{D}\right) + l \tag{11.147}$$

由式(11.146)和(11.147)可求得

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{x}{2t} + \frac{x-l}{2\left(t-\dfrac{l}{D}\right)} \\ a &= \frac{x}{2t} - \frac{x-l}{2\left(t-\dfrac{l}{D}\right)} \end{aligned}\right\} \tag{11.148}$$

现在考刚管侧壁 Q 点的比冲量 i_*，即在 $x=\xi$ 处管壁的冲量。

在 $t=\xi/D$ 时，爆轰波阵面到达 $x=\xi$ 截面，管壁从此开始受到产物的冲击作用。在 $\dfrac{\xi}{D} \leqslant t \leqslant \dfrac{3l-2\xi}{D}$ 期间，即图 11.18(b)中的 HW 段，这时期在 $x=\xi$ 截面处产物流动为简单波，据(11.145)式：

$$a = \frac{\xi}{2t} + \frac{D}{4}$$

则该处的压力

$$p = p_H\left(\frac{a}{a_H}\right)^3 = \frac{16}{27}\frac{\rho_0}{D}\left(\frac{\xi}{2t} + \frac{D}{4}\right)^3 \tag{11.149}$$

在 $t \geqslant \dfrac{3l-2\xi}{D}$ 之后，$x=\xi$ 处产物为一般流动，据(11.148)式

$$a = \frac{\xi}{2t} - \frac{\xi - l}{2\left(t - \dfrac{l}{D}\right)}$$

则该处的压力表成：

$$p = p_H\left(\frac{a}{a_H}\right)^3 = \frac{16}{27}\frac{\rho_0}{D}\left[\frac{\xi}{2t} - \frac{\xi-l}{2\left(t-\dfrac{l}{D}\right)}\right]^3 \tag{11.150}$$

根据(11.149)和(11.150)式，$x=\xi$ 处管壁上的比冲量可以表成

$$\begin{aligned} i_* &= \int_{\frac{\xi}{b}}^{\frac{3l-3\xi}{D}} \frac{16}{27}\frac{\rho_0}{D}\left(\frac{\xi}{2t}+\frac{D}{4}\right)^3 \mathrm{d}t + \int_{\frac{3l-3\xi}{D}}^{\infty} \frac{16}{27}\frac{\rho_0}{D}\left[\frac{\xi}{2t} - \frac{\xi-l}{2\left(t-\dfrac{l}{D}\right)}\right]^3 \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{27}\rho_0 lD\left[1 + 6\eta(1-\eta) + \frac{3}{2}\eta\ln\frac{3-2\eta}{\eta} + 6\eta(1-\eta)(2\eta-1)\ln\frac{3-2\eta}{2(1-\eta)}\right] \end{aligned} \tag{11.151}$$

其中

$$\eta = \xi/l$$

当 $\eta = 0$ 时， $i_* = \frac{1}{27}\rho_0 Dl$；

当 $\eta = \frac{1}{4}$ 时， $i_* = 0.1007\rho_0 Dl$；

当 $\eta = \frac{1}{2}$ 时， $i_* = 0.1274\rho_0 Dl$；

当 $\eta = \frac{3}{4}$ 时， $i_* = 0.1304\rho_0 Dl$；

当 $\eta = 1$ 时， $i_* = \frac{1}{27}\rho_0 Dl$.

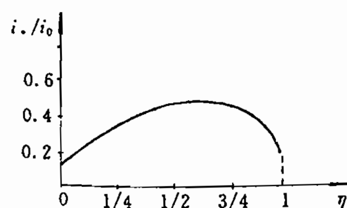


图 11.19 i_*/i_0 与 η 的关系曲线

将 i_*/i_0 与 η 的关系绘成曲线，见图 11.19，其中 i_0 为一维爆轰对迎面刚壁的比冲量

$$i_0 = \frac{8}{27}\rho_0 Dl$$

见(11.131)式，从图上可以看出侧壁上所受最大比冲量在 $\eta=0.75$ 附近。当然，可以通过对(11.151)式所示的 i_* 求极值，来确定 i_* 取最大值的确切位置。

11.8 爆轰产物对物体一维抛射的若干理论

炸药爆炸推动一定质量物体高速运动，在爆炸问题的研究中很重要。在本节先研究一维抛射情况，处理一维抛射有几种方法。

11.8.1 斯达纽柯维奇抛掷公式

导出斯达纽柯维奇(К. П. Станюкович)抛掷公式的思想同 § 11.6 处理一维爆轰冲击迎面刚壁一样：

① 假定爆轰波阵面从物体上反射为弱激波，穿过它黎曼第一不变量近似不变。

② 假定爆轰产物在整个运动期间熵不变，即穿过反射激波熵近似不变

③ 考虑特殊情况：爆轰产物绝热指数 $k=3$，且物体作为刚体。

与 § 11.6 所不同的是固定刚壁换成了运动刚体，即爆轰产物的速度 u 在刚体上不为零。抛体的模型如图 11.20(a)所示。(该问题，按瞬时爆轰的处理，请看 § 7.29)。

在一个无限长的刚性管中，装有一段长为 l 的炸药，装药右端为一个质量为 M 且可沿管自由移动的刚体。在 $t=0$ 时从左端起爆，爆轰是稳定的，爆速为 D，装药密度为 ρ_0。同 § 11.6 中的分析一样，由于假定爆轰波 OA 的反射波 AB 为弱激波，在刚体运动轨迹线 $\mathscr{T}$ 之后的 C_+ 特征线都看做是从 O 点发出的，于是有

$$x = (u + a)t \qquad (11.152)$$

在 $t=l/D$ 时爆轰波阵面到达物体表面，从此物体开始运动，因作为刚体，故运动满足

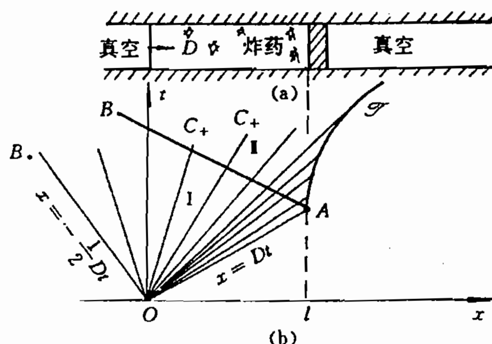


图 11.20 $k=3$ 时的一维抛射运动

$$M\frac{du_*}{dt_*}=p_*s_0 \tag{11.153}$$

其中，M、s_0、u_*分别为物体的质量、受力面积（即管的横截面）和速度，p_*为作用在物体上产物的压力，下标"＊"表示取在物体上的量。

由于爆轰产物运动是等熵的，故有

$$p_*=p_H\left(\frac{a_*}{a_H}\right)^3=\frac{16}{27}\frac{\rho_0}{D}a_*^3 \tag{11.154}$$

式中a_*为爆轰产物在物体上的音速，将上式代进(11.153)式中，得到

$$\frac{du_*}{dt_*}=\frac{\lambda}{lD}a_*^3 \tag{11.155}$$

其中

$$\begin{cases}\lambda=\dfrac{16m}{27M}=\dfrac{16}{27}R, \quad R=\dfrac{m}{M}\text{为装药与物体的质量比}\\ m=\rho_0 s_0 l\text{ 为装药的质量}\end{cases}$$

物体的运动轨迹$\mathscr{T}$：$x_*=f(t_*)$，即有

$$\frac{dx_*}{dt_*}=f'(t_*)=u_* \tag{11.156}$$

$\mathscr{T}$上的每一点与O点的连线都是一条右行特征线C_+，见图11.19(b)，据(11.152)式则有

$$x_*=(u_*+a_*)t_* \tag{11.157}$$

将该式对t_*微分（注意，u_*和a_*只是t_*的函数），并利用(11.156)式则求得

$$\frac{du_*}{dt_*}=-\frac{a_*}{t_*}-\frac{da_*}{dt_*} \tag{11.158}$$

将(11.155)和(11.158)式联立，得到

$$\frac{da_*}{dt_*}+\frac{a_*}{t_*}+\frac{\lambda a_*^3}{lD}=0 \tag{11.159}$$

为解此方程，做如下变换，令

$$Z=a_*\sqrt{t_*} \tag{11.160}$$

于是(11.159)式变换成

$$\frac{dZ}{d\ln t_*}=-\left(\frac{1}{2}Z+\frac{\lambda}{lD}Z^3\right)$$

将上式改写成

$$\frac{dZ^2}{Z^2\left(1+\frac{2\lambda}{lD}Z^2\right)}=-d\ln t_*$$

将上式积分后推出

$$\frac{1+\frac{(2\lambda a_*^2 t_*)}{(lD)}}{a_*^2 t_*^2}=\text{const}$$

利用初始条件，即爆轰波阵面到达物体时刻的条件，即

$$t = t_* = l/D \text{ 时}, \quad u_* = 0, \quad a_* = D, (\text{参见(11.157)式}) \tag{11.161}$$

于是推出

$$\frac{1 + \dfrac{(2\lambda a_*^2 t_*)}{(lD)}}{a_*^2 t_*^2} = \frac{1 + 2\lambda}{l^2} \tag{11.162}$$

即

$$a_* = \frac{l}{t_*}\theta \tag{11.163}$$

其中

$$\theta = \left[1 + 2\lambda\left(1 - \frac{l}{Dt_*}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{11.164}$$

将式(11.163)代进式(11.155)中得到

$$\frac{\mathrm{d}u_*}{\mathrm{d}t_*} = \frac{\lambda}{lD}\left(\frac{l\theta}{t_*}\right)^3$$

将上式积分

$$\int_0^{u_*} \mathrm{d}u_* = \int_{l/D}^{t_*} \frac{\lambda l^2}{D} \frac{\mathrm{d}t_*}{t_*^3\left[1 + 2\lambda\left(1 - \dfrac{l}{Dt_*}\right)\right]^{3/2}}$$

积分后整理得到

$$u_* = D\left[1 + \frac{\theta - 1}{\lambda\theta} - \frac{l\theta}{Dt_*}\right] \tag{11.165}$$

这就是被抛射物体的运动速度，它随时间上升极快，很快趋于一个极限速度值。当 $t_* \to \infty$ 时就得到抛体的极限速度 u_{max}，据(11.164)式

$$\theta_{max} = \lim_{t \to \infty}\theta = [1 + 2\lambda]^{-\frac{1}{2}} = \left[1 + \frac{32}{27}R\right]^{-\frac{1}{2}}$$

于是由(11.165)式得到(令 $u_c = u_{max}$)：

$$u_c = u_{max} = \lim_{t_* \to \infty} u_* = D\left[1 + \frac{\theta_{max} - 1}{\lambda\theta_{max}}\right]$$

$$= D\left[1 + \frac{27}{16R}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{32}{27}R}\right)\right] = D\frac{\sqrt{1 + \frac{32}{27}R} - 1}{\sqrt{1 + \frac{32}{27}R} + 1} \tag{11.166}$$

式(11.165)和(11.166)常称作斯达纽柯维奇抛掷公式，因在1959年苏联出版的《爆炸物理》[1]中称上述理论是斯达纽柯维奇建立的。而在阿述兹(A. K. Aziz)等人的论文中[2,3]亦导出了(11.165)和(11.166)式，故有人称该公式为阿述兹公式。在阿述兹的论文中又提到罗斯托克和马瑞(N. Rostoker and T. P. Murry)早在1952年就发表了(11.166)式的等价形式[4]。因此，如上的一维抛掷公式如何称呼尚无定论。但为了方便，我们仍暂称斯达纽柯维奇公式。

尽管导出如上的一维抛掷公式时做了几个重要假设，然而它已得到实验证实，在工程实践中多用做一维抛体的速度计算，特别是计算极限速度。

但是一维抛掷公式有个重要不足，在该公式中没有反映出产物绝热指数 k 的影响，因导出该公式时假定 $k=3$，$k=3$ 对于许多高能炸药来说固然合理，但亦有许多炸药，特别是一些加了非爆炸物的混合炸药，其绝热指数与 3 差异较大，如太乳炸药。

11.8.2 阿述兹的数值解

阿述兹等人，除了上面所提到的工作之外，更重要的是他们做了数值解[3]。他们将上面求抛体速度时所做的三点重要假设去掉（但抛体仍作为刚体），考虑爆轰波 OA 的反射激波 AB 存在，见图 11.20，在 Ⅰ 区和 Ⅱ 区采用如下微分方程组，即一维不定常多方气体的运动方程组：

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial p}{\partial x}\\
&\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0\\
&\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=-p\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\\ \text{或}\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e+\dfrac{1}{2}u^2\right)=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(pu)\end{cases}\\
&e=\frac{1}{k-1}\frac{p}{\rho}
\end{aligned}\right\}\tag{11.167}$$

其中 e 为比内能，$V=\dfrac{1}{\rho}$ 为比容，被抛物体的运动轨迹和运动方程同前述，即

$$\left.\begin{aligned}
&x_* = f(t_*)\\
&M\frac{\mathrm{d}u_*}{\mathrm{d}t_*}=p_* s_0\\
&u_*=\frac{\mathrm{d}x_*}{\mathrm{d}t_*}
\end{aligned}\right\}\tag{11.168}$$

在抛体的作用面上，即当 $x=x_*$，$t=t_*$ 时

$$p=p_*,\ u=u_*\tag{11.169}$$

其中 x_* 和 t_* 为取在抛体轨迹上的空间坐标和时间。

在爆轰波阵面 OA 上（见图 11.20）满足

$$\left.\begin{aligned}
&p=p_H=\frac{1}{k+1}\rho_0 D^2\\
&\rho=\rho_H=\frac{k+1}{k}\rho_0\\
&u=u_H=\frac{1}{k+1}D\\
&a=a_H=\frac{k}{k+1}D
\end{aligned}\right\}\tag{11.170}$$

还有一个边界条件，即反射冲击波 AB 上的条件，它在流场中是未知的，在数值计算中一般是在(11.167)式中引进人工粘性项来自动满足它，但在阿述兹的算法中是采用特殊的差分格式——拉克斯交替法(Lax stagger method)来满足此条件。

为了数值计算方便，将方程组改成拉格朗日形式(Lagrangian form)。引进拉格朗日质量坐标 m

$$m = \int_b^x \rho \mathrm{d}x = \int_{b^0}^{x^0} \rho^0 \mathrm{d}x^0 \tag{11.171}$$

其中，x^0 和 ρ^0 为 $t=t^0$ 时刻爆轰产物的空间坐标和密度。对于本问题而言，t^0 最好取成爆轰波到达物体表面时刻，即 $t^0=l/D$，若把 t^0 时刻产物诸质点所在的空间位置 x^0 当成诸质点的标记，则在任意时刻 t 产物质点的空间坐标，即质点轨迹可表作

$$x = x(x^0, t) \tag{11.172}$$

在(11.171)式中 b^0 为在 t^0 时刻某一质点的空间位置，而 b 为该质点在 t 时刻的空间位置，即

$$b = x(x^0, t)$$

利用(11.171)式将式(11.167)改写成拉格朗日形式为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial m} \\
&\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial m} \\
&\frac{\partial e}{\partial t} = -p\frac{\partial V}{\partial t} \\
&\left(\text{或 } \frac{\partial e}{\partial t}\left(e + \frac{1}{2}u^2\right) = -\frac{\partial(pu)}{\partial m}\right) \\
&e = \frac{1}{k+1}pV \\
&\frac{\partial x}{\partial t} = u
\end{aligned}\right\} \tag{11.173}$$

为做差分计算，将坐标 x^0 分割成若干段，第 j 段的坐标为 x_j^0。据(11.171)式可得 x_{j+1}^0 与 x_{j-1}^0 两点之间的质量 $\triangle m_j$;

$$\triangle m_j = (x_{j+1}^0 - x_{j-1}^0)/V_j^0 \tag{11.174}$$

方程组(11.173)式用在产物作稀疏流动时，(即：$u_{j+1}^{n-1} > u_{j-1}^{n-1}$ 的情况下)，其差分形式为

$$\left.\begin{aligned}
&u_j^n = u_j^{n-1} - (p_{j+1}^{n-1} - p_{j-1}^{n-1}) \cdot \triangle t/\triangle m_j \\
&V_j^n = V_j^{n-1} + (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \cdot \triangle t/\triangle m_j \\
&e_j^n = e_j^{n-1} - p_j^{n-1}(V_j^n - V_j^{n-1}) \\
&p_j^n = (k-1)e_j^n/V_j^n \\
&x_j^n = x_j^{n-1} + u_j^n \cdot \triangle t
\end{aligned}\right\} \tag{11.175}$$

方程组(11.173)式用在产物作压缩流动时(即 $u_{j+1}^{n-1} \leqslant u_{j-1}^{n-1}$ 的情况下)，差分形式为

$$
\left.\begin{aligned}
&u_j^n = \frac{1}{2}(u_{j+1}^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) - (p_{j+1}^{n-1} - p_{j-1}^{n-1}) \cdot \triangle t/\triangle m_j \\
&V_j^n = \frac{1}{2}(V_{j+1}^{n-1} + V_{j-1}^{n-1}) + (u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}) \cdot \triangle t/\triangle m_j \\
&e_j^n = \frac{1}{2}(e_{j+1}^{n-1} + e_{j-1}^{n-1}) - \frac{1}{2}(u_j^n)^2 + \frac{1}{4}[(u_{j+1}^{n-1})^2 + (u_{j-1}^{n-1})^2] \\
&\quad - (p_{j+1}^{n-1}u_{j+1}^{n-1} - p_{j-1}^{n-1}u_{j-1}^{n-1}) \cdot \triangle t/\triangle m_j \\
&p_j^n = (k-1)e_j^n/V_j^n \\
&x_j^n = \frac{1}{2}(x_{j+1}^{n-1} + x_{j-1}^{n-1}) + u_j^n \cdot \triangle t
\end{aligned}\right\} \qquad (11.176)
$$

时间步长$\triangle t$是按稳定性要求取的，对于每个计算周期都按如下计算

$$\triangle t = \min\{V_j^{n-1} \cdot \triangle m_j/2a_j^{n-1}\}, \quad j = 2,3,\cdots$$

空间分点总数为$j_{\max}$，即$j=1,2,\cdots,j_{\max}$. 分点从产物向真空飞散边界算起，而标号$j_{\max}$取在抛体表面。

计算从爆轰波到达抛体表面算起。在$t^0=l/D$时，对于$j=1,2,\cdots,j_{\max}-1$各点上物理量按右行中心简单波计算

$$
\begin{cases}
x^0 = (u^0 + a^0)t^0 = (u^0 + a^0)\dfrac{l}{D} \\
u^0 - \dfrac{2}{k-1}a^0 = -\dfrac{D}{k-1}
\end{cases}
$$

由此得出

$$
\begin{cases}
u_j^0 = \dfrac{D}{k+1}\left(\dfrac{2}{l}x_j^0 - 1\right) \\
a_j^0 = \dfrac{k-1}{k+1}\left(\dfrac{D}{l}x_j^0 + \dfrac{D}{k-1}\right)
\end{cases}
$$

$$p_j^0 = \frac{1}{k+1}\rho_0 D^2\left(\frac{k+1}{k}\frac{a_j^0}{D}\right)^{\frac{2k}{k-1}}$$

$$\rho_j^0 = \frac{k+1}{k}\rho_0\left(\frac{k+1}{k}\frac{a_j^0}{D}\right)^{\frac{2}{k-1}}$$

$$e_j^0 = \frac{1}{k-1}p_j^0 V_j^0$$

而t^0时刻$j_{\max}$点上，按爆轰波在刚壁上刚反射后的状态，与弱反射情形（见(11.161)式）不同，它取（参见后面的(11.237)式和(11.238)式）：

$$u_{j_{\max}}^0 = 0$$

$$p_{j_{\max}}^0 = \frac{1}{k+1}\rho_0 D^2\,\frac{5k+1+\sqrt{17k^2+2k+1}}{4k}$$

$$\rho_{j_{\max}}^0 = \frac{1}{V_{j_{\max}}^0} = \frac{k+1}{k}\rho_0\,\frac{9k^2+2k+1+(k+1)\sqrt{17k^2+2k+1}}{9k^2-1+(k-1)\sqrt{17k^2+2k+1}}$$

$$e_j^0 = \frac{1}{k-1}p_{j_{\max}}^0 V_{j_{\max}}^0$$

寸于 $n\geqslant 1$ 的每个时间周期，在 j_{max} 点即抛体上使用如下公式

$$\left.\begin{aligned}
u_*^n &= u_{j_{max}}^n = u_{j_{max}}^{n-1} + (p_{j_{max}}^{n-1} + p_{j_{max}}^n)\cdot \triangle t/(2M) \\
p_{j_{max}}^n &= (4p_{j_{max}-1}^n - p_{j_{max}-2}^n)/[3 + 2R/(j_{max} - 1)] \\
V_{j_{max}}^n &= (4V_{j_{max}-1}^n - V_{j_{max}-2}^n)/\{3 + 2R/[k(j_{max} - 1)]\}
\end{aligned}\right\} \qquad (11.177)$$

女值计算出的无量纲形式的抛体极限速度 u_{max}/D 与绝热指数 k 和质量比 R 的关系列在長 11.2 中。

从作为“精确解”的阿述兹数值解看出，抛体的速度不仅随 R 变化很大，而且严重地k赖 k 值。从表 11.2 可以同时看出阿述兹对于 $k=3$ 时的精确数值解与斯达纽柯维奇公弌值几乎一样。由此可见，假定爆轰波在物体上的反射波为弱激波以及黎曼第一不变量穿𠅘反射激波不变的做法是正确的。

表 11.2　u_{max}/D 与 k 和 R 的关系

u_{max}/D \ k / R	2.5	3.5	3.0	斯达纽柯维奇公式值
1	0.2363	0.1635	0.1932	0.1930
3	0.4420	0.3083	0.3623	0.3619
6	0.5857	0.4097	0.4809	0.4803
10	0.6860	0.4809	0.5634	0.5637

11.8.3　小参数摄动法的分析解

上面精确的数值解固然很好，但实际应用却不方便，特别是对于工程技术人员。朱兆⺮等按小参数摄动法给出了分析解[5]，其精度几乎达到了阿述兹数值解的精度。他参照斯达纽柯维奇的做法，并根据大部分高能炸药爆轰产物的绝热指数非常接近 3 这一事实(见表 11.3)，引进了黎曼给出的著名参量 Λ：

$$\Lambda = \frac{k+1}{2(k-1)} \qquad (11.178)$$

当 $k=3$ 时，$\Lambda=1$，设 $k\neq 3$ 时的 Λ 值与 $\Lambda=1$ 的差值为 ε

$$\varepsilon = \Lambda - 1 = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2} \qquad (11.179)$$

即有

$$k = \frac{1+2\Lambda}{2\Lambda - 1} = \frac{3+2\varepsilon}{1+2\varepsilon} \qquad (11.180)$$

对于大多数高能炸药而言，ε 都是个小量。表 11.4 给出了 k 从 2.5 到 3.5 所对应的 ε 值。

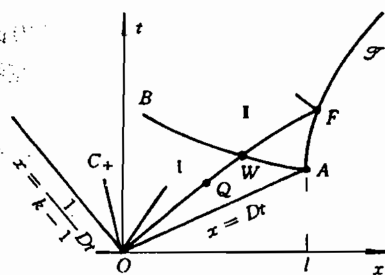


图 11.21　$k\neq 3$ 的一维抛射运动

除了以 ε 作为小参数外；同时还做了与斯达纽柯维奇同样的假设(除 $k=3$ 以外)。

抛体在 (x,t) 平面的运动如图 11.21 所示，装药及起爆时间等均同本节第一部分，见图 11.20。

表 11.3　常用炸药的 k 值

炸药	装药密度 ρ_0	k 值
硝基甲烷	1.128	2.17
PETN	1.67	2.55
液态 TNT	1.447	2.64
B 炸药	1.713	2.76
奥克托尔	1.809	2.79
硝化甘油	1.59	2.83*
DATB	1.788	2.90
RDX	1.80	2.98
HMX	1.90	3.0
TNT	1.640	3.16

(* 为计算值,其余均为实验值。)

表 11.4　k 与 Λ 和 ε 的关系

k	Λ	ε
2.5	1.1667	0.1667
2.6	1.1250	0.1250
2.7	1.0882	0.0882
2.8	1.0556	0.0556
2.9	1.0263	0.0263
3.0	1.0000	0.0000
3.1	0.9762	−0.0238
3.2	0.9545	−0.0455
3.3	0.9348	−0.0652
3.4	0.9167	−0.0833
3.5	0.09000	−0.1000

在爆轰波阵面 OA 上的条件为

$$\left.\begin{aligned} p &= p_H = \frac{1}{k+1}\rho_0 D^2 \\ \rho &= \rho_H = \frac{k+1}{k}\rho_0 \\ u &= u_H = \frac{1}{k+1}D \\ a &= a_H = \frac{k}{k+1}D \end{aligned}\right\} \qquad (11.181)$$

抛体的运动方程为

$$M\frac{\mathrm{d}u_*}{\mathrm{d}t_*} = s_0 p_* \qquad (11.182)$$

其中 M 为抛体质量、s_0 为抛体的受力面积,下标“ * ”表示在抛体轨迹上的值。

在 $t=l/D$ 时,爆轰波阵面 OA 在物体表面发生反射,形成反射冲击波 AB,这样将轰产物流动区分成区 Ⅰ 和区 Ⅱ 。

区 Ⅰ 是右行中心简单波区,在该区所有的右行特征线 C_+ 都是从原点 O 发出的直线,如 OW:

$$x = (u+a)t \qquad (11.183)$$

在整个 Ⅰ 区

$$u - \frac{2a}{k-1} = u_H - \frac{2a_H}{k-1} = -\frac{D}{k-1} \qquad (11.18$$

由如上两式可求得 OW 上任一点 Q 处的 u_Q 和 a_Q

$$\left.\begin{aligned} u_Q &= -\frac{D}{k+1} + \frac{2}{k+1}\frac{x_Q}{t_Q} \\ a_Q &= \frac{k-1}{k+1}\frac{x_Q}{t_Q} + \frac{D}{k+1} \end{aligned}\right\} \qquad (11.18$$

沿 OW 上黎曼第一不变量 Ω 不变

$$\Omega = u + \frac{2a}{k-1} = u_Q + \frac{2a_Q}{k-1} = \frac{1}{k+1}\left(\frac{4x_Q}{t_Q} - \frac{k-3}{k-1}D\right) \tag{11.186}$$

当 $k=3$ 时,函数 u、a、Ω 为:

$$u = u_0 \quad a = a_0 \quad \Omega = \Omega_0 = u_0 + a_0 \tag{11.187}$$

于是在 Q 点以至在 W 点则有

$$x_Q/t_Q = u_0 + a_0 = \Omega_0 \tag{11.188}$$

以 Ω_0 代替(11.186)式中的 x_Q/t_Q,则有

$$\Omega = \frac{4}{k+1}\left(\Omega_0 - \frac{k-3}{k-1}\frac{D}{4}\right) \tag{11.189}$$

区 Ⅱ 为一般流动区,诸 C_+ 特征线不再是直线,见图 11.21 中的曲线 WF,但沿 WF 线黎曼第一不变量 Ω' 不变,即有

$$\Omega' = u + \frac{2a}{k-1} = \text{const} = u_* + \frac{2a_*}{k-1} \tag{11.190}$$

按假定,穿过反射激波 AB,黎曼第一不变量不变,即 $\Omega \approx \Omega'$,因此由以上两式推出

$$u_* + \frac{2a_*}{k-1} = \frac{4}{k+1}\left(\Omega_0 - \frac{k-3}{k-1}\frac{D}{4}\right) \tag{11.191}$$

又因穿过弱激波 AB 假定熵近似不变,即认为在全流动(Ⅰ 区和 Ⅱ 区)等熵,故有

$$p_* = p_H\left(\frac{\rho_*}{\rho_H}\right)^k = p_H\left(\frac{a_*}{a_H}\right)^{\frac{2k}{k-1}} = \frac{1}{k+1}\rho_0 D^2\left(\frac{k+1}{k}\cdot\frac{a_*}{D}\right)^{\frac{2k}{k-1}} \tag{11.192}$$

于是由式(11.182)、(11.191)、(11.192)便构成了求解 u_*、p_*、a_* 的封闭方程组。假若 Ω_0 已知的话。然而,Ω_0 作为 x_*,t_* 的函数(或等价地作为 u_*、a_* 的函数)是未知的(将在后面近似处理),故现不能精确求解。

为方便起见,使用无量纲量,令:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x} = x/l, \quad \bar{t} = Dt/l, \quad \bar{u} = u/D, \quad \bar{a} = a/D \\ &\bar{M} = M/(\rho_0 l s_0) \equiv R^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{11.193}$$

于是式(11.182)、(11.191)、(11.192)经归并,并利用 $\Omega_0 = u_0 + a_0$(见(11.188)式),则有

$$\left.\begin{aligned} &\bar{M}\frac{d\bar{u}_*}{d\bar{t}_*} = \frac{1}{k+1}\left(\frac{k+1}{k}\bar{a}_*\right)^{\frac{2k}{k-1}} \\ &\bar{u}_* + \frac{2\bar{a}}{k-1} = \frac{4}{k+1}\left(\bar{u}_0 + \bar{a}_0 - \frac{k-3}{k-1}\cdot\frac{1}{4}\right) \end{aligned}\right\} \tag{11.194}$$

抛体运动的初始条件(参见(11.161)式),即

$$\text{在 } \bar{t} = \bar{t}_* = 1 \text{ 时}, \quad \left.\begin{aligned} \bar{x}_* &= 1 \\ \bar{u}_* &= 0 \\ \bar{a}_* &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{11.195}$$

为了求解方程组(11.194),我们采用摄动法,以 ε 作为小参数,将(11.194)式中 k 换成 ε 表示,$\bar{u}_*$ 和 $\bar{a}_*$ 按 ε 展开,即有

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{3+2\varepsilon}{1+2\varepsilon} \\ \bar{u}_* &= \bar{u}_0 + \varepsilon\bar{u}_1 + \cdots \\ \bar{a}_* &= \bar{a}_0 + \varepsilon\bar{a}_1 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{11.196}$$

将上式代进(11.194)式中，按 ε 展开，令等式两边 ε 的同幂次项的系数相等，就得出各级近似方程组。(在以下，略去 $\bar{t}_*$ 的下标"＊")。

作为零级近似，即相当 $\varepsilon=0$，$k=3$ 的情况下，(11.194)式则化成一个方程

$$\bar{M}\frac{\mathrm{d}\bar{u}_0}{\mathrm{d}\bar{t}} = \frac{16}{27}\bar{a}_0^3, \quad 即 \frac{\mathrm{d}\bar{u}_0}{\mathrm{d}\bar{t}} = \frac{16}{27}R\bar{a}_0^3 \tag{11.197}$$

它就是式(11.155)的无量纲形式，按照(11.155)方程的解式(11.165)以及式(11.164)、(11.163)和 $\lambda=\frac{16}{27}R$ 的关系，则得到

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_0 &= 1 + \frac{27}{16R}(1-\frac{1}{\theta}) - \frac{\theta}{\bar{t}} = 1 + \mu(1-\frac{1}{\theta}) - \frac{\theta}{\bar{t}} \\ \bar{a}_0 &= \theta/\bar{t} \\ \theta &= [1 + \frac{32}{27}R(1-\frac{1}{\bar{t}})]^{-\frac{1}{2}} = [1 + \frac{2}{\mu}(1-\frac{1}{\bar{t}})]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{11.198}$$

其中

$$\mu = \lambda^{-1} = \frac{27}{16R}$$

作为一级近似的方程组为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\bar{u}_1}{\mathrm{d}\bar{t}} &= \frac{\bar{a}_0^3}{\mu}\left(2 + 2\ln\frac{4\bar{a}_0}{3} + \frac{3\bar{a}_1}{a_0}\right) \\ \bar{u}_1 + \bar{a}_1 + 2\bar{a}_0 &= \bar{u}_0 + \bar{a}_0 + \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \tag{11.199}$$

将零级近似解 $\bar{u}_0$、$\bar{a}_0$ 代进上式并消去 $\bar{a}_1$，整理后得到

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}_1}{\mathrm{d}\bar{t}} + \frac{3\theta^3\bar{u}_1}{\mu\bar{t}^2} = \left(\mu + \frac{3}{2} - \frac{\mu}{\theta}\right)\frac{3\theta^2}{\mu\bar{t}^2} + \left(\ln\frac{4\theta}{3\bar{t}} - 2\right)\frac{2\theta^3}{\mu\bar{t}^3}$$

$$(当\ \bar{t}=1\ 时，\bar{u}_1=0) \tag{11.200}$$

该方程的解为

$$\bar{u}_1 = \mu + \frac{3}{2} - \tau(\bar{t}) \tag{11.201}$$

式中

$$\tau(\bar{t}) = \frac{\theta^3}{\mu}\left\{\mu^2 + \frac{17\mu}{4} + \frac{19}{4} + \ln\frac{3}{4} - \left(1+\frac{\mu}{2}\right)^2\ln\theta - \frac{11}{2}\left(1+\frac{\mu}{2}\right)\frac{1}{\bar{t}} + \left(\frac{3}{4} + \ln\frac{4\theta}{3\bar{t}}\right)\frac{1}{\bar{t}^2}\right\} \tag{11.202}$$

由(11.199)的第二式，得到

$$\bar{a}_1 = -\frac{\mu}{\theta} - \frac{2\theta}{\bar{t}} + \tau(\bar{t}) \tag{11.203}$$

于是抛体的速度与在抛体表面上爆轰产物的音速的近似分析表达式为

$$
\left.\begin{aligned}
\bar{u}_* &= \bar{u}_0 + \varepsilon\bar{u}_1 = 1 + \mu\left(1 - \frac{1}{\theta}\right) - \frac{\theta}{\bar{t}} + \varepsilon\left(\mu + \frac{3}{2} - \tau(\bar{t})\right) \\
&= 1 + \frac{27}{16R}\left(1 - \frac{1}{\theta}\right) - \frac{\theta}{\bar{t}} + \varepsilon\left(\frac{27}{16R} + \frac{3}{2} - \tau(\bar{t})\right) \\
\bar{a}_* &= \bar{a}_0 + \varepsilon\bar{a}_1 = \frac{\theta}{\bar{t}} + \varepsilon\left(-\frac{\mu}{\theta} - \frac{2\theta}{\bar{t}} + \tau(\bar{t})\right) \\
&= \frac{\theta}{\bar{t}} + \varepsilon\left(-\frac{27}{16R}\frac{1}{\theta} - \frac{2\theta}{\bar{t}} + \tau(\bar{t})\right)
\end{aligned}\right\} \tag{11.204}
$$

这就是小参数摄动法(perturbation method)的近似解,它给出了抛体速度与 R、$\bar{t}$、特别是与 k 的关系,它可方便地用于工程实际中。

在实际应用中有一个非常重要的量——抛体的极限速度 $u_{max}/D=\bar{u}_{max}$,可从如上第一式得到(令 $u_x=u_{max}$):

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_x = \bar{u}_{max} = \lim_{\bar{t}\to\infty}\bar{u}_* &= 1 + \mu\left(1 - \frac{1}{\theta_\infty}\right) + \varepsilon\left(\mu + \frac{3}{2} - \tau_\infty\right) \\
&= 1 + \frac{27}{16R}\left(1 - \frac{1}{\theta_\infty}\right) + \varepsilon\left(\frac{27}{16R} + \frac{3}{2} - \tau_\infty\right)
\end{aligned} \tag{11.205}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
\theta_\infty &= \left(1 + \frac{2}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{32R}{27}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
\tau_\infty &= \frac{\theta_\infty^3}{\mu}\left\{\mu^2 + \frac{17\mu}{4} + \frac{19}{4} + \ln\frac{3}{4} - \left(1 + \frac{\mu}{2}\right)^2 \ln\theta_\infty\right\} \\
&= \frac{16R}{27}\theta_\infty^3\left\{\frac{729}{256R^2} + \frac{459}{64R} + \frac{19}{4} + \ln\frac{3}{4} - \left(1 + \frac{27}{32R}\right)^2 \ln\theta_\infty\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{11.206}
$$

为了检验摄动解的精确度,朱兆祥等取 $k=2.5$, 3.0, 3.5,取 $R=1$, 3, 6, 10,按式(11.105)计算了 $\bar{u}_{max}$,并把它同阿述兹数值解值相比较,其结果列在表 11.5 中。

表 11.5 $\bar{u}_{max}$与 R 和 k 的关系表

$\bar{u}_{max}=\frac{u_{max}}{D}$	$k=2.5$ $\varepsilon=0.1667$		$k=3.0$ $\varepsilon=0$		$k=3.5$ $\varepsilon=-0.1$	
	数值解	摄动解	数值解	摄动解	数值解	摄动解
$R=1$	0.2363	0.2408	0.1932	0.1930	0.1635	0.1643
$R=3$	0.4420	0.4493	0.3623	0.3619	0.3083	0.3095
$R=6$	0.5857	0.5950	0.4809	0.4802	0.4097	4114
$R=10$	0.6860	0.6981	0.5634	0.5638	0.4809	0.4832

从表 11.5 可以看出,摄动解与数值解的相对误差很小,误差一般在千分之一到百分之一的范围内。

11.8.4 古尼抛掷公式

1943 年古尼(R. W. Gurney)[6]为解决弹片飞散速度问题,建立一种最简单的一维抛掷近似公式,简称古尼公式。由于该公式形式简单,至今在近似粗估时仍可采用,尤其是它的修正形式(这在研究二维抛掷时再讨论)。

古尼抛掷的理论模型如图 11.22 所示,在长为 δ_0 密度为 ρ_0 的炸药柱两端,装上同直

径的两块刚体(如金属材料),其长度和密度分别为 δ_1,ρ_1 和 δ_2,ρ_2,古尼假定:

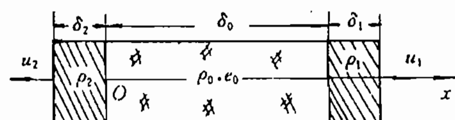


图 11.22 古尼的一维抛掷模型

① 炸药爆轰是瞬时发生的,即整个炸药同时变为产物气体且产物的初始密度仍为装药密度 ρ_0,但产物各质点的初速度 u 不同。

② 被抛掷的物体瞬时获得了稳定速度 u_1 和 u_2,即不考虑抛体的加速过程。

③ 爆轰产物的膨胀速度与轴向坐标 x 成线性关系,即

$$u(x) = -u_2 + x(u_1 + u_2)/\delta_0 \tag{11.207}$$

在上述假定下,根据动量守恒,两个抛体与炸药作为整个一个系统,则有

$$\rho_1 u_1 \delta_1 - \rho_2 u_2 \delta_2 + \rho_0 \int_0^{\delta_0} u(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{11.208}$$

根据能量守恒,则有

$$\rho_0 \delta_0 e_0 = \frac{1}{2}\rho_1 \delta_1 u_1^2 + \frac{1}{2}\rho_2 \delta_2 u_2^2 + \frac{1}{2}\rho_0 \int_0^{\delta_0} u^2(x)\mathrm{d}x \tag{11.209}$$

其中,e_0 为单位质量炸药所能供给爆轰产物和抛体的运动能量,称为古尼能(Gurney's energy)。

将(11.207)式代进(11.208)式中,积分后得到

$$\rho_1 \delta_1 u_1 - \rho_2 \delta_2 u_2 - \rho_0 \delta_0 u_2 + \frac{1}{2}\rho_0 \delta_0 (u_1 + u_2) = 0$$

整理后得到

$$u_2 = u_1 \frac{R_1 + 2}{R_2 + 2} \cdot \frac{R_2}{R_1} \tag{11.210}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{\rho_0 \delta_0}{\rho_1 \delta_1} \\ R_2 &= \frac{\rho_0 \delta_0}{\rho_2 \delta_2} \end{aligned}\right\} \tag{11.211}$$

将(11.207)式代进(11.209)式中,得到

$$\rho_0 \delta_0 e_0 = \frac{1}{2}\rho_1 \delta_1 u_1^2 + \frac{1}{2}\rho_2 \delta_2 u_2^2 + \frac{\rho_0 \delta_0}{6}[(u_1^2 + u_2^2) - u_1 u_2]$$

把(11.210)式代进上式,经过整理后,则有

$$\frac{u_1^2}{e_0} = \frac{6R_1}{3 + R_1 + \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_1 + 2}{(R_2 + 2)^2}(2R_2 + R_1 + 6)} \tag{11.212}$$

我们经常碰到炸药的一侧为自由面,即 $\rho_2 = \delta_2 = 0$,则 $R_2 = \infty$,于是上式变成

$$\frac{u_1^2}{e_0} = \frac{6R_1}{5 + R_1 + \frac{4}{R_1}}$$

或写成

$$u_1 = \sqrt{e_0} \cdot \sqrt{\frac{6R_1^2}{R_1^2 + 5R_1 + 4}}$$

略去下标，表成一般通用形式（令 $u_1=u_{max}=u_g$）

$$u_{max}=u_g=\sqrt{e_0}\cdot\sqrt{\frac{6R^2}{R^2+5R+4}} \tag{11.213}$$

该式常称作为古尼的一维抛掷公式。

在古尼公式中的古尼能 e_0 需要由实验来确定。表 11.6 列出了爆炸复合中常用的几种炸药的古尼能（因在爆炸焊接中亦常用古尼公式）[2]。显然当炸药品种有变动时，必须重新测定，这很不方便。

表 11.6　爆炸焊接所用的几种炸药的性能*

名　称	爆热 Q_v^*(cal/g)	古尼能 e_0(cal/g)	炸药转化能 Q_v(cal/g)	爆速 D (m/s)	密度 ρ_0(g/cm)^3	k
TNT/RDX=40/60	1240	1240	1277	7840	1.68	2.6
Pentolite(浇铸)	1220	1220	1157	7470	1.66	2.6
Pentolite(粉状)	1220	900	929	5150	0.95	2.1
TNT(浇铸)	1160	1160	1126	6700	1.56	2.4
TNT(粉状)	1160	800	808	4800	1.0	2.1
AN+Dynamite(40%)	800	240		3200	1.25	
AN+8%Al 粉	1100	205		2300	1.05	
AN+6%柴油	890	310	308	2540	0.82	1.87
80/20 阿玛托	800	275	694	4000	1.0	1.94

* 数据取自 A. A. Ezra: Principle and Practice of Explosive Metalworking, Vol. 1 § 10(1973). 其中 Q_v 是由原表中 $\sqrt{2Q}$ 换算得来的，AN 代表硝酸铵；Pentolite 为季戊四醇四硝酸脂和三硝基甲苯混合炸药，Dynamite 为黄色炸药（胶质硝化甘油）。

如果将 e_0 取作维持爆轰所需要的炸药转化能 Q_v，即

$$e_0=Q_v=\frac{D^2}{2(k^2-1)} \tag{11.214}$$

（见(10.61)式），于是得到修正古尼公式：

$$u_g=\frac{D}{\sqrt{2(k^2-1)}}\sqrt{\frac{6R^2}{R^2+5R+4}} \tag{11.215}$$

但是修正的古尼公式(11.215)用来求一维抛掷极限速度，在质量比 R 较小时情况较好；在 R 较大时所求得的极限速度偏差较大，表 11.7 列出了按(11.215)式所求得的一维抛掷极限速度 u_g 和阿述兹按数值解求得的一维抛掷极限速度 u_{max}（在表中用 u_A 表示它），从表中看出在 R 较大时，二者差异较大。在表 11.7 中，$\nu=(u_g-u_A)/u_A$，u_A 为阿述兹数值解的极限速度 u_{max}。

在 § 7.29 中，我们按完全的瞬时爆轰研究了上述的一维抛体问题。可以验证在 $k=3$ 时，(11.215)式所给出的 v_g 与在 § 7.29 中(7.475)式给出的瞬时爆轰下的精确解 v_L 相差无几，这也从一个侧面说明古尼假设的合理性。

表 11.7 两种方法计算的一维抛掷极限速度

R	k=2.5			k=3.0			k=3.5		
	u_A/D	u_g/D	ν	u_A/D	u_g/D	ν	u_A/D	u_g/D	ν
1	0.2363	0.2390	1.1%	0.1932	0.1936	0.2%	0.1635	0.1633	0.1%
3	0.4420	0.4280	−3.2%	0.3623	0.3472	−4.2%	0.3083	0.2928	5.0%
6	0.5857	0.5421	−7.4%	0.4809	0.4392	−8.7%	0.4097	0.3703	−9.6%
10	0.6860	0.6091	−11.2%	0.5634	0.4935	−12.4%	0.4809	0.4161	−13.5%

11.9 一维平面爆轰波在界面反射之初的参量

以上诸节研究了在一维情况下，爆轰产物对邻接物体的冲击作用，被冲击的物体作为刚体，特别是对于一维抛体。所要考虑的是爆轰产物对邻接物体的整个冲击作用，并不考虑爆轰波阵面在物体上初始反射的情况，本节将研究爆轰波阵面在物体上反射之初的情况。

一个沿炸药传播的一维平面爆轰波，当它传到与装药邻接的物体表面时与物体表面发生作用，在物体中传入一个冲击波；同时向爆轰产物中反射回来一个波，即反射波，这个反射波可能为冲击波，亦可能为稀疏波，这取决于炸药与介质(物体)的性质。

现在我们研究一个从左面入射的一维平面强爆轰波入射到界面上的情形，如图 11.23(a)所示。

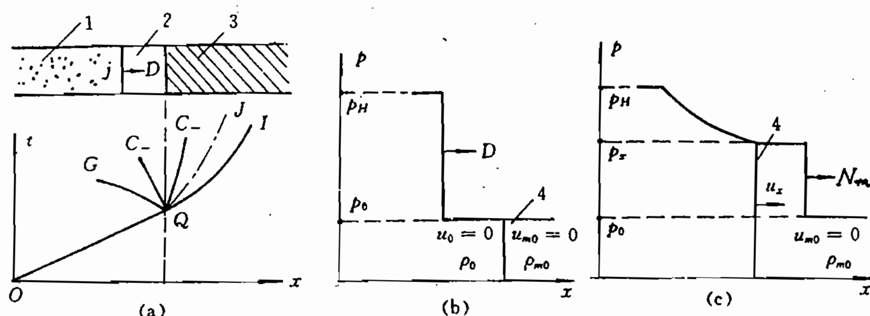


图 11.23 爆轰波在分界面反射之初($p_x<p_H$ 情形)

1—爆轰产物；2—炸药；3—介质；4—分界面；OQ—入射的爆轰波阵面；QI—传入介质中的冲击波；QJ—爆轰产物与介质的分界线；QG—稀疏波头

由于入射爆轰波为满足 C—J 条件的强爆轰，所以在爆轰波阵面上满足(见(11.181式)

$$u_H=\frac{D}{k+1},\quad a_H=\frac{kD}{k+1},\quad p_H=\frac{\rho_0 D^2}{k+1},\quad \rho_H=\frac{k+1}{k}\rho_0 \qquad (11.216$$

式中 D 为爆速，ρ_0 为装药密度，k 为爆轰产物的绝热指数。设装药与其邻接的介质初始静止且压力为 p_0(或令 $p_0=0$)，介质的初始密度为 ρ_{m0}.

11.9.1 在与装药邻接的介质中的冲击波

现考虑传入介质中的冲击波，据(7.58)式则有

$$u_{mx} - u_{m0} = \sqrt{(p_{mx} - p_0)(V_{m0} - V_{mx})}$$

式中 u_{mx}、p_{mx}、V_{mx}为冲击波阵面上的速度、压力和比容；u_{m0}、p_0、V_{m0}为波前面的速度、压力和比容。由于我们考虑的是爆轰波在界面上刚反射的情况，故冲击波阵面上的压力和速度即为分界面上的压力 p_x 和速度 u_x，亦即

$$u_{mx} = u_x, \quad p_{mx} = p_x \tag{11.217}$$

当然，冲击波阵面上的密度 V_{mx}^{-1}也是分界面上的密度。又因介质初始静止 $u_{m0}=0$，故有

$$u_x = \sqrt{(p_x - p_0)(V_{m0} - V_{mx})} \tag{11.218}$$

除了上式之外，还需要补充上介质的状态方程。介质可能为固体或气体：

1. 对于固体介质

固体的高压状态方程很多，详见第十二章。描述固体冲击压缩规律的最常见的有两种，其中一种为(在 $u_{m0}=0$ 的情况下)：

$$N_m = g + hu_{mx} = g + hu_x \tag{11.219}$$

该式是实验得来的冲击绝热曲线(详见第十二章)。在上式中 N_m 为冲击波速度，而 g 和 h 为常量，详见第十二章的附表 12.2 和 10.3。上式与(7.58)的第一式联合起来而取代用压冲击波阵面的状态方程。于是(7.58)的第一式现表成

$$N_m = V_{m0}\sqrt{\frac{p_x - p_0}{V_{m0} - V_{mx}}} \tag{11.220}$$

式(11.218)、(11.219)和(11.220)联合起来便构成固体介质中冲击波阵面上亦即分界面上固体介质一侧的物理量关系式。从这三式中消去 N_m 和 V_{mx}则推出 p_x与 u_x 的关系曲线 L_r，如图 11.24 所示。

对于固体介质冲击压缩，常采用的一种状态方程是穆纳汉状态方程(Murnagham's equation of state)：

$$p_{mx} = B(s)\left[\left(\frac{\rho_{mx}}{\rho_{m0}}\right)^n - 1\right] \tag{11.221}$$

其中 $\rho_{m0}=1/V_{m0}$、$\rho_{mx}=1/V_{mx}$，n 为材料常数，$B(S)$是熵 S 的函数在压力不太高的情况下视作常量，一般讲在 $p_{mx}<10^6$ 巴的情况下可不考虑熵的变化，而认为 $B(S)=\text{const}=B$. 对于 B 值可以通过计算或实验来确定。按音速的定义，从(11.221)式可求得冲击波阵面上的音速 a_{mx}：

$$a_{mx}^2 = \frac{n}{\rho_{mx}}(p_{mx} + B)$$

即有

$$p_{mx} = \frac{\rho_{mx}a_{mx}^2}{n} - B \tag{11.222}$$

利用上式可以方便地计算 B 值，如取：$p_{mx}=p_0$、$\rho_{mx}=\rho_{m0}$、$a_{mx}=a_{m0}$，将它们代进上式中便可确定出 B 值为

$$B = \frac{\rho_{m0} a_{m0}^2}{n} \tag{11.223}$$

麦克奎恩(P. McQueen)和瓦尔西(J. Walsh)给出了许多金属的 B 值和 n 值,详见表11.8。

由于固体动态的复杂性,对于同一状态方程中的参量,不同研究者有时给出不同的结果,这些结果有时差异很大。如对状态方程(11.221),同样是在 B=const 的条件下,在鲍姆等著的《爆炸物理学》中又有另一种提法,他们指出:实验证明对于许多金属而言 $n\approx4$(显然与表 11.8 中所列差异较大),许多著作中也曾指出 $n\approx4$。鲍姆等按 $n=4$,利用(11.223)式计算了三种金属的 B 值,并同实验值作了比较,结果列在表 11.9 中,从该表中看出二者比较符合。(应该指出,按表 11.8 和表 11.9 给出的 B 和 n 来计算压力 p_{mx}除铝以外,差别较大,原因何在值得研究)。

在高压的情况,如 $p_{mx}>10^6$ 大气压,由于熵 S 变化对 B 影响显著,若按式(11.222)或(11.223)来计算值 B 误差较大。

式(11.218)与(11.221)联立起来,便给出冲击波阵面上即分界面介质一侧的物理量关系式,从这两式中消去密度 ρ_{mx}便给出 u_x 与 p_x 的关系曲线 L_r。

表 11.8　几种金属的压缩规律中的常数 B 和 n

金属名称	初始密度 ρ_{m0} (g/cm³)	B (kg/cm²)	n	实用压力范围 (kg/cm²)
铍	1.845	3.75×10^5	3.2	$0-3.5\times10^5$
铝合金	2.785	1.97×10^5	4.2	$0-5\times10^5$
钛	4.51	2.60×10^5	3.8	$0-7\times10^5$
铁	7.84	2.15×10^5	5.5	$2.5\times10^5-10\times10^5$
镉	8.64	0.77×10^5	6.3	$0-7\times10^5$
铜	8.90	3.02×10^5	4.8	$0-7\times10^5$
钼	10.20	7.29×10^5	3.8	$0-7\times10^5$
铅	11.34	0.86×10^5	5.3	$0-5\times10^5$
钽	16.46	4.58×10^5	4.0	$0-5\times10^5$
金	19.24	3.16×10^5	5.7	$0-7\times10^5$
铂	21.37	5.39×10^5	5.3	$0-5\times10^5$

表 11.9　几种金属压缩性规律中系数 B 的计算值和实验值

金属名称	B 的实验值 (kg/cm²)	B 的计算值 (kg/cm²)	B 的计算值 / B 的实验值
铁	4.5×10^5	5.0×10^5	1.11
铜	2.35×10^5	2.5×10^5	1.06
硬铝	2.04×10^5	2.03×10^5	1.00

2. 对于气体介质

如果炸药邻接的介质为空气,可以采用多方气体状态方程,据(7.63.2)式则有

$$\frac{V_{m0}}{V_{mx}}=\frac{\rho_{mx}}{\rho_{m0}}=\frac{(\gamma+1)p_x+(\gamma-1)p_0}{(\gamma+1)p_0+(\gamma-1)p_x},\quad \gamma=\text{const} \tag{11.224}$$

将(11.218)式与(11.224)式联立起来便给出冲击波阵面上即分界面介质一侧的物理量关系式，从这两式中消去 ρ_{mx}便给出 u_x 与 p_x 的关系曲线 L_r。

11.9.2 反射回爆轰产物中的波

确定反射回到产物中的波是冲击波还是稀疏波，可以仿照§7.21 中冲击波入射到分界面那样进行。爆轰波造成邻接介质中的右传冲击波，在速度平面(u,p)上对应一条 L_r 曲线。如果爆轰波阵面上的状态点 $H(u_H,p_H)$在 L_r 线之上(如图 11.24(a)所示)，则反射波为稀疏波，分界面上的压力 $p_x<p_H$；如果点 $H(u_H,p_H)$在 L_r 线之下，反射波为冲击波，分界面上的压力 $p_x>p_H$(这种情形，如图 11.24(b)所示)。

如上的原则性的论断实施起来可能涉及一系列的问题，详细分析参见§7.22。现有一个粗略地判断方法，这就是：

如果介质的密度大大地超过爆轰波阵面上的产物密度，则反射回产物中的为冲击波，例如爆轰波入射到钢、铜、硬铝等介质中，这时分界面上的压力 p_x 大于 p_H；如果产物密度大大超过介质的密度，则反射回介质中的波为稀疏波，例如爆轰波入射到空气中，这时 $p_x<p_H$。

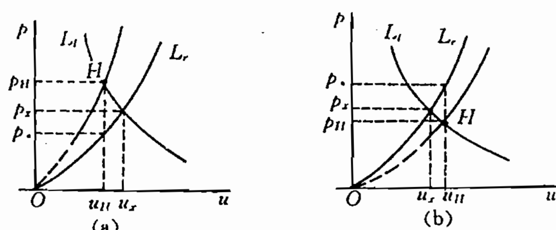


图 11.24

1. 对于 $p_x<p_H$ 情形

由于 $p_x<p_H$，则反射回到爆轰产物中为稀疏波，如图 11.23 所示，则在爆轰波反射后的爆轰产物中的流动是连续的，假定流动仍作为多方气体等熵的一维流动，即有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0\\&\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}=0\\&p=A\rho^k,A=\text{const}\end{aligned}\right\} \tag{11.225}$$

决定该产物流动的边界条件为图 11.23 所示的稀疏波头 QG 上的物理量与分界面 QJ 上的物理量。由于我们现在所考虑的是爆轰波在界面上刚刚反射时的情况，即考虑图示的 Q 点附近的流动，所以 QG 上的量就视作爆轰波阵面上的量；QJ 上的量就视作冲击波 QI 上的量。我们再将(11.225)式视作在以 Q 为原点的局部坐标系(x',t')中描述，即有

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t'}+u\frac{\partial\rho}{\partial x'}+\rho\frac{\partial u}{\partial x'}=0\\
&\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t'}+u\frac{\partial u}{\partial x'}\right)+\frac{\partial p}{\partial t'}=0\\
&p=A\rho^k
\end{aligned}\right\}\tag{11.226}
$$

于是我们可以确定出决定在 Q 点邻域(neighbourhood)产物流动的物理量 u、p、ρ 的全部主定量。根据(11.226)、(11.216)、(11.218)、(11.219)和(11.220)式则有

$$u,p,\rho \parallel x',t',\rho_0,\rho_{m0}(\text{或 } V_{m0}),p_0,D,A,g,k,h \tag{11.227.1}$$

根据(11.226)、(11.216)、(11.218)和(11.221)式,则有

$$u,p,\rho \parallel x',t',\rho_0,\rho_{m0}(\text{或 } V_{m0}),p_0,D,A,B,k,n \tag{1.227.2}$$

根据(11.226)、(11.216)、(11.218)和(11.224)式,则有

$$u,p,\rho \parallel x',t',\rho_0,\rho_{m0}(\text{或 } V_{m0}),p_0,D,A,k,\gamma \tag{11.227.3}$$

在上述的三种情况中,不管哪一种情形,其量纲独立的有量纲参量都是两个,如可取 ρ_0 和 D 为代表。运用量纲分析,可以断定在 Q 点附近产物流动是自模拟的,即 u,p,ρ 只依赖一个组合自变量 $x'/(Dt')$,所以该流动是个左传"中心简单稀疏波",故在整个波区有下式成立(参见(7.119.1)式):

$$u+\frac{1}{k-1}a=\text{const}=u_H+\frac{1}{k-1}a_H$$

而

$$a_H=\frac{k}{k+1}D,\quad \frac{a}{a_H}=\left(\frac{p}{p_H}\right)^{\frac{k-1}{2k}},\quad u_H=\frac{1}{k+1}D$$

因此在分界面上有

$$u_x=\frac{D}{k+1}\left\{1+\frac{2k}{k-1}\left[1-\left(\frac{p_x}{p_H}\right)^{\frac{k-1}{2k}}\right]\right\}\tag{11.228}$$

将式(11.218)、(11.219)、(11.220)与上式联立起来,或将式(11.218)、(11.221)与上式联立起来,或将式(11.218)、(11.224)与上式联立起来便可以确定爆轰波在分界面上刚反射时的物理量。

如果装药邻接的介质为真空,即 $p_x=0$,这时(11.228)式成为表示爆轰波向真空飞散的情形(见(11.31)式):

$$u_x=\frac{3k-1}{k^2-1}D\tag{11.229}$$

在此应该指出,不管式(11.228)还是式(11.229),它们成立的条件都是对于 $k=\text{const}$ 的等熵流动。然而,实际的爆轰产物流动,当它膨胀到压力较低时,原等熵假设已经不成立,故若使用(11.228)式描述真实的爆轰产物流动,其 p_x 不能太小,即所邻接的介质不能太疏松。因此,对于实际流动而言(11.228)式则是个近似式。

2. 对于 $p_x>p_H$ 情形

由于压力 p_x 超过 p_H,于是向介质中传入一个冲击波,而反射回产物中的亦为冲击波,图 11.25(a)画出波在分界面附近的传播、反射情况;图 11.25(b)给出爆轰波阵面到达分界之前某个时刻的压力波形;图 11.25(c)给出爆轰波在界面刚反射之后的某个时刻的

压力波形图。

据(7.58)式，穿过反射冲击波 AG 则有

$$u_x - u_H = -\sqrt{(p_x - p_H)(V_H - V_x)} \tag{11.230}$$

由于爆轰产物为多方气体，于是有(见(7.63.2)式)

$$\frac{V_x}{V_H} = \frac{(k+1)p_H + (k-1)p_x}{(k+1)p_x + (k-1)p_H} = \frac{(k-1)\pi + (k+1)}{(k+1)\pi + (k-1)} \tag{11.231}$$

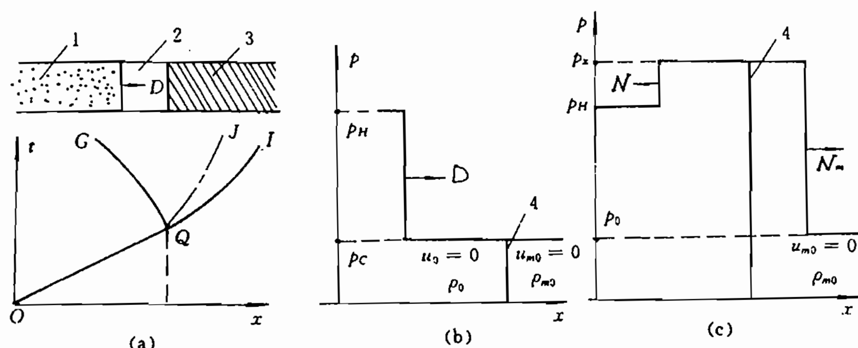


图 11.25　爆轰波在分界面反射之初($p_x>p_H$ 情形)

1—爆轰产物；2—炸药；3—介质；4—分界面；D—爆速；

N—爆轰产物中反射冲击波速度；N_m—传入介质中冲击波速度；

OQ—入射的爆轰波阵面；QI—传入介质中的冲击波；QJ—分界线；QG—反射冲击波

式中 $\pi = p_x/p_H$. 将(11.230)式代进上式中得到

$$\begin{aligned} u_x &= u_H - \sqrt{p_H V_H(\pi - 1)\left(1 - \frac{V_x}{V_H}\right)} \\ &= u_H - \sqrt{p_H V_H(\pi - 1)\left[1 - \frac{(k-1)\pi + (k+1)}{(k+1)\pi + (k-1)}\right]} \end{aligned} \tag{11.232}$$

据(11.216)式，则有

$$\left.\begin{aligned} u_H &= \frac{1}{k+1}D \\ p_H V_H &= \frac{1}{k+1}\rho_0 D^2 \cdot \frac{k}{k+1}V_0 = \frac{k}{(k+1)^2}D^2 \end{aligned}\right\} \tag{11.233}$$

将上式代进(11.232)式中给出

$$u_x = \frac{D}{k+1}\left[1 - \frac{(\pi - 1)\sqrt{2k}}{\sqrt{(k+1)\pi + (k-1)}}\right] \tag{11.234}$$

据(11.218)式，在传入介质中的冲击波上满足

$$u_x = \sqrt{(p_x - p_0)(V_{m0} - V_{mx})} \tag{11.235}$$

如果介质的冲击压缩规律已知，例如按(11.219)及(11.220)式所给出的，或按(11.221)式所给出的，或按(11.224)式所给出的，则可由(11.234)和(11.235)式确定出爆轰波在界面上反射时的物理量。

根据(7.51)的第一式，并考虑到冲击波前 $u_{m0}=0$，从而可推出入射到介质中的冲击波速度 N_m 为

$$N_m = \frac{u_x \rho_{mx}}{\rho_{mx} - \rho_{m0}} = \frac{u_x V_{m0}}{V_{m0} - V_{mx}} \tag{11.236}$$

在 u_x、V_{mx}已知的情况下，便可求得 N_m.

根据(11.219)式(包括(11.220)式)或(11.221)式，由(11.234)、(11.235)和(11.236)式计算的几种金属中的冲击波的初始参数列在表 11.10 中。

分析表 11.10 中的数据可以得出：

1. 传入金属中的冲击波的初始压力 p_x 比爆轰波阵面上的 C—J 压力 p_H 高，它并随着材料的冲击阻抗(shock impedance) $\rho_{m0}N_m$或动态硬度的增大而增大，但不会超过一定的限度，如对 $k=3$ 的炸药爆炸冲击金属及大多数固体材料而言，其入射冲击波的初始压力 p_x 都在 $p_H<p_x<2.39p_H$ 的范围。

2. 对爆炸正冲击着同一固体而言，如果所用炸药的冲击阻抗 $\rho_0 D$ 越小，则 p_x/p_H 就越大。反之，p_x/p_H 就越小。这是由于炸药的冲击阻抗越小，则固体的冲击阻抗与炸药的冲击阻抗之比越大。

3. 炸药爆炸，受冲击的金属密度将增大。然而在爆炸直接冲击下金属的密度增大率约为 10～30%，若要达到更高的压缩程度，必须采用其他办法，例如用金属对金属高速碰撞。

表 11.10　几种炸药在铁、铝、铜中的爆炸冲击波初始参数(计算值)

金属	炸药爆轰参数				ρ_{m0} (g/cm³)	u_x(mm/μs)		N_m(mm/μs)		p_x(kb)		ρ_{mx}/ρ_{m0}	
	炸药	ρ_0(g/cm³)	D(mm/μs)	p_H (kb)		按式(11.219)	按式(11.221)	按式(11.219)	按式(11.221)	按式(11.219)	按式(11.221)	按式(11.219)	按式(11.221)
铁	TNT	1.62	7.000	198.4	7.85	0.815	0.810	5.088	5.140	325.5	326.8	1.191	1.185
	RDX	1.65	8.280	284.5		1.050	1.010	5.451	5.520	450.0	437.7	1.238	1.227
	PETN	1.69	8.400	298.0		1.083	—	5.511	—	468.5	—	—	—
铝	TNT	1.62	7.000	198.4	2.71	1.306	1.285	7.065	7.160	250.0	256.1	1.2268	1.223
	RDX	1.65	8.280	284.5		1.670	1.635	7.571	7.580	342.6	345.4	1.283	1.276
	PETN	1.69	8.400	298.0		1.720	—	7.641	—	356.2	—	—	—
铜	TNT	1.62	7.000	198.4	8.90	0.738	0.750	5.067	5.040	332.8	336.8	1.173	1.171
	RDX	1.65	8.280	284.5		0.960	0.940	5.400	5.380	466.6	450.4	1.216	1.213
	PETN	1.69	8.400	298.0		1.000	—	5.460	—	480.6	—	—	—

11.9.3　爆轰波在刚壁上正反射时的情况

如果装药端部邻接的为不动刚壁，则 $u_x=0$，由(11.234)式推出

$$\pi = \frac{p_x}{p_H} = \frac{(5k+1)+\sqrt{17k^2+2k+1}}{4k} \tag{11.237}$$

将上式代进式(11.231)中，得到

$$\rho_x/\rho_H = V_H/V_x = \frac{(9k^2+2k+1)+(k-1)\sqrt{17k^2+2k+1}}{(9k^2-1)+(k-1)\sqrt{17k^2+2k+1}} \tag{11.238}$$

据(7.58)的第二式，反射冲击波的速度 N 为

$$N = u_H - V_H\sqrt{\frac{p_x - p_H}{V_H - V_x}} = u_H - \sqrt{\frac{p_H V_H(\pi - 1)}{\left(1 - \frac{V_x}{V_H}\right)}}$$

$$= -\frac{D}{k+1}\left\{\sqrt{\frac{k}{2}[(k+1)\pi + (k-1)]} - 1\right\} \tag{11.239}$$

当 k 值给定以后，便可从如上三式求得爆轰波在刚壁反射之初的参量 p_x、ρ_x、N。如：

$$\left.\begin{aligned} k = 1\text{ 时}, \quad & p_x = 2.60p_H, \quad \rho_x = 2.60\rho_H, \quad N = -0.31D \\ k = 3\text{ 时}, \quad & p_x = 2.39p_H, \quad \rho_x = 1.33\rho_H, \quad N = -0.78D \\ k = \infty\text{ 时}, \quad & p_x = 2.28p_H, \quad \rho_x = 1.00\rho_H, \quad N = -1.28D \end{aligned}\right\} \tag{11.240}$$

由此看出，绝热指数 k 对于从刚壁反射的冲击波参量影响较大。

由于爆轰产物的压力较高，密度较大，故由刚壁反射回来的冲击波使爆轰产物的熵增加很小，这是由于反射冲击波造成的压力跳跃较小所致，从如下分析可以清楚看出。作为多方气体的爆轰产物，其熵满足(7.9)式，于是在反射冲击波的前后有

$$\begin{cases} S_H = \ln(p_H V_H^k) + C \\ S_x = \ln(p_x V_x^k) + C \end{cases}$$

由此得到穿过反冲击波熵的变化

$$\triangle S = S_x - S_H = \ln\left[\frac{p_x}{p_H}\left(\frac{V_x}{V_H}\right)^k\right] = \ln\eta \tag{11.241}$$

其中

$$\eta = \frac{p_x}{p_H}\left(\frac{V_x}{V_H}\right)^k \tag{11.242}$$

现以爆轰波在不动刚壁反射为例，利用式(11.238)和(11.237)，可求得 η 只依赖 k 的表达式：

$$\eta = \frac{5k + 1 + \sqrt{17k^2 + 2k + 1}}{4k}\left[\frac{9k^2 - 1 + (k-1)\sqrt{17k^2 + 2k + 1}}{9k^2 + 2k + 1 + (k+1)\sqrt{17k^2 + 2k + 1}}\right]^k \tag{11.243}$$

当 $k=3$ 时； $\eta=1.08$， $\triangle S=\ln(1.08)=0.0334$

当 $k=1$ 时， $\eta=1$， $\triangle S=\ln(1)=0$

由此可见，穿过反射激波熵的变化可以忽略，所以在§11.6和§11.7所做的在全流场等熵的假定是正确的。

按照本节的解决问题的思想，可以解决两个物体高速碰撞时分界面的参量，这个问题留给读者在习题里做。

11.10 斜入射的爆轰波在刚壁上反射时的参量

上一节研究的是爆轰波阵面垂直界面法线入射的情况，现在研究另一种重要情况，也是更普遍的一种情况——爆轰波斜入射，这在实际问题中非常重要，不管在武器设计中还是在爆炸加工中都会遇到这样的问题。本节先研究爆轰波阵面斜入射到刚壁上的情形，亦

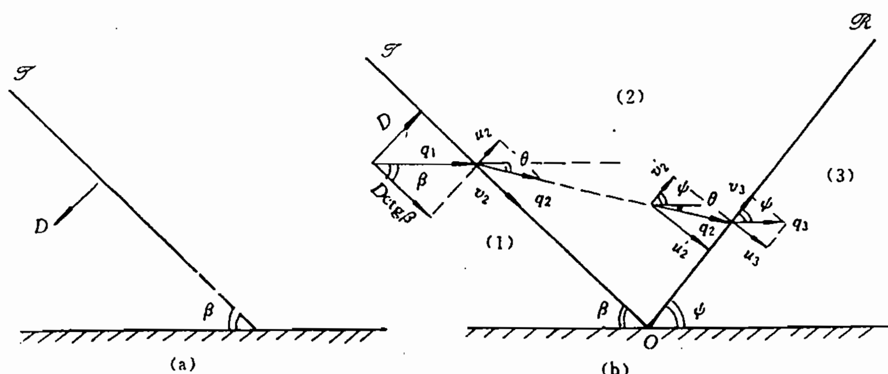


图 11.26 斜入射到刚壁上爆轰波阵面的正规反射

相当两个对称爆轰波阵面成一定角度的对撞问题。

图 11.26(a)表示出一个平面爆轰波阵面 $\mathscr{T}$ 以常速 D 沿炸药传播，它与刚壁成 β 角传向刚壁。将坐标系原点取在 $\mathscr{T}$ 与刚壁的动交点 O 上，则运动化成定常。图 11.26(b)表示出在动坐标系中流动的情况，在此动坐标系中看，$\mathscr{T}$ 之前原静止的介质(炸药)现以 $\boldsymbol{q}_1$ 速度流向 $\mathscr{T}$，$\boldsymbol{q}_1$ 平行刚壁而其数值为

$$q_1 = D/\sin\beta \tag{11.244}$$

图示的 $\mathscr{R}$ 是 $\mathscr{T}$ 在刚壁反射的冲击波，它与壁成 ψ 角。在动坐标系中，除了运动学量外，其他量与在固定坐标系中相同。以下我们在动坐标系中研究问题。

设 $\mathscr{T}$ 之前后的速度分别为 $\boldsymbol{q}_1$ 和 $\boldsymbol{q}_2$，并将它们分解成垂直和平行分量 u 和 v。在 $\mathscr{T}$ 之前的 $\boldsymbol{q}_1$：

$$\boldsymbol{q}_1 = (u_1, v_1) = (D, D\cdot\cot\beta) \tag{11.245}$$

即

$$u_1 = D,\quad v_1 = D\cdot\cot\beta \tag{11.246}$$

在 $\mathscr{T}$ 之后的速度 $\boldsymbol{q}_2$：

$$\boldsymbol{q}_2 = (u_2, v_2)$$

即

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= D - u_H = D - \frac{D}{k+1} = \frac{k}{k+1}D \\ v_2 &= v_1 = D\cdot\cot\beta \end{aligned}\right\} \tag{11.247}$$

$$q_2 = \sqrt{u_2^2 + v_2^2} = D\sqrt{\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 + \cot^2\beta} \tag{11.248}$$

速度 $\boldsymbol{q}_1$ 穿过 $\mathscr{T}$ 不仅改变了大小，且改变了方向。设 $\boldsymbol{q}_1$ 与 $\boldsymbol{q}_2$ 的夹角为 θ(它亦是 $\boldsymbol{q}_2$ 与壁的夹角)：

$$\tan(\beta - \theta) = \frac{u_2}{v_2} = \frac{k}{k+1}\tan\beta \tag{11.249}$$

$\mathscr{T}$ 之后的压力和密度

$$p_2 = p_H = \frac{1}{k+1}\rho_0 D^2, \quad \rho_2 = \rho_H = \frac{k+1}{k}\rho_0 \tag{11.250}$$

其中，ρ_0 为炸药密度，k 为爆轰产物的绝热指数，u_H、p_H、ρ_H 为 C—J 爆轰波阵面上的量。

在反射冲击波 $\mathscr{R}$ 前后的状态。速度 $\boldsymbol{q}_2$ 与反射波 $\mathscr{R}$ 的夹角为 ϕ，很显然

$$\phi = \psi + \theta \tag{11.251}$$

速度 $\boldsymbol{q}_2$ 分解成垂直和平行 $\mathscr{R}$ 的分量 $\boldsymbol{q}_2 = (u_2', v_2')$，即

$$u_2' = q_2 \sin\phi, \qquad v_2' = q_2 \cos\phi \tag{11.252}$$

穿过 $\mathscr{R}$ 的流速 $\boldsymbol{q}_3$ 平行刚壁，它分解成垂直和平行 $\mathscr{R}$ 的分量：$\boldsymbol{q}_3 = (u_3, v_3)$，即

$$u_3 = q_3 \sin\psi, \qquad v_3 = q_3 \cos\psi \tag{11.253}$$

根据穿过激波产物的速度切向连续，见(7.52)式，则有

$$v_2' = q_2 \cos\phi \equiv q_3 \cos\psi = v_3 \tag{11.254}$$

从而得到

$$\begin{gathered} q_3 = q_2 \cos\phi / \cos\psi \\ u_3 = q_2 \cos\phi \tan\psi \end{gathered} \tag{11.255}$$

由于爆轰产物为多方气体，以及在动坐标系中关系式(7.61)，则有

$$\left.\begin{aligned} &\rho_2 u_2' = \rho_3 u_3 \\ &p_2 + \rho_2 (u'_2)^2 = p_3 + \rho_3 u_3^2 \\ &\frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{(k-1)p_3 + (k+1)p_2}{(k+1)p_3 + (k-1)p_2} \end{aligned}\right\} \tag{11.256}$$

根据(11.252)和(11.255)，则由如上的第一和第三式得到

$$\frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{u_3}{u_2'} = \frac{\tan\psi}{\tan\phi} = \frac{(k-1)p_3 + (k+1)p_2}{(k+1)p_3 + (k-1)p_2} \tag{11.257}$$

利用(11.252)和(11.255)式，则由(11.256)的第二式得到

$$\rho_2 q_2^2 \sin^2\phi - \rho_3 q_2^2 \cos^2\phi \cdot \tan^2\psi = p_3 - p_2 \tag{11.258}$$

再利用(11.257)式，上式的左边可由化成

$$\begin{aligned} &\rho_2 q_2^2 \sin^2\phi - \rho_3 q_2^2 \cos^2\phi \cdot \tan^2\psi \\ &= \rho_2 q_2^2 \sin^2\phi \left[1 - \frac{\rho_3}{\rho_2}\frac{\tan^2\psi}{\tan^2\phi}\right] \\ &= \rho_2 q_2^2 \sin^2\phi \cdot \left[1 - \frac{\tan\psi}{\tan\phi}\right] \\ &= \rho_2 q_2^2 \sin^2\phi \cdot \left[1 - \frac{(k-1)p_3 + (k+1)p_2}{(k+1)p_3 + (k-1)p_2}\right] \\ &= \rho_2 q_2^2 \sin^2\phi \frac{2(p_3 - p_2)}{(k+1)p_3 + (k-1)p_2} \end{aligned}$$

于是(11.258)式化成

$$p_3 = \frac{2}{k+1}\rho_2 q_2^2 \sin^2\phi - \frac{k-1}{k+1}p_2 \tag{11.259}$$

将它再代回到(11.257)式，并考虑到(11.251)、(11.250)和(11.248)式，则有

$$\frac{\tan\psi}{\tan\phi} = \frac{\tan(\phi - \theta)}{\tan\phi} = \frac{2(k-1)\rho_2 q_2^2 \sin^2\phi - (k-1)^2 p_2 + (k+1)^2 p_2}{2(k+1)\rho_2 q_2^2 \sin^2\phi - (k^2-1)p_2 + (k^2-1)p_2} \tag{11.260}$$

$$=\frac{k-1}{k+1}+\frac{2k}{k+1}\frac{p_2}{\rho_2 q_2^2\sin^2\phi}$$

$$=\frac{k-1}{k+1}+\frac{2k^2}{(k+1)[k^2+(k+1)^2\cdot\cot^2\beta]\sin^2\phi} \tag{11.260}$$

为了从上式中消去 θ，求得 β 与 ϕ 的关系，由(11.249)式得到

$$\tan\theta=\frac{\tan\beta}{k\tan^2\beta+(k+1)} \tag{11.261}$$

利用上式，(11.260)式的左边写成

$$\frac{\tan(\phi-\theta)}{\tan\phi}=\frac{\tan\phi-\tan\theta}{\tan\phi(1+\tan\phi\cdot\tan\theta)}$$

$$=\frac{\tan\phi-\dfrac{\tan\beta}{k\tan^2\beta+(k+1)}}{\tan\phi\left[1+\dfrac{\tan\phi\cdot\tan\beta}{k\tan^2\beta+(k+1)}\right]}$$

$$=\frac{k\tan^2\beta\cdot\tan\phi+(k+1)\tan\phi-\tan\beta}{\tan\phi[k\tan^2\beta+(k+1)+\tan\beta\cdot\tan\phi]}$$

于是式(11.260)化成

$$\frac{k\tan^2\beta\cdot\tan\phi+(k+1)\tan\phi-\tan\beta}{\tan\phi[k\tan^2\beta+(k+1)+\tan\beta\cdot\tan\phi]}$$

$$=\frac{k-1}{k+1}+\frac{2k^2}{(k+1)[k^2+(k+1)^2\cot^2\beta]\sin^2\phi} \tag{11.262}$$

这是解决爆轰波在刚壁上斜反射的一个非常重要的关系式。当入射角 β 给出便可从该式求得 ϕ，从而反射冲击波 $\mathscr{R}$ 之后的所有物理量都可求出。

现在研究一个重要问题——马赫反射(Mach reflection)。在爆轰波阵面 $\mathscr{T}$ 的入射角 β 小于一定值 β_c 时，每一入射波都会在刚壁上反射出一定角度的的冲击波，即给定一个 β 值，便可从(11.272)式求得一个解 ϕ，——这就是正规反射(regular reflection)。可是当 $\beta\geqslant\beta_c$ 时，爆轰波阵面的反射点 O 离开固壁，形成了如图 11.27 所示的三波结构——产生了马赫反射。马赫杆$\widehat{OW}$在三波点 O 的附近是弯曲的，接壁时基本垂直，作为近似处理，将$\widehat{OW}$视作垂直固壁的直线。

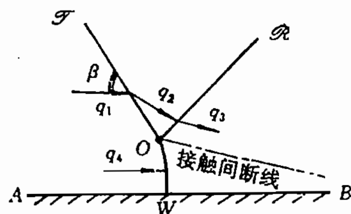


图 11.27 爆轰波在刚壁上的马赫反射

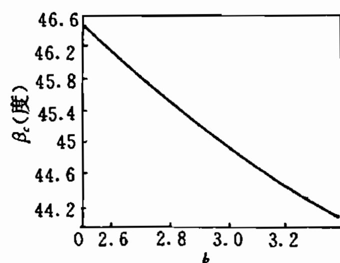


图 11.28 爆轰波产生马赫反射的临界入射角 β_c 与产物绝热指数 k 的关系曲线

上面所提到的 β_c 就是产生马赫反射的临界角，它可由(11.262)式来确定，该方程是个作为 $\tan\beta$ 或者 $\tan\psi$ 的四次代数方程。将方程作为 $\tan\psi$ 的四次方程，可利用根存在的判别式来确定解正好不存在时的 $\tan\beta$ 值，即 β 值，这个 β 就是临界角 β_c。

从式(11.262)可知，β_c 只与爆轰产物的绝热指数 k 有关，图 11.28 绘出了 β_c 与 k 的曲线。

产生马赫反射后，作为入射的爆轰波阵面的一部分——马赫杆 OW 不能作为 C－J 爆轰波阵面的传播，而是超压爆轰。但是它与 C－J 爆轰一样，在爆轰波阵面上当然满足质量守恒、动量守恒和能量守恒，在略去爆轰波阵面之前的压力和内能，并在波前速度为零的情况下，在空间不动坐标系中，则有

$$\left.\begin{aligned}&\rho_0 D_M = \rho_M(D_M - u_M)\\&\frac{1}{k-1}p_M V_M = \frac{1}{2}p_M(V_0 - V_M) + Q_M\\&\rho_0 D_M^2 = p_M + \rho_M(D_M - u_M)^2\\&(p_M = \rho_M R T_M)\end{aligned}\right\}\tag{11.263}$$

其中，$\rho_0=\dfrac{1}{V}$，ρ_0 为炸药的密度，D_M 为爆速，u_M 为在不动坐标系中的产物质点速度。该式与描述 C－J 爆轰的(10.46)式不同之处有二：一是在上式中的 Q_M 与 Q_V 不同，即两者的化学转化能不一样；二是爆轰速度不同，在视马赫杆 OW 垂直固壁的情况下，马赫杆沿炸药的传播速度 D_M，按图 11.27 所示的几何关系，则有与(10.46)的最后一式不同的下式

$$D_M = D/\sin\beta = D\cdot\csc\beta \tag{11.264}$$

如果 Q_M 给出，便可由(11.263)和(11.264)式求解马赫杆之后的物理量。为了同 C－J 爆轰比较，引进炸药释放能之比 η，它定义作：

$$\eta = Q_M/Q_v \tag{11.265}$$

由(10.60)式得知

$$Q_v = \frac{p_H V_0}{2(k-1)}$$

于是

$$Q_M = \frac{\eta p_H V_0}{2(k-1)} \tag{11.266}$$

将它代进(11.263)的第二式，得到

$$\frac{1}{k-1}p_M V_M - \frac{1}{2(k-1)}\eta p_H V_0 = \frac{1}{2}p_M(V_0 - V_M) \tag{11.267}$$

其中，$p_H=\dfrac{1}{k+1}\rho D^2$ 为 C－J 爆轰波阵面上的压力。由(11.263)的第一式和第三式，消去 u_M 后得到

$$p_M = \rho_M D_M^2\left(1 - \frac{V_M}{V_0}\right) \tag{11.268}$$

将式(11.267)和(11.268)联立，消去 V_M，则得到

$$\left(\frac{p_M}{p_H}\right)^2 - 2\left(\frac{D_M}{D}\right)^2\left(\frac{D_M}{p_H}\right) + \eta\left(\frac{D_M}{D}\right)^2 = 0 \tag{11.269}$$

将(11.264)式代进上式，并求解得到

$$p_M/p_H = \csc^2\beta + \csc\beta \cdot \sqrt{\csc^2\beta - \eta} \tag{11.270}$$

式(11.269)本有两个根，但因那个根在 $\eta=0$ 时它为零，这与事实不符，故略去它。式(11.270)就是爆轰波的马赫杆上的压力解。

为了估计马赫杆上的爆轰压力 p_M，取 $\eta=1$ 时，则由上式得到

$$p_M = \frac{p_H}{1-\cos\beta} \tag{11.271}$$

图 11.29 画出了在 $\eta=1$ 的情况下量 p_M/p_H 与 β 的关系。

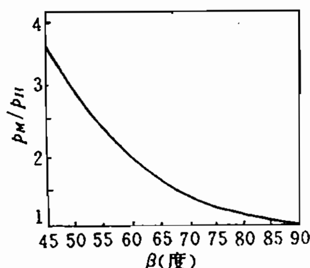


图 11.29 在 $\eta=1$ 时的 p_M/p_H 与 β 的关系曲线

如果该马赫反射正好是正规反射到非正规反射(即马赫反射)的临界状态，且产物的绝热指数 $k=3$。这样，可从(11.262)式或者从图 11.28 求得 $\beta=\beta_c=44.8°$，将该值代进(11.271)中便得到

$$p_M = 3.45p_H \tag{11.272}$$

它超过了平面爆轰波在不动刚壁上反射时产生的压力，该压力为 $p_x=2.39p_H$(见§11.9 的第二部分)。

通过上面简单算例，$\eta=1$、$k=3$ 时的马赫杆上的压力看出，马赫反射可以使能量聚集在局部范围而形成高压。

11.11 斜入射的爆轰波在非刚性壁上反射时的参量

在实际问题中，刚性壁是不存在的。因为一切介质都是可压缩的，所以上节的处理是一种理想化。更具有实际意义的是应研究斜入射爆轰波在可变形壁上的反射[7]，作为上节研究的继续，现研究这个问题。

与图 11.26 所示的情况相同，爆轰波斜入射到一种介质的表面，由于爆轰波的冲压作用介质发生变形。同§11.10 一样，仍在动坐标系中研究，入射的爆轰波 $\mathscr{T}$ 为 C—J 爆轰，爆速为 D。在动坐标系中，入射波、反射波、速度方向、以及它们与界面的夹角等均表示在图 11.30 中，所采用的字母符号同上节。

与上节不同的是：流速 $\boldsymbol{q}_2$ 穿过反射激波 $\mathscr{R}$ 后不再与 $\boldsymbol{q}_1$ 平行，但它仍平行于固壁 OB，OB 为原水平固壁因爆轰冲压而折转 ϵ 角(注意，这是撞击点 O 附近的表述，故均表成直线)；在介质中形成冲击波 $\mathscr{L}$，它与原水平固壁 AO 成 μ 角。在 O 点附近的运动分成(1)、(2)、(3)、(4)、(5)共五个区。

描述从(1)区到(2)区到(3)区的流动基本同上节，即(11.246)～(11.259)式在本节仍成立，只是 $\boldsymbol{q}_2$ 与 $\mathscr{R}$ 的夹角 ϕ_* 与(11.251)式表示的 ϕ 不同，它为

$$\phi_* = \psi - \epsilon + \theta \tag{11.273}$$

所以(11.252)到(11.259)式尽管可以照搬，但是须将各式中的 ϕ 改成 ϕ_*. 于是则有(参照(11.260)式)

$$\frac{\tan\psi}{\tan\phi_*}=\frac{\tan(\phi_*-\theta+\varepsilon)}{\tan\phi_*}=\frac{k-1}{k+1}+\frac{2k^2}{(k+1)[k^2+(k+1)^2\cdot\cot^2\beta]\sin^2\phi_*}$$

(11.274)

而据(11.249)式，仍有

$$\tan(\beta-\theta)=\frac{k}{k+1}\tan\beta \tag{11.275}$$

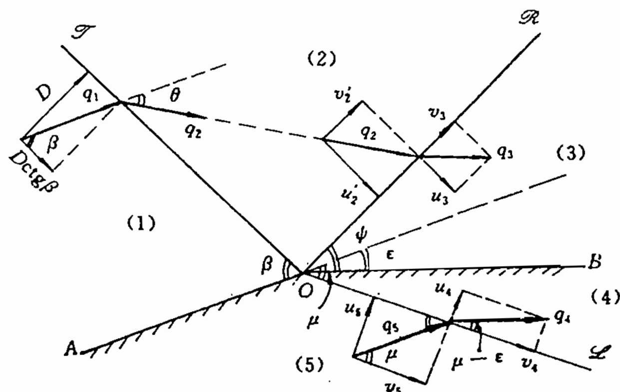


图 11.30 斜入射到非刚性壁的爆轰波阵面的正规反射

如果 ε 已知，将式(11.273)、(11.274)、(11.275)联立便可求得 ψ 和 θ，于是以 β 角斜入射的爆轰波所造成的(2)区和(3)区流动的解就完全确定了。

然而 ε 未知，本节的核心问题是确定 ε.

现在是在随爆轰波阵面与壁的碰撞点 O 一起沿 AO 运动的坐标系中研究问题，所以在该坐标系中，介质中冲击波 $\mathscr{L}$ 之前的流速 $\boldsymbol{q}_5$ 与 $\boldsymbol{q}_1$ 相等

$$|\boldsymbol{q}_5|=|\boldsymbol{q}_1|=\frac{D}{\sin\beta} \tag{11.276}$$

流速 $\boldsymbol{q}_5$ 垂直和平行 $\mathscr{L}$ 的分量 u_5 和 v_5 为

$$\left.\begin{aligned}u_5&=\frac{D\sin\mu}{\sin\beta}\\ v_5&=\frac{D\cos\mu}{\sin\beta}\end{aligned}\right\} \tag{11.277}$$

即介质中冲击波 $\mathscr{L}$ 在空间的传播速度 N_m 值为

$$N_m=u_5=\frac{D\sin\mu}{\sin\beta} \tag{11.278}$$

设处于静止状态的介质密度 $\rho_5=\rho_{m0}$、压力 $p_5=p_0=0$.

穿过激波 $\mathscr{L}$ 之后的速度 $\boldsymbol{q}_4$ 平行固壁：

$$\boldsymbol{q}_4=(u_4,v_4)=(q_4\sin(\mu-\varepsilon),q_4\cos(\mu-\varepsilon)) \tag{11.279}$$

由于穿过 $\mathscr{L}$，速度切向连续，故

$$v_5=\frac{D\cos\mu}{\sin\beta}=q_4\cos(\mu-\varepsilon)=v_4 \tag{11.280}$$

从而得到

$$
\left.\begin{aligned}
q_4 &= \frac{D\cos\mu}{\sin\beta\cos(\mu-\varepsilon)} \\
u_4 &= \frac{D\cos\mu}{\sin\beta}\tan(\mu-\varepsilon)
\end{aligned}\right\} \tag{11.281}
$$

在 $\mathscr{S}$ 两边满足质量守恒和动量守恒(不引进出能量方程,因对解决现在的问题无帮助)

$$
\left.\begin{aligned}
\rho_5 u_5 &= \rho_4 u_4 \\
p_5 + \rho_5 u_5^2 &= p_4 + \rho_4 u_4^2
\end{aligned}\right\} \tag{11.282}
$$

将上式化成在空间不动坐标系中表示,(参照(7.54)的头两式),并考虑到

$$
p_5 \overset{*}{=} p_0 = 0, \quad \rho_5 = \rho_{m0}, \quad u_5 = N_m, \quad p_4 = p_m, \quad \rho_4 = \rho_m, \quad u_4 = N_m - u_m \tag{11.283}
$$

其中,u_m 为 $\mathscr{S}$ 后边的质点速度,不过是在不动坐标系中表示的,于是上式化为

$$
\left.\begin{aligned}
\rho_{m0}/\rho_m &= 1 - \frac{u_m}{N_m} \\
p_m &= \rho_{m0} N_m u_m
\end{aligned}\right\} \tag{11.284}
$$

上式不封闭,需要补充其他条件,可以引用雨贡纽冲击压缩关系式(见(11.119)式)

$$
N_m = g + h u_m \tag{11.285}
$$

利用它,从(11.284)中消去 u_m,得到

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\rho_{m0}}{\rho_m} &= 1 - \frac{1}{h} + \frac{g}{hN_m} \\
p_m &= \rho_{m0} N_m \left(\frac{N_m - g}{h}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{11.286}
$$

而据(11.283)式和(11.277)式,有

$$
N_m = u_5 = \frac{D\sin\mu}{\sin\beta} \tag{11.287}
$$

于是(11.286)化成

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\rho_{m0}}{\rho_m} &= \frac{h-1}{h} + \frac{g}{h}\,\frac{\sin\beta}{D\sin\mu} \\
p_m &= \frac{\rho_{m0} D\sin\mu}{h\sin\beta}\left(\frac{D\sin\mu}{\sin\beta} - g\right)
\end{aligned}\right\} \tag{11.288}
$$

而据(11.281)、(11.283)和(11.285)式,则推得

$$
\tan(\mu-\varepsilon) = \left(\frac{h-1}{h} + \frac{g}{hD}\,\frac{\sin\beta}{\sin\mu}\right)\tan\mu \tag{11.289}
$$

由于 OB 为分界面,所以

$$
p_m = p_3 \tag{11.290}
$$

而据(11.259)式,(11.250)和(11.248)式,有

$$
\left.\begin{aligned}
p_3 &= \frac{2}{k+1}\rho_2 q_2^2 \sin\phi_* - p_2\frac{k-1}{k+1} \\
\rho_2 &= \frac{k+1}{k}\rho_0 \\
p_2 &= \frac{1}{k+1}\rho_0 D^2 \\
q_2 &= D\cdot\sqrt{\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 + \cot^2\beta}
\end{aligned}\right\} \tag{11.291}
$$

这样，将式(11.273)～(11.275)、(11.288)～(11.291)联立起来便可求解 θ、μ、ϕ_*、ψ、ε、p_m、ρ_m、p_3，于是斜入射到非刚性壁上的爆轰波正规反射问题全部解决。

现简述另一个问题——马赫反射。同入射到刚壁上的情形一样，当入射角 β 大于某个值 β_c 时，入射波与反射波的交汇点离开固壁，形成三波结构，类似于图 11.27，与该图示的差别在于 WB 不是 AW 的延长线，AW 与 WB 成一定的角度 ε. 临界角 β_c 的确定类同刚壁反射的情形，亦是当正规反射的方程组无解时所对应的最小 β 角便是临界角。

出现马赫反射后，在碰撞点附近的求解，类同正规反射情形，不同的是要考虑马赫杆之后的量，其做法完全可参照上节最后一部分。

在可压缩固壁上反射时的临界角 β_c，要比在刚壁上的临界角大，对斜入射到刚壁上的爆轰波发生马赫反射的临界角只与爆轰产物的绝热指数 k 有关，与爆压无关。但在非刚性壁上的 β_c 除了与 k 有关外还与爆压、介质的软硬程度等有关。对于密度 $\rho_0=1.65\mathrm{g/cm^3}$ 的 50TNT/50PETN 炸药对铁板进行斜冲击时，算得：$\beta_c=63.4°$. 如若把铁板作为刚壁，临界角 β_c 就小多了，按(10.108)式算得该炸药 $k=2.89$，再从图 11.28 查得：$\beta_c=45°$.

再简述一种特殊情况——反射稀疏波。当爆轰波阵面的入射角大到一定程度，脱离了固壁的三叉点又回到固壁，入射爆轰波反射的不再是冲击波，而是稀疏波，形成如图 11.31 所示的情况。

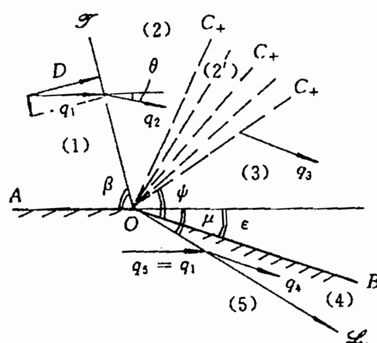


图 11.31　爆轰波在固壁上反射稀疏波的情形

图 11.31 所示仍在随碰撞点 O 运动的坐标系中描述，整个运动是定常的，穿过爆轰波 $\mathscr{T}$ 之后爆轰产物的流动是等熵的，即在区(2)、(2)′、(3)中熵不变：

$$
p = A\rho^k,\quad A=\text{const} \tag{11.292}
$$

由于流动为定常等熵的，故在 $\mathscr{T}$ 之后的产物流动区，伯努利方程(见(7.22)式)成立

$$
\frac{1}{2}q^2 + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} = \text{const} \tag{11.293}
$$

其中 q 为流速值。在这里先回顾一下音速 a 和马赫数 M 的定义与表达式

$$
a^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s = kA\rho^{k-1} = \frac{kp}{\rho} = kA^{\frac{1}{k}}p^{\frac{k-1}{k}} \tag{11.294}
$$

$$
\mathrm{M} = q/a \tag{11.295}
$$

在 $\mathscr{T}$ 之后形成一个右行中心简单波，即普朗特一迈叶尔气流(2′)区，现在导出流动方向角 ω 与马赫数 M 的关系式(即给出与(7.143)式不同形式的表达式，当然亦可直引用(7.143)式)，由于流动为平面定常等熵的，故穿过波区(2′)沿一条左行特征线 C_-上有

$$\mathrm{d}\omega = \sqrt{\mathrm{M}^2 - 1}\,\frac{\mathrm{d}q}{q} \tag{11.296}$$

见(7.143.2)式，在这里取了正号，因现在将 ω 定义为顺时针为正。

为了从上式中消去 q，利用(11.294)和(11.295)式将式(11.293)改写在

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k-1}\mathrm{M}^{-2}\right)q^2 = \mathrm{const} \tag{11.297}$$

将上式微分，整理后得到

$$\frac{\mathrm{d}q}{q} = \frac{1}{\left(\mathrm{M} + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^3\right)}\mathrm{dM} = \frac{1}{2\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)}\frac{\mathrm{dM}^2}{\mathrm{M}^2} \tag{11.298}$$

将上式代进式(11.296)中，得到

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\sqrt{\mathrm{M}^2 - 1}}{2\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)} \cdot \frac{\mathrm{dM}^2}{\mathrm{M}^2} \tag{11.299}$$

该式给出了在简单波区(2′)中，沿任一条左行特征线 C_-上的流向角与马赫数的关系，将上式从 $\mathscr{T}$ 之后的状态(2)积分到状态(3)。在状态(2)中 $\omega=\theta$，$\mathrm{M}=\mathrm{M}_2$ 是知晓的，据式(11.261)以及式(11.248)、(11.250)，有

$$\left.\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{\tan\beta}{\mathrm{k}\tan^2\beta + (k+1)} \\ \mathrm{M}_2 &= \frac{q_2}{a_2} = \frac{D\sqrt{\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 + \cot^2\beta}}{\frac{k}{k+1}D} = \sqrt{1 + \left(\frac{k+1}{k}\right)^2\cot^2\beta} \end{aligned}\right\} \tag{11.300}$$

在(3)区 M_3 未知，速度方向虽未知，但它平行固壁，即

$$\omega = \omega_3 = \varepsilon \tag{11.301}$$

将(11.299)式从状态(2)积到状态(3)，即有

$$\int_\theta^\varepsilon \mathrm{d}\omega = \int_{\mathrm{M}_2}^{\mathrm{M}_3} \frac{\sqrt{\mathrm{M}^2 - 1}}{2\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)}\frac{\mathrm{dM}^2}{\mathrm{M}^2}$$

整理后，给出

$$\begin{aligned} \varepsilon - \theta = &\left[\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\arctan\sqrt{\frac{k-1}{k+1}(\mathrm{M}_3^2 - 1)} - \arctan\sqrt{\mathrm{M}_3^2 - 1}\right] \\ &- \left[\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\arctan\sqrt{\frac{k-1}{k+1}(\mathrm{M}_2^2 - 1)} - \arctan\sqrt{\mathrm{M}_2^2 - 1}\right] \end{aligned} \tag{11.302}$$

在上式中 M_2 是已知的，将(11.300)式代进上式后给出

$$\varepsilon - \arctan\left[\frac{\tan\beta}{k\tan\beta + (k+1)}\right]$$

$$= \left[\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\arctan\sqrt{\frac{k-1}{k+1}(M_3^2-1)} - \arctan\sqrt{M_3^2-1}\right]$$

$$- \left[\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\arctan\left(\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}\cot\beta\right) - \arctan\left(\frac{k+1}{k}\cot\beta\right)\right] \tag{11.303}$$

于是从上式便可确定(3)区的马赫数 M_3 与固壁折转角 ϵ 的关系。

区域(3)的速度值，可利用(11.297)式确定，由该式得到

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k-1}M_3^{-2}\right)q_3^2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k-1}M_2^{-2}\right)q_2^2 \tag{11.304}$$

即 q_3^2 作为 M_3 也就是 ϵ 的函数。而

$$M_3^2=\frac{q_3^2}{a_3^2},\quad M_2^2=\frac{q_2^2}{a_2^2}$$

于是由(11.304)式得到

$$\frac{a_3^2}{a_2^2}=\frac{\frac{k-1}{2}M_2^2+1}{\frac{k-1}{2}M_3^2+1} \tag{11.305}$$

由(11.294)式得知

$$\left.\begin{aligned} \rho_3 &= \rho_2\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^{\frac{2}{k-1}} = \rho_2\left[\frac{\frac{k-1}{2}M_2^2+1}{\frac{k-1}{2}M_3^2+1}\right]^{\frac{1}{k-1}} \\ p_3 &= p_2\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^{\frac{2k}{k-1}} = p_2\left[\frac{\frac{k-1}{2}M_2^2+1}{\frac{k-1}{2}M_3^2+1}\right]^{\frac{k}{k-1}} \end{aligned}\right\} \tag{11.306}$$

方程(11.303)、(11.304)、(11.306)共四个方程、五个未知量：M_3、q_3、ϵ、ρ_3、p_3. 要想求解，必须同介质中冲击波方程联立。

对于介质中的冲击波关系式，可将式(11.288)、(11.289)和(11.281)第一式照搬过来，即有

$$\left.\begin{aligned} \frac{\rho_{m0}}{\rho} &= \frac{h-1}{h}+\frac{g}{h}\frac{\sin\beta}{D\sin\mu} \\ p_m &= \frac{\rho_{m0}D\sin\mu}{h\sin\beta}\left(\frac{D\sin\mu}{\sin\beta}-g\right) \\ \tan(\mu-\epsilon) &= \left(\frac{h-1}{h}+\frac{g}{hD}\frac{\sin\beta}{\sin\mu}\right)\cdot\tan\mu \\ q_m = q_4 &= \frac{D\cos\mu}{\sin\beta\cdot\cos(\mu-\epsilon)} \end{aligned}\right\} \tag{11.307}$$

再加上固壁 OB 上的条件(即产物在介质的界面上条件)

$$p_3 = p_m \tag{11.308}$$

这样，式(11.303)、(11.304)、(11.306)和(11.307)、(11.308)共九个方程、共九个未知量 M_3、q_3、ϵ、ρ_3、p_3、ρ_m、p_m、μ、q_m，因此方程组封闭可以求解。

如下我们将研究一系列二维抛掷的解法。

11.12 二维抛掷中的泰勒公式

在炸药爆炸驱动的二维平板运动中，有一个极为有用的重要公式，这就是著名的泰勒公式(Taylor's formula)。在许多著作中给出它时，都是在如下将要叙述的那些通用假设之外，又加了一个额外的重要假设——板速 v_p 垂直板的弯转角 θ 的平分线，其实这个假设完全可以去掉。如下，我们将在二维平板抛掷的通用假设的基础上推出该公式[9]。

现考虑在一块等厚，匀质的平面装药板之下，放一块等厚，匀质的金属平板，炸药从一个端面同时起爆，如图11.32所示。这是一个复杂的三维问题，为了简化处理，做以下几点假设：

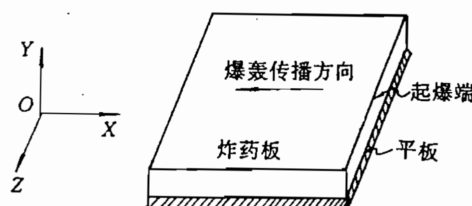


图 11.32 二维装药平板

① 在爆轰作用下的平板，作为"不可压缩流体"，即略去板的弯曲强度和压缩性，从而板可任意弯曲，而无抵抗变形能力；

② 装药与平板均为无限长(不要考虑端点效应)、无限宽(不要考虑侧向效应)；

③ 爆轰是稳定的，即爆速 $D=\text{const}$；

④ 爆轰在真空中进行，即略去空气的阻力作用。

在以上的假设下，问题依然是个二维不定常的平面运动。然而若将坐标系 Oxy 安放在爆轰波阵面上，则在该动坐标下运动成为二维平面定常运动，如图11.33所示。

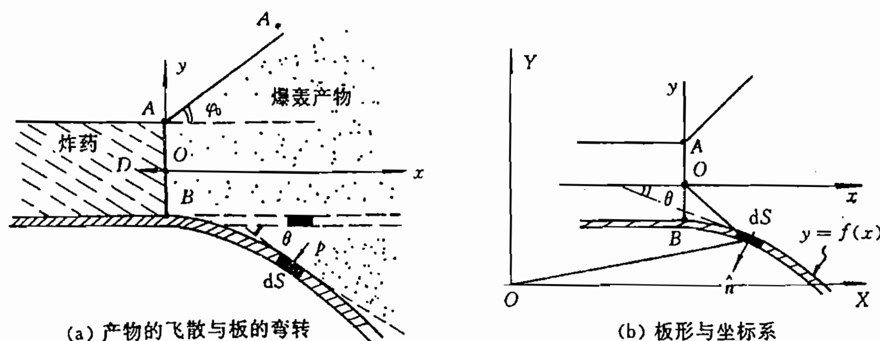


图 11.33 二维定常平板抛掷模型

设板形曲线为

$$y = f(x) \tag{11.309}$$

它既是一条流线，也是一条迹线，不仅界邻抛板的产物质点沿这条曲线运动，而且所有的板元质点(即板的一段微元，简称板元，如图示的 dS)也都沿这条曲线运动。作为板元质点运动轨迹，$y=f(x)$ 当然是：由作为时间 t 函数的轨迹矢量的两个分量消去 t 而得到的，这两个分量是

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \tag{11.310}$$

板元质点的速度 q_* 与分量为

$$q_* = (u_*, v_*), \quad \left.\begin{aligned} u_* &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ v_* &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\}$$

板元质点的运动方程为

$$m_* \frac{\mathrm{d}q_*}{\mathrm{d}t} = p\hat{n} \tag{11.311}$$

即有

$$\left.\begin{aligned} m_* \frac{\mathrm{d}u_*}{\mathrm{d}t} &= pf' / \sqrt{1 + (f')^2} \\ m_* \frac{\mathrm{d}v_*}{\mathrm{d}t} &= - p / \sqrt{1 + (f')^2} \end{aligned}\right\} \tag{11.312}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} & f' = f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan(2\pi - \theta) = - \tan\theta \equiv \frac{v_*}{u_*} \\ & m_* = \rho_* h_* \\ & p \text{ 为爆轰产物对板元质点的压力} \\ & \hat{n} \text{ 为板元 dS 的单位法线} \\ & \theta \text{ 为抛板的弯转角,它本身取正值} \end{aligned}\right\} \tag{11.313}$$

将(11.312)第一式乘以 u_*;第二式乘以 v_*,两式相加,并利用 $f'=v_*/u_*$,则得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_*^2 + v_*^2) = (u_* f' - v_*)p / \sqrt{1 + (f')^2} = 0 \tag{11.314.1}$$

其实,将(11.311)式两边点乘以 q_*,并考虑到 $q_* \perp \hat{n}$,亦得到如上结果

$$m_* \frac{\mathrm{d}q_*}{dt} \cdot q_* = m_* \cdot \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}q_*^2}{\mathrm{d}t} \equiv p\hat{n} \cdot q_* = 0 \tag{11.314.2}$$

将(11.314)的任何一式积分,推得

$$u_*^2 + v_*^2 = q_*^2 \equiv \mathrm{const}$$

由于板元质点在 B 点的速度为 D,故

$$u_*^2 + v_*^2 = q_*^2 = D^2 \tag{11.315}$$

板形曲线的切线方向即为极元速度 q_* 的方向,故 q_* 的分量表成

$$\left.\begin{aligned} u_* &= q_* \cos(2\pi - \theta) = D\cos\theta \\ v_* &= q_* \sin(2\pi - \theta) = - D\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{11.316}$$

如上诸结果均是在随爆轰波阵运动的坐标系 Oxy 中描述的,现在把它们表示在空间不动坐标系中:

在静止坐标系 OXY 中,板元质点的轨迹(见(11.310)式)则表成

$$\left.\begin{aligned} X &= X(t) = x(t) + X_0 - Dt \\ Y &= Y(t) = y(t) + Y_0 \end{aligned}\right\} \tag{11.317}$$

式中，X_0、Y_0 是动坐标系 oxy 的坐标原点 O 在 $t=0$ 时刻的空间坐标。由上式可以给出绝对速度 v_p 和相对速度 q_* 的分量之间的关系

$$\left.\begin{aligned} U_* &= \frac{dX}{dt} = \frac{dx}{dt} - D = u_* - D \\ V_* &= \frac{dY}{dt} = \frac{dy}{dt} = v_* \end{aligned}\right\} \tag{11.318}$$

将(11.316)式的结果代进上式则有

$$\left.\begin{aligned} U_* &= D(\cos\theta - 1) \\ V_* &= -D\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{11.319}$$

这就是抛板质点在空间不动坐标系中的速度分量。绝对速度 v_p 为

$$v_p = \sqrt{U_*^2 + V_*^2} = 2D\sin\frac{\theta}{2} \tag{11.320}$$

这就是著名的抛板泰勒公式，因为在推出上式时，板元质点是任取的，所以(11.320)式对于任何质点都适用。公式(11.320)既是在同一时刻不同板元质点的速度与转角之间的关系，也是某一板元质点在不同时刻的速度与转角之间的关系。作为抛板的极限情形。有

$$v_{pm} = 2D \cdot \sin\frac{\theta_m}{2} \tag{11.321}$$

值得说明的一点，如上所出现的 θ 角是在动坐标系 oxy 中量度的。但按现在所取的两个坐标系的关系，θ 亦是抛板微元与静坐标系 X 轴的夹角，因据(11.317)式和(11.309)式，则有

$$Y = y + Y_0 = f(x) + Y_0 = f(X + D \cdot t - X_0) + Y_0$$

因此

$$\left.\frac{\partial Y}{\partial X}\right|_t = f' \cdot \left.\frac{\partial x}{\partial X}\right|_t = f'(x) = -\tan\theta$$

关于板元质点速度 v_p(注意，v_p 是绝对速度)的方向问题。

可以证明：在任何时刻 t，板元质点的速度 v_p 都垂直于它所在抛板位置处的转角 θ 的平分线 $\overline{HH_*}$，如图 11.34 所示。

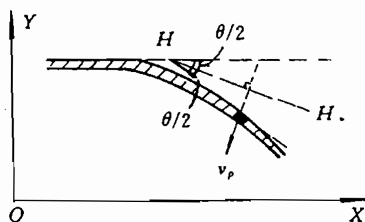


图 11.34　板元速度方向与弯转角平分线的几何关系

令 L 为沿 $\overline{HH_*}$ 线任一非零矢量

$$\boldsymbol{L} = L\cos\frac{\theta}{2}\hat{i} - L\sin\frac{\theta}{2}\hat{j}$$

其中 $\hat{i}$、$\hat{j}$ 为沿 X、Y 轴的单位矢量。而速度 v_p 可以表成

$$\boldsymbol{v}_p = U_*\hat{i} + V_*\hat{j} = D(\cos\theta - 1)\hat{i} - D\sin\theta\hat{j}$$

由以上两推得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_p \cdot \boldsymbol{L} &= DL\left[(\cos\theta - 1)\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta \cdot \sin\frac{\theta}{2}\right] \\ &= DL\left[-2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right] = 0 \end{aligned}$$

所以，v_p 垂直于抛板的弯转角 θ 的平分线(bisector)。

11.13 二维抛板的理论模型与数值计算

上一节给出了爆轰驱动下二维平板抛掷的理论模型，并给出了抛板的速度 v_p 与板弯转角 θ 之间的关系式(泰勒公式)。然而这并没有彻底地解决二维抛板问题，因若求 v_p 值，θ 值却不能取定；反之亦然，更谈不到求解产物流动情况，如若实际需要的话。为了解决这一难题，必须进行数值计算。但是若按一般的二维差分计算不但麻烦，而且边界条件亦难做到较准确处理。特里柏斯(A. A. дерибас)在希尔一帕克(Hill—Pack)对裸体药柱爆轰描述的基础上建立了滑移爆轰下二维平板抛掷模型[10][11]，该模型可以避开一般的二维计算，而改为快捷较准确地按特征线方法进行数值计算。特里柏斯抛掷模型的关键是数值计算时“初值线”的确定。

特里柏斯的抛板模型(thrown plate model)及其前提假设完全同§11.12开头所述。滑移爆轰(slipping detonation)作用下二维平板抛掷运动本来是个复杂的三维不定常运动(见图11.32)，但在§11.12所述的四点假设下化成二维不定常的平面运动。为了方便描述仍将坐标系 Oxy 取在稳定传播的爆轰波阵面上，则爆轰产物流动变成二维定常超音流动，见图11.33。

在动坐标系下，爆轰产物的流场是定常的，飞板则作为爆轰产物的流动边界，飞板(即抛板)的各质点(即飞板的一小段微元，简称板元)组成的这条边界是一条需要确定的流线，它不随时间变化。

11.13.1 运动的控制方程和边界条件

1. 爆轰产物的流动方程

爆轰产物在随爆轰波阵面运动的坐标系 Oxy 中作平面定常等熵超音速无旋流动，见

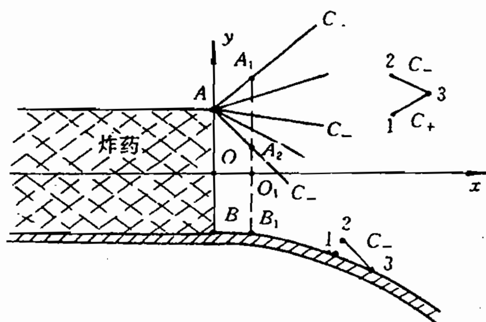


图11.35 二维抛板模型与数值计算的取点方案

图11.35，其控制方程组为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0\\&\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0\\&p/\rho^k=p_H/\rho_H^k\\&\frac{q^2}{2}+\frac{a^2}{k-1}=\frac{k+1}{2(k-1)}a_H^2\end{aligned}\right\}\tag{11.322}$$

其中，ρ 为爆轰产物密度，p 为压力、u 和 v 分别为爆轰产物的 x 向和 y 向速度分量，k 为爆轰产物的绝热指数，下标 H 表示爆轰波阵面上的物理量，而 q 和 a 分别为

$$\begin{cases}q=\sqrt{u^2+v^2}, & \text{为爆轰产物的流速值}\\a=\sqrt{\dfrac{kp}{\rho}}, & \text{为爆轰产物的音速}\end{cases}$$

由于流动是无旋的，所以可引进势函数 φ:

$$\varphi=\varphi(x,y)\tag{11.323}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=u,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=v\tag{11.324}$$

为了差分计算，我们给出产物流动方程组的另一种形式，即特征线和特征线上的物理量关系式，据§7.13和§7.12则有

$$\left.\begin{aligned}&C_+:\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan(\beta+\alpha)\\&\Gamma_+:\quad \beta=\psi(\lambda)+\mathrm{const}\\&C_-:\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan(\beta-\alpha)\\&\Gamma_-:\quad \beta=-\psi(\lambda)+\mathrm{const}\end{aligned}\right\}\tag{11.325}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\psi(\lambda)=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\arccos[k-(k-1)\lambda^2]-\arccos\left[\frac{k+1}{\lambda^2}-k\right]\right\}\\&\lambda=\frac{q}{a_*},\quad a_*\ \text{为临界音速}\\&\alpha=\arcsin\frac{a}{q}=\operatorname{arccot}\left(\sqrt{q^2-a^2}/a\right)\quad\text{(马赫角)}\\&\beta=\arctan\frac{v}{u}\quad\text{(流向角)}\end{aligned}\right\}\tag{11.326}$$

为了更方便于数值计算，我们将特征线上关系式改写成 β 与 α 的关系，根据伯努利方程

$$\frac{q^2}{2}+\frac{a^2}{k-1}=\frac{k+1}{2(k-1)}a_*^2$$

而

$$a=q\sin\alpha$$

于是由以上两式，推出

$$\lambda^2 = \frac{k+1}{2\sin^2\alpha + k - 1} \tag{11.327}$$

为了改写(11.326)第一式，我们暂引进两个中间过程量 Π_1 和 Π_2 以表示该式右边的两个反三角函数。利用(11.327)式，则有

$$\Pi_1 = \arccos\left(\frac{k+1}{\lambda^2} - k\right) = \arccos(2\sin 2\alpha - 1) = \arccos(-\cos 2\alpha)$$

即有

$$\cos\Pi_1 = -\cos 2\alpha, \quad \Pi_1 = \pi - 2\alpha \tag{11.328}$$

再利用(327)式，则有

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}\arccos[k - (k-1)\lambda^2] = \frac{1}{2}\arccos\left[\frac{2k\sin^2\alpha - k + 1}{2\sin^2\alpha + k - 1}\right]$$

即有

$$\cos(2\Pi_2) = \frac{2k\sin^2\alpha - k + 1}{2\sin^2\alpha + k - 1}$$

由 $\cos(2\Pi_2)$ 可求得 $\tan\Pi_2$

$$\tan\Pi_2 = \sqrt{\frac{1-\cos(2\Pi_2)}{1+\cos(2\Pi_2)}} = \sqrt{\frac{2\sin^2\alpha + k - 1 - 2k\sin^2\alpha + k - 1}{2\sin^2\alpha + k - 1 + 2k\sin^2\alpha - k + 1}} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\cot\alpha$$

从而有

$$\Pi_2 = \arctan\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\cot\alpha\right) \tag{11.329}$$

将(11.328)和(11.329)代进(11.326)第一式，则有

$$\psi(\lambda) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\cot\alpha\right) + \alpha - \frac{\pi}{2} \tag{11.330}$$

利用上式，(11.325)式可改写成

$$\left.\begin{aligned} C_+: \quad & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan(\beta + \alpha) \\ \Gamma_+: \quad & \beta = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\cot\alpha\right) + \alpha + \text{const} \end{aligned}\right\} \tag{11.331.1}$$

$$\left.\begin{aligned} C_-: \quad & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan(\beta - \alpha) \\ \Gamma_-: \quad & \beta = -\left[\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\cot\alpha\right) + \alpha\right] + \text{const} \end{aligned}\right\} \tag{11.331.2}$$

由(11.331)式原则上可以求得 $\alpha = \alpha(x, y)$ 和 $\beta = \beta(x, y)$，产物流动的其他物理量可由如下表达式求得

$$\left.\begin{aligned}
&v = u\tan\beta \\
&\frac{\sqrt{q^2 - a^2}}{a} = \cot\alpha \\
&q^2 = u^2 + v^2 \\
&a^2 = \frac{kp}{\rho} \\
&\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_H}{\rho_H^k} \\
&\frac{q^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)}a_H^2
\end{aligned}\right\} \tag{11.332}$$

2. 爆轰产物流动的边界条件

① 在抛板边界 $y=f(x)$上的条件

抛板是一条产物流线，但它的形状事先未知，它由方程(11.313)来描述，由式(11.309)～(11.313)得到

$$\left.\begin{aligned}
&u_*^2 + v_*^2 = D^2 \\
&\frac{p}{\rho_* h_* D^2} = -\frac{f''}{[1+(f')^2]^{3/2}} = \frac{1}{r_*}
\end{aligned}\right\} \tag{11.333}$$

其中，$f'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$f''=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，$r_*$为在抛板点$(x,y)$处的曲率半径(关于$r_*$与$f$的关系，见附录11.1)。因板是流线，故有

$$f' = \frac{v_*}{u_*} = \frac{v}{u} = \tan\beta = -\tan\theta \tag{11.334}$$

即有

$$\beta = -\theta$$

其中θ为抛板转角，见图11.33或图11.34

② 在爆轰波阵面$\overline{AB}$上

$$\left.\begin{aligned}
&u = u_H = \frac{k}{k+1}D \\
&v = v_H = 0 \\
&a = a_H = \frac{k}{k+1}D \\
&p = p_H = \frac{1}{k+1}\rho_0 D^2 \\
&\rho = \rho_H = \frac{k+1}{k}\rho_0
\end{aligned}\right\} \tag{11.335}$$

注意，式(11.335)是在动坐标系 oxy 上表述的，故速度与在静坐标中的不同。

在这里直线段$\overline{AB}$是指

$$\begin{cases} x = 0 \\ -h_0 \leqslant y < h_0 \quad (\text{不包括奇点 } A) \end{cases}$$

在B点$(x=0,y=-h_0)$板元质点的速度分量

$$\left.\begin{aligned}(u_*)_0 &= D \\ (v_*)_0 &= 0\end{aligned}\right\} \tag{11.336}$$

③在自由 AA_1 上

$$\left.\begin{aligned}&p = 0 \\ &\frac{v}{u} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\beta\end{aligned}\right\} \tag{11.337}$$

根据如上的产物流动方程组及其边界条件，原则上可以求解产物流动和抛板运动。但实际上无法求得分析解，因此必须进行数值积分。

11.13.2　数值计算方案

按本问题的特点，数值积分采用沿特征线差分的方法。为了求解方便并使其解具有一定的普遍意义，我们考虑无量钢形式的方程组和解。

1. 方程和边界条件的无量纲化

令

$$x = h_0 X,\ y = h_0 Y,\ u = a_H U,\ v = a_H V,\ r_* = h_0 R_*,\ y = f(x) = h_0 F(X),$$
$$p = p_H P,\ \rho = \rho_H \Omega,\ a = a_H C,\ q = a_H Q,\ \varphi = h_0 a_H \phi \tag{11.338}$$

将上面诸量代进式(11.322)中，则给出无量纲形式的方程组

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial X}(\Omega U) + \frac{\partial}{\partial Y}(\Omega V) = 0 \\ &\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} = 0 \\ &P = \Omega^k \\ &C^2 = \Omega^{k-1} \\ &\frac{Q^2}{2} + \frac{C^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)}\end{aligned}\right\} \tag{11.339}$$

将式(11.338)诸量代进式(11.324)中，给出

$$\frac{\partial\phi}{\partial X} = U,\quad \frac{\partial\phi}{\partial Y} = V \tag{11.340}$$

将式(11.338)诸量代进式(11.331)中，给出

$$\left.\begin{aligned}&C_+:\quad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \tan(\beta + \alpha) \\ &\Gamma_+:\quad \beta = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\cot\alpha\right) + \alpha + \mathrm{const}\end{aligned}\right\} \tag{11.341.1}$$

$$\left.\begin{aligned}&C_-:\quad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \tan(\beta - \alpha) \\ &\Gamma_-:\quad \beta = -\left[\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\cot\alpha\right) + \alpha\right] + \mathrm{const}\end{aligned}\right\} \tag{11.341.2}$$

据(11.326)式，则有

$$\left.\begin{aligned}&\beta = \arctan(V/U) \\ &\alpha = \operatorname{arccot}\frac{\sqrt{Q^2 - C^2}}{C}\end{aligned}\right\} \tag{11.342}$$

令

$$\cot\alpha = \xi, \quad \tan\beta = \zeta \tag{11.343}$$

利用(11.339)的最后一式，则得到

$$\xi = \sqrt{\frac{(k+1)(Q^2-1)}{(k+1)-(k-1)Q^2}} \quad \text{或} \quad Q^2 = \frac{(k+1)(k+\xi^2)}{(k+1)+(k-1)\xi^2} \tag{11.344}$$

利用(11.343)式，(11.341)式的微分形式写成

$$\left.\begin{aligned} C_+: \quad & \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\xi\zeta+1}{\xi-\zeta} \\ \Gamma_+: \quad & \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\xi} = \frac{2\xi^2(1+\zeta^2)}{(1+\xi^2)[(k+1)+(k-1)\xi^2]} \end{aligned}\right\} \tag{11.345.1}$$

$$\left.\begin{aligned} C_-: \quad & \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\xi\zeta-1}{\xi+\zeta} \\ \Gamma_-: \quad & \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\xi} = -\frac{2\xi^2(1+\zeta^2)}{(1+\xi^2)[(k+1)+(k-1)\xi^2]} \end{aligned}\right\} \tag{11.345.2}$$

无量纲形式的边界条件

① 在抛板即在 $Y=F(X)$ 曲线上

$$\left.\begin{aligned} & F' = \zeta \\ & \frac{1}{R_*} = -\frac{F''}{[1+(F')^2]^{3/2}} = \frac{R_b P}{2(k+1)} \end{aligned}\right\} \tag{11.346}$$

其中

$$\begin{cases} F = F(X) = \dfrac{1}{h_0}f(h_0X) \\ F' = \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}X} \\ F'' = \dfrac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}X^2} \\ R_b = 2h_0\rho_0/(h_*\rho_*) \end{cases}$$

② 在爆轰波阵面$\overline{AB}$上，即当 $X=0$、 $-1\leqslant Y<1$ 时

$$U = 1, \quad V = 0, \quad P = 1 \quad \Omega = 1 \tag{11.347}$$

③ 在自由 AA_1 上

$$P = 0, \quad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \zeta \tag{11.348}$$

2. 求一条数值计算所用的初值线

要对所考虑的问题按特征线方法进行数值计算，必须先有一条初值线。然而现有的初值线$\overline{AB}$上，其流速为音速，无法以它为起点按特征线法进行数值计算，因此必须找一条在其上流速大于音速的哥西(Cauchy)初值线作为数值计算的起点。

现在我们就在$\overline{AB}$线附近取一条如图 11.35 所示的线段$\overline{A_1B_1}$作为初值线，确定在其上的物理量的分布，按希尔—帕克的做法[11]进行：

① 求$\overline{A_1B_1}$上物理量的分布

已知$\overline{A_2B_1}/\!/\overline{AB}$， $\overline{OO_1}=X_0$，(X_0 是个任取的小量)。

现在将势函数 ϕ 和密度函数 Ω 在 $X=0$ 处对 X 作泰勒展开，当 $X=X_0$ 时有

$$\left.\begin{aligned}\phi &= \phi_0(Y)+\phi_1(Y)\cdot X_0+\phi_2(Y)\cdot X_0^2+\phi_3(Y)\cdot X_0^3+\cdots\\ \Omega &= \Omega_0(Y)+\Omega_1(Y)\cdot X_0+\Omega_2(Y)\cdot X_0^2+\Omega_3(Y)\cdot X_0^3+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{11.349}$$

于是又有

$$\left.\begin{aligned}U &= \frac{\partial\phi}{\partial X}\Big|_{X_0} = \phi_1+2\phi_2\cdot X_0+3\phi_3\cdot X_0^2+\cdots\\ V &= \frac{\partial\phi}{\partial Y}\Big|X_0 = \phi'_0+\phi'_1\cdot X_0+\phi'_2\cdot X_0^2+\phi'_3\cdot X_0^3\cdots\end{aligned}\right\} \tag{11.350}$$

其中，ϕ_0、ϕ_1、ϕ_2、ϕ_3、…和 Ω_0、Ω_1、Ω_2、Ω_3、…为 Y 的未知函数，因之需要确定。

利用(11.347)式，则由(11.349)和(11.350)式(取 $X_0=0$)得到

$$\phi_1=\phi_1(Y)=1,\quad \phi_0=\phi_0(Y)=\text{const},\quad \Omega_0=\Omega_0(Y)=1 \tag{11.351}$$

对于本问题，ϕ 可以差一个常数而无影响，故取

$$\phi_0=0 \tag{11.352}$$

将(11.349)的第二式和(11.350)式代进(11.339)的头两式中，通过比较 X_0 的各幂次项的系数，并利用 $k\neq1$ 的条件，则求得

$$\left.\begin{aligned}&\Omega_1=0,\quad \phi_2=0,\quad \Omega_2=-3\phi_3\\ &\phi_3''=18(k+1)\phi_3^2\end{aligned}\right\} \tag{11.353}$$

于是展式(11.349)的第二式和(11.350)式在略去高阶项后，写成：

$$\left.\begin{aligned}U &= U(X_0,Y)=1+3\phi_3X_0^3\\ V &= V(X_0,Y)=\phi'_3X_0^3\\ \Omega &= \Omega(X_0,Y)=1-3\phi_3X_0^2\end{aligned}\right\} \tag{11.354}$$

现在关键在于求 ϕ_3，ϕ_3 一旦求出，问题便解决了，故此令：

$$\left.\begin{aligned}&Y=1-Z/\sqrt{3(k+1)}\\ &\phi_3(Y)=\phi_3(1-Z/\sqrt{3(k+1)})=\text{ч}(Z)\end{aligned}\right\} \tag{11.355}$$

这样，方程(11.353)最后一式则化成标准韦氏椭圆函数方程(Weierstrassian elliptic unction equation)：

$$(\text{ч}'(Z))^2=4\text{ч}^3(Z)-g_2\text{ч}(Z)-g_3 \tag{11.356}$$

其中

$$g_2=0,\quad g_3=4\text{Я}$$

而

$$\text{Я}=\frac{\pi}{432(k+1)}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\right]^2 \tag{11.357}$$

是根据在 $\overline{A_1B_1}$ 上的条件：

$$V(X_0,-1)\approx0,\quad V(X_0,-1)\ll V(X_0,1)$$

(11.353)最后一式定出的。

方程(11.356)在 $Z=0$(即 $Y=1$)附近有渐近解(asymptotic solution)：

$$ч(Z) = \frac{1}{Z^2} + \frac{Я^3}{7} Z^4 + \frac{1}{13}\frac{Я^6}{7^2} Z^{10} + \cdots \tag{11.358}$$

将 Z 换成 Y，$ч(Z)$换成 $\phi_3(Y)$，则有：

$$\phi_3(Y) = \frac{1}{3(k+1)(1-Y)^2} + \frac{Я^3}{7}[3(k+1)(1-Y)^2]^2 + \frac{1}{13}\frac{Я^6}{7^2}[3(k+1)(1-Y)^2]^5 + \cdots \tag{11.359}$$

解(11.359)式的适用范围是：$Y<1$ 且 $Y \sim 1$。然而，实际上它在 $-1 \leqslant Y < 1$ 的范围都近似可用，可以验证：当 $Y=-1$ 时，由上式给出的 ϕ_3 的近似值与它在 $Y=-1$ 处的精确值相差极小，而(11.359)这个解函数在 $-1 \leqslant Y < 1$ 区间变化又是平缓的，故认为该解在$\overline{A_2B_1}$上适用。

由于 ϕ_3 已知，则在$\overline{A_2B_1}$上的物理量分布便已知了。由于上面给出的 $\phi_3(Y)$在 $Y \geqslant 1$ 不适用，所以我们只能给出$\overline{A_2B_1}$上物理量的分布。

② 求$\overline{A_1A_2}$上的物理量分布

由于$\overline{A_1A_2}$段是在拐角 A 邻域，见图 11.35，根据量纲理论可以认为：在 A 点附近(当然包括$\overline{A_1A_2}$)，流动是自模拟的，即为以 A 为心的中心简单稀疏波。因此在该区域有

$$\beta = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arctan\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \cdot \cot\alpha\right) + \alpha - \frac{\pi}{2} \tag{11.360}$$

从 A 点发出的每条 C_- 特征线都是直线，即 C_- 为

$$Y = 1 + X \cdot \tan\nu \tag{11.361}$$

ν 为一条 C_- 特征线与 X 轴的夹角，ν 与 β 和 α 有如下关系

$$\nu = \beta - \alpha \tag{11.362}$$

一旦从 A 点发出的一条 C_- 特征线指定，亦即在$\overline{A_1A_2}$指定一个点，也就是给定一个 ν 值，则就可由联立的式(11.360)和(11.362)求出一组 α 和 β 值，这两个值已知，其他物理量便随之确定，于是沿$\overline{A_1A_2}$上的物理量分布就完全确定了。

③ A_1 和 A_2 点的确定

A_1 点的确定就是$\overline{AA_1}$的确定，因$\overline{AA_1}$是产物飞散的自由面，在其上 $P=0$、$C=0$，于是从式(11.342)和(11.343)得出：$\alpha=0$、$\xi=\infty$，再由式(11.344)和(11.360)便得到在$\overline{AA_1}$上：

$$\left.\begin{aligned} Q &= Q_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \\ \beta &= \beta_{\max} = \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - 1\right)\frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \tag{11.363}$$

由于在$\overline{AA_1}$上 $\alpha=0$，故流向与特征线 C_- 方向合一。$\overline{AA_1}$直线为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \tan\beta_{\max} \quad 即 \quad Y = \tan\beta_{\max} \cdot X + 1 \tag{11.364}$$

$\overline{AA_1}$线确定了，当然 A_1 的位置就定了。

A_2 的位置是为样选择的：在 X_0 取定的情况下，在 $-1 \leqslant Y < 1$ 区间，比较由式(11.

354)与由式(11.360)和(11.362)分别给出的两组解，在其值符合得最好的地方就取作 A_2 点的位置。

线段$\overline{A_1A_2}$取成直线，亦可取成曲线。最重要的是在数值计算时在$\overline{A_1A_2}$如何分点，我们在数值计算时在$\overline{A_1A_2}$按等差级数分点，这是避免分点之间物理量跳跃太大的缘故。

3. 差分方案

在本计算中，所遇到的微分方程均为如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=g(x)\\ y=f(x)\text{:为未知函数}\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=G(x,y)\\ y=f(x)\text{:为未知函数}\end{cases}$$

若已知点 $x=x_1$ 上的 y 值：$y_1=f(x_1)$，求 x_1 附近一点 x_2 上的 y 值：$y_2=f(x_2)$，现采用 y^* 来代替它。对于如上两种形式的微分方程，y^* 分别取

$$y^*=y_1+\frac{1}{2}(g_1+g_2)\cdot(x_2-x_1) \tag{11.365.1}$$

$$g_1=g(x_1),\quad g_2=g(x_2)$$

或

$$y^*=y_1+\frac{1}{2}(G_1+G_2)\cdot(x_2-x_1)$$

$$G_1=G(x_1,y_1),\quad G_2=G(x_2,y^*) \tag{11.365.2}$$

可以证明，用 y^* 代替 y_2 时都精确到(x_2-x_1)的二阶。

① 内点的计算

计算从初值线$\overline{B_1A_2A_1}$开始。现考虑内点，已知流场内部“点 1”和“点 2”的位置及其上的物理量，求其附近一点 3 的位置及其上的物理量，点 3 是过点 1 的 C_+特征线和过点 2 的 C_-特征线交点，见图 11.35，点 1、2、3 上的量分别用下标“1、2、3”标志。

按(11.365)式，微分方程(11.345)化成差分形式为

$$\left.\begin{aligned}\zeta_3-\zeta_1&=\frac{1}{2}(Z_1+Z_3)(\xi_3-\xi_1)\\ \zeta_3-\zeta_2&=\frac{1}{2}(S_2+S_3)(\xi_3-\xi_2)\\ X_3-X_1&=\frac{1}{2}(W_1+W_3)(Y_3-Y_1)\\ X_3-X_2&=\frac{1}{2}(Ж_1+Ж_3)(Y_3-Y_2)\end{aligned}\right\} \tag{11.366}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}Z_i&=\frac{2\xi_i^2(1+\zeta_i^2)}{[(k+1)+(k-1)\xi_i^2](1+\xi_i^2)}\\ S_i&=-Z_i\\ W_i&=\frac{\xi_i-\zeta_i}{\xi_i\zeta_i+1}\\ Ж_i&=\frac{\xi_i+\zeta_i}{\xi_i\zeta_i-1}\end{aligned}\right\}\text{(在这里 } i=1、2、3) \tag{11.367}$$

由(11.366)式解出

$$\xi_3 = \frac{\zeta_2 - \zeta_1 + \frac{1}{2}(Z_1 + Z_3)\xi_1 - \frac{1}{2}(S_2 + S_3)\xi_2}{\frac{1}{2}(Z_1 + Z_3) - \frac{1}{2}(S_2 + S_3)} \tag{11.386.1}$$

$$\zeta_3 = \zeta_2 + \frac{1}{2}(S_2 + S_3)(\xi_3 - \xi_2)$$

$$Y_3 = \frac{X_2 - X_1 + \frac{1}{2}(W_1 + W_3)Y_1 - \frac{1}{2}(Ж_2 + Ж_3)Y_2}{\frac{1}{2}(W_1 + W_3) - \frac{1}{2}(Ж_2 + Ж_3)} \tag{11.368.2}$$

$$X_3 = X_2 + \frac{1}{2}(Ж_2 + Ж_3)(Y_3 - Y_2) \tag{11.368.3}$$

计算时使用叠代法,作为零级近似取:

$$Z_3 = Z_1,\quad S_3 = S_2,\quad W_3 = W_1,\ Ж_3 = Ж_2 \tag{11.369}$$

将式(11.369)代进(11.368)的三个式子右端,可以算出 ξ_3、ζ_3、Y_3、X_3,再将所得到的 ξ_3、ζ_3 代进式(11.367)中算出一组 Z_3、S_3、W_3、$Ж_3$ 把这组值再代进式(11.368)的右端,又算出一组新的 ξ_3、ζ_3、Y_3、X_3 来,以此类推直至相邻两次叠代值之差达到要求的精度为止。

其实,只对(11.368)的头两式叠代即可,然而为了保证 X_3、Y_3 也达到要求的精度,故整个(11.368)式都进行叠代。

② 抛板上点的计算

已知抛板上点 1 和流场内点 2 的位置及其上的物理量,求板上点 3 的位置及其上的物理量,见图 11.35。在这里有两种做法:

a. 过点 1 作流线$\overline{13}$,过点 2 作特征线$\overline{23}$,这两条线的交点则为所求之点。据(11.346)式,则有沿流线$\overline{13}$差分:

$$\left.\begin{aligned} Y_3 &= Y_1 + \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_3)(X_3 - X_1) \\ \zeta_3 &= \zeta_1 + \frac{1}{2}(H_1 + H_3)(X_3 - X_1) \end{aligned}\right\} \tag{11.370.1}$$

沿特征线$\overline{23}$差分:

$$\left.\begin{aligned} Y_3 &= Y_2 + \frac{1}{2}(G_2 + G_3)(X_3 - X_2) \\ \xi_3 &= \xi_2 + \frac{1}{2}(M_2 + M_3)(\zeta_3 - \zeta_2) \end{aligned}\right\} \tag{11.370.2}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} G_i &= \frac{1}{Ж_i} \\ M_i &= \frac{1}{S_i} \\ H_i &= -\frac{R_b}{2(k+1)}(1 + \zeta_i^2)^{3/2}\left(1 + \frac{k-1}{k+1}\xi_i^2\right)^{\frac{-k}{k-1}} \\ i &= 1,\ 2,\ 3 \end{aligned}\right\} \tag{11.371}$$

由式(11.370)可解出

$$\left.\begin{aligned}
X_3 &= \frac{Y_2 - Y_1 + \frac{1}{2}(\zeta_1+\zeta_3)X_1 - \frac{1}{2}(G_2+G_3)X_2}{\frac{1}{2}(\zeta_1+\zeta_3) - \frac{1}{2}(G_2+G_3)} \\
Y_3 &= Y_2 + \frac{1}{2}(G_2+G_3)(X_3 - X_2) \\
\zeta_3 &= \zeta_1 + \frac{1}{2}(H_1+H_3)(X_3 - X_1) \\
\xi_3 &= \xi_1 + \frac{1}{2}(M_2+M_3)(\zeta_3 - \zeta_2)
\end{aligned}\right\} \quad (11.372)$$

计算时,对上式使用叠代法(superposition method),先取:

$$\zeta_3 = \zeta_1, \quad G_3 = G_2, \quad H_3 = H_1, \quad M_3 = M_2 \qquad (11.373)$$

将如上的结果代进式(11.372)的右端,算出一组 X_3、Y_3、ζ_3、ξ_3 来,再将其中的 ξ_3 和 ξ_3 代进式(11.371)中算出 G_3、M_3、H_3 来,再将所求得的 G_3、M_3、H_3、ζ_3 代进(11.372)式的右边,又算出一组新的 X_3、Y_3、ζ_3、ξ_3 来,以此类推,直至相邻两次的 X_3、Y_3、ζ_3、ξ_3 的相对误差达到要求为止。

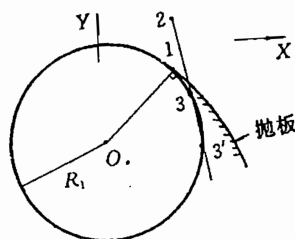


图 11.36

b. 第二种算法,用一段圆弧线来近似一段板形曲线,过点 1,以该处的曲率半径 R_1 为半径,作圆弧线$\overset{\frown}{13}$,过点 2 作特征线$\overline{23}$,这两条线的交点 3 便是所求的。见图 11.36 所示。

圆弧$\overset{\frown}{13}$的方程为

$$Y = F_c(X) = Y_c + \sqrt{R_1^2 - (X - X_c)^2} \qquad (11.374)$$

其中

$$\begin{cases}
R_1 = \dfrac{2(k+1)}{R_b P_1}, & \text{点 1 处的曲率半径} \\
X_c = X_1 + R_1\zeta_1/\sqrt{1+\zeta_1^2}, & \text{圆 } O. \text{ 的圆心 } X \text{ 向坐标} \\
Y_c = Y_1 - R_1/\sqrt{1+\zeta_1^2}, & \text{圆 } O. \text{ 的圆心 } Y \text{ 向坐标}
\end{cases}$$

圆弧线 $Y=F_c(X)$ 在点 1 处与板形曲线 $Y=F(X)$ 在点 1 是二级密接的,即在 $X=X_1$ 时:

$$F'_c(X_1) = F'(X_1), \quad F''_c(X_1) = F''(X_1)$$

故用圆弧来代替板形曲线元亦达到二级精度。

特征线$\overline{23}$可写成

$$X - X_2 = \frac{1}{2}(\text{木}_2 + \text{木}_3)(Y - Y_2) \qquad (11.375)$$

方程(11.374)和(11.375)联立求解,可找出$\overline{23}$与$\overset{\frown}{13}$的交点 3。求解可能存在三种情况:

① 方程组无实解,两条线无交点,这说明“点 2 离点 1 太远”,这时可利用插值等办法,确定一个距板更近的“点 2”;

② 方程组有一组实解，即只有一个交点，这个点便是所求的点 3；

③ 方程组有两组实解，即有两个交点，取“距点 1 最近的那个交点”为所求的点 3。

总之，联立方程可给出如下形式的解(具体形式，这里从略)：

$$Y_3 = Y_3(\text{Ж}_3), \quad X_3 = X_3(\text{Ж}_3) \tag{11.376}$$

此外

$$\left.\begin{aligned} &\text{在点 3：}\quad \zeta_3 = \frac{X_c - X_3}{\sqrt{R_1^2 - (X_2 - X_c)^2}} \\ &\text{沿}\overline{23}\text{线：}\quad \xi_3 = \xi_2 + \frac{\zeta_3 - \zeta_2}{\frac{1}{2}(S_2 + S_3)} \end{aligned}\right\} \tag{11.377}$$

求点 3 的坐标及其上的物理量使用叠代法，先令：$\text{Ж}_3 = \text{Ж}_2$，$S_3 = S_2$，将这两个量代进式(11.376)和(11.377)中，便依次算出 Y_3、X_3、ζ_3、ξ_3 来，将所得到的 ξ_3、ζ_3 代进式(11.367)中又求得新的 Ж_3、S_3，再将这两量代进式(11.376)中又依次得 Y_3、X_3、ζ_3、ξ_3，此叠代一直下去，直至达到要求的精度为止。

③ 板元的运动速度

据(11.333)第一式，$u_*^2 + v_*^2 \equiv D^2$，于是板元的无量纲速度分量(以 a_H 为尺度)为

$$U_* = \frac{k+1}{k}\cos\beta, \quad V_* = \frac{k+1}{k}\sin\beta \tag{11.378}$$

其中

$$\beta = \arctan\zeta$$

④ 板元的飞行时间

设板元在图 11.35 所示的 B 点时刻为零，以 h_0/a_H 为时间尺度，则板元运动的无量纲时间 T 按下式计算

$$T_3 = T_1 + \frac{X_3 - X_1}{\frac{1}{2}(U_{*1} + U_{*3})} \tag{11.379}$$

4. 数值计算的简单流程图

为了简单起见，数值计算的详细框图从略，如下给出简单的流程图(flow chart or diagram)，见图 11.37，并参看图 11.38。

11.13.3 数值计算结果

按照上述方案，可以计算出抛板微元的速度、运动时间、以及抛板的姿态和产物流场等等。下面列出我们计算的部分结果[12]

1. 抛板的飞行姿态

对于情况 Ⅰ：R_b=1.741，k=3.00 和情况 Ⅱ：R_b=2.00，k=3.00 的两种情况的抛板姿态，其计算结果分别列绘在表 11.11 和图 11.39 中。

表 11.11 板形计算数据

Ⅰ	X	0.050	0.166	0.253	0.313	0.413	0.569	0.673	0.949	0.430	8.103	26.673
	Y	0.000	0.001	0.003	0.005	0.009	0.018	0.025	0.049	0.448	1.450	5.715
Ⅱ	X	0.050	0.143	0.214	0.265	0.345	0.494	0.562	0.881	3.471	8.473	28.532
	Y	0.000	0.001	0.003	0.005	0.009	0.019	0.025	0.060	0.599	1.968	7.793

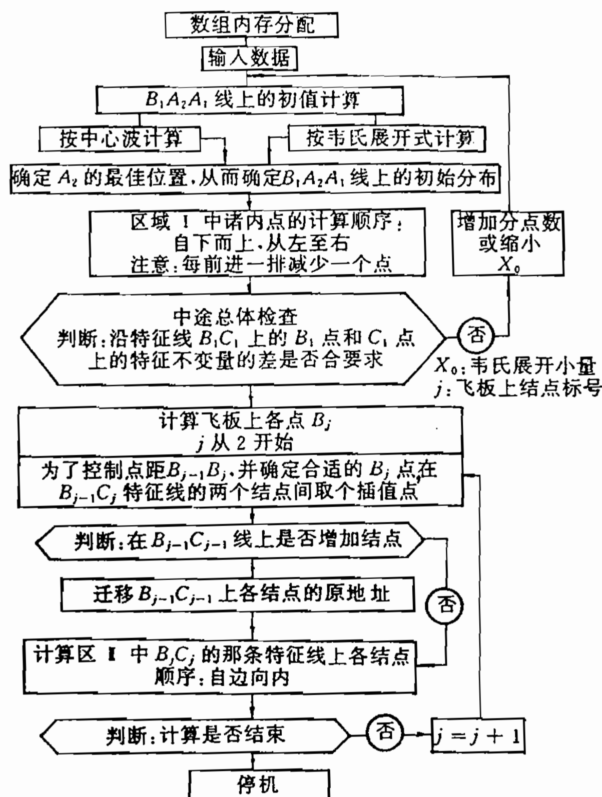


图 11.37　数据计算流程图

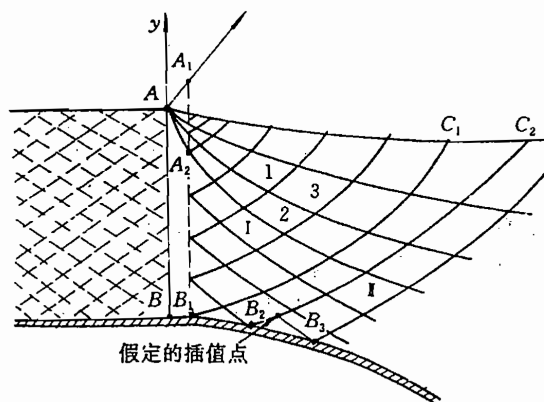


图 11.38　数值计算的特征线网格示意图

从图 11.39 看出，抛板只在爆轰波阵面附近弯曲，稍离爆轰波阵面便趋于平直，这与实验结果一致。

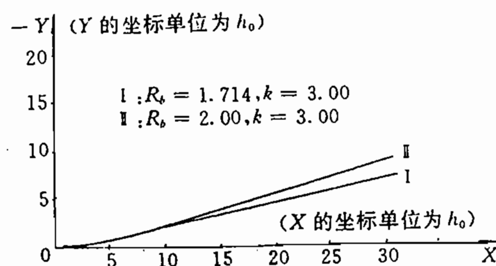


图 11.39 板形曲线

2. 不同质量比下抛板的极限转角

表 11.12 列出在 $k=3$ 时，不同质量比 R_b 下的抛板极限转角 θ_m 的计算值；在该表中同时给出不同 θ_m 值所对应的抛板极限速度 v_{pm}，以及按公式(11.166)计算的一维抛体的极限速度 $u_{\max}$，其中 v_{pm} 是按公式(11.321)由 θ_m 算出的。

表 11.12

R_b	θ_m	v_{pm}/D	$u_{\max}/D$	ε
0.262	4°6′	0.071	0.068	4.2%
0.330	4°52′	0.085	0.082	3.5%
0.525	7°6′	0.124	0.130	−4.8%
0.857	10°3′	0.175	0.169	3.4%
1.054	11°27′	0.199	0.200	−0.5%
1.318	13°12′	0.230	0.231	−0.4%
1.714	15°10′	0.264	0.270	−2.3%
2.00	16°20′	0.284	0.295	−3.8%
2.241	17°38′	0.307	0.313	−2.0%
2.505	18°12′	0.316	0.336	−6.3%
2.673	18°40′	0.324	0.340	−4.9%

从表 11.12 中看出，按二维抛板模型计算出的抛板极限速度 v_{pm} 与一维抛体的极限速度 $u_{\max}$ 相差无几。两种截然不同的模型之所以得出基本相同的结果，是由于：*a*. 两种模型的爆轰产物的绝热指数取值相同(都取 3)，这就保证了两种模型爆轰产物的热力学性质相同；*b*. 两种模型都考虑产物作绝热膨胀推动飞板，在抛板转角不大(即重板)的情况下，力学作用机制基本相同，对此我们可以做以下定性解释：

现考虑一段板元 $\triangle l$ 分别做 一维抛掷运动和二维抛掷运动(对于二维抛掷，考虑的是板元 Y 向运动，在抛板转角不大时(重板)，板元的速度几乎等于它的 Y 向分量)，两种模型的板元运动如图 11.40 所示。

对于二维抛掷情形，在 $t=t_0=0$ 时刻，板元 $\triangle l$ 在 $X=X_0=0$ 处，它上面的"药柱 H_0"高为 $2h_0$，在 $t=t_1$ 时，板元处于 X_1 处，假若爆轰产物相对抛板没有 X 向运动只作 Y 向膨胀，这时板元所对应的产物 H_1(见图 11.40(a))就相当于 H_0 生成的"全部产物"，以此下

去，则二维板元的运动就相当长为 $2h_0$ 的药柱对板元 $\triangle l$ 作一维抛掷运动（朝 Y 轴负向），见图 11.40(b)。

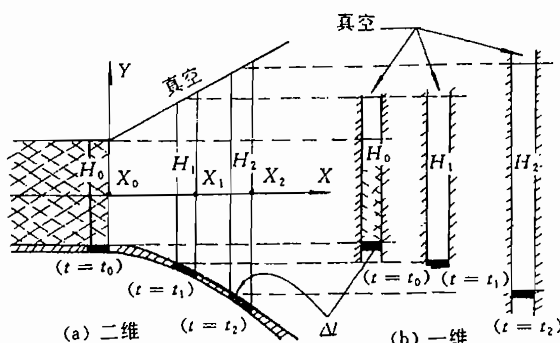


图 11.40　板元的一维抛掷运动和二维抛掷运动

实际上，产物流在 X 方向相对抛板是有移动的，在 X 较小的地方气流相对板向左移动，当然 Y 向膨胀亦比一维情形小，故产物对板的作用为要比相应的一维抛掷情形大；而在离爆轰波阵面较远处产物流相对板向右移动，故产物对板的作用力又比一维情形小。然而作为综合效应——对抛板的极限速度则影响不大，故二维抛板的极限速度可以近似地按一维抛板的极限速度公式来求。

然而应该注意，用一维抛板的极限速度公式来求二维抛板的极限速度，必须是重板，即质量比 R_b 较小的情况下。

11.14　简化的空气中二维抛板模型

特里柏斯在希尔－帕克的裸体炸药爆轰的模型基础上加以发展，提出了在真空中二维平板抛掷的理论模型。本书作者在特里柏斯模型的基础上考虑空气的存在，提出一种简化的空气中二维抛板模型[13]。该模型既可计及空气对抛板的影响，又可变为真空中二维抛板的理论模型。

11.14.1　运动的控制方程组

在随爆轰波阵面运动的坐标系中，整个运动的图像如图 11.41 所示。

1. 爆轰产物流动的描述

因在动坐标系中爆轰产物作等熵、无旋、定常、超音速流动，故满足

$$\left.\begin{aligned}&\begin{cases}C_{+}: & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan(\beta+\alpha)\\ \Gamma_{+}: & \beta=\left[\sqrt{\dfrac{k+1}{k-1}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{k-1}{k+1}}\cot\alpha\right)+\alpha\right]+\text{const}\end{cases}\\&\begin{cases}C_{-}: & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan(\beta-\alpha)\\ \Gamma_{+}: & \beta=-\left[\sqrt{\dfrac{k+1}{k-1}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{k-1}{k+1}}\cot\alpha\right)+\alpha\right]+\text{const}\end{cases}\end{aligned}\right\}\quad(11.380)$$

式中

$$\begin{cases}\beta = \arctan \dfrac{v}{u} & \text{为流动方向与 } x \text{ 轴的夹角} \\ \alpha = \arcsin \dfrac{a}{q} & \text{为马赫角} \\ q^2 = u^2 + v^2, \quad a^2 = \dfrac{kp}{\rho} \end{cases}$$

而 u、v、p、ρ、k 分别为爆轰产物的 x 向速度分量、y 向速度分量、压力、密度和绝热指数。

2. 在爆轰波阵面上的条件

在$\overline{AB}$上，即在 $x=0$，$-h_0 \leqslant y < h_0$ 的直线上，物理量的取值为

$$\left.\begin{aligned} u &= u_H = \frac{k}{k+1}D \\ v &= v_H = 0 \\ p &= p_H \\ &= \frac{1}{k+1}\rho_0 D^2 \\ \rho &= \rho_H = \frac{k+1}{k}\rho_0 \end{aligned}\right\} \tag{11.381}$$

式中：ρ_0、h_0、D 分别为炸药的密度、半厚度和爆速；而下标 H 表示 u、v、p、ρ 在爆轰波阵面上的取值。

3. 抛板一段微元的运动方程

在动坐标系中板元的轨迹，即板形曲线$y=f(x)$，满足

$$\left.\begin{aligned} -\frac{f''}{[1+(f')^2]^{3/2}} &= \frac{p - p_D}{\rho_* h_* D^2} \\ f' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v}{u} &= \frac{v_D}{u_D} \end{aligned}\right\} \tag{11.382}$$

式中：h_*、ρ_* 为被抛平板的厚度和密度，而 u_D、v_D、p_D 分别为板前空气的 x 向、y 向的速度分量和压力。

4. 空气来流（在动坐标系中）

$$\left.\begin{aligned} u_\infty &= D & &\text{为空气来流的 } x \text{ 向速度分量} \\ v_\infty &= 0 & &\text{为空气来流的 } y \text{ 向速度分量} \\ p_\infty &= p_a & &\text{为空气压力} \\ \rho_\infty &= \rho_a & &\text{为空气密度} \end{aligned}\right\} \tag{11.383}$$

式中，p_a 和 ρ_a 分别为静止空气的压力和密度。设 γ 为空气的绝热指数，对于空气

$$\left.\begin{aligned} p_a &= A_a \rho_a^\gamma \\ A_a &= \text{const} \\ a_a^2 &= \gamma p_a / \rho_a \end{aligned}\right\} \tag{11.384}$$

11.14.2 问题的简化处理

1. 板前的绕流问题

为了求出板前空气的压力 p_D，必须求解板前空气的超音速绕流区域的解，数值求解这个绕"凹壁"(concave wall)的超音速流动区域比较麻烦。为了方便起见，取一个"平均"压力 $\bar{p}_D$ 来代替 p_D，即令

$$\bar{p}_D = p_D \tag{11.385}$$

$\bar{p}_D$ 是这样取的：根据实验测量和摄影，抛板板形除开始一段(靠近 B 点，见图 11.41)外，基本平直，于是假定抛板和它前面的空气冲击波都是直线，如图 11.42 所示。板与 x 轴的夹角 β_M 取成该板在真空抛掷时的最大转角。从而按以下方程组便可求出板前所有的"平均"物理量(字母上加一横表示平均)。

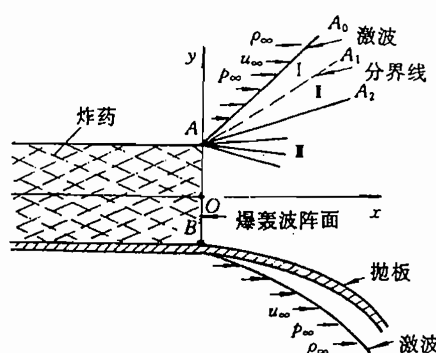


图 11.41　在空气中二维抛板的运动图像

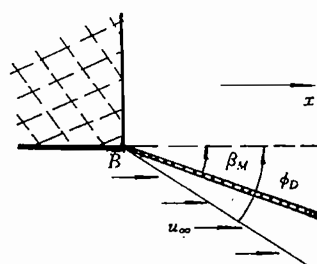


图 11.42

$$\left.\begin{aligned}
\bar{u}_D &= D - \frac{2}{\gamma+1}\frac{D^2\sin^2\phi_D - a_a^2}{D} \\
\bar{v}_D &= \frac{2}{\gamma+1}\cdot\cot\phi_D\cdot\frac{D^2\sin^2\phi_D - a_a^2}{D} \\
\frac{\bar{v}_D}{\bar{u}_D} &= \tan\beta_M \\
\bar{p}_D &= p_a + \frac{2}{\gamma+1}\rho_a(D^2\sin^2\phi_D - a_a^2)
\end{aligned}\right\} \tag{11.386}$$

(ϕ_D 为空气中激波与 x 轴夹角)

若按上述方案，必须先做真空中二维抛板计算，这样做比较麻烦，也太不值得，因为尽管做了那样复杂的计算，却只取其中一个量——极限转角，即最大转角 β_M. 我们在研究真空中二维抛板的数值计算的数据时，发现若单纯求真空中二维抛板的极限速度，完全可以用修正的古尼公式(详见下节)：

$$v_g = \sqrt{\frac{D^2}{2(k^2-1)}}\cdot\sqrt{\frac{6R_b^2}{R_b^2+5R_b+4}} \tag{11.387}$$

式中

$$R_b = \frac{2\rho_0 h_0}{\rho_* h_*}$$

按上式求出真空中抛板的极限速度 v_g 后，再利用抛掷中的泰勒公式：

$$v_g = 2D \cdot \sin \frac{\beta_M}{2} \tag{11.388}$$

由此两式便可求出最弯转角 β_M：

$$\beta_M = 2\arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{8(k^2-1)}} \cdot \sqrt{\frac{6R_b^2}{R_b^2+5R_b+4}}\right] \tag{11.389}$$

由上式所求得的 β_M 值（简称公式值）与真空中二维抛板的数值计算值 β_M（简称计算值）基本相同，见表 11.13。

表 11.13　$k=3$ 时，不同 R_b 所对应的 β_M 值

R_b		0.330	0.857	1.318	1.714	2.505	3	6	10
β_M	计算值	4°52′	10°3′	13°12′	15°10′	18°12′	20°6′	25°14′	28°22′
	公式值	4°48′	10°3′	13°12′	15°22′	18°28′	20°	25°22′	28°37′

将(11.389)式求得的 β_M 代进(11.386)式中便可求出空气的压力 $\bar{p}_D$，显然用 β_M 的计算值或用公式值求得的 $\bar{p}_D$ 基本相等。

用“平均”压力 $\bar{p}_D$ 代替 p_D 是一种合理的近似，因抛板的变形、姿态主要发生在板的前一段。尽管在抛板的前段（靠近爆轰波阵面部分）$\bar{p}_D$ 可能大于抛板上各点上的真实空气压力 p_D，可是在板的这一段爆轰产物的压力 $p \gg p_D$（当然亦有 $p \gg \bar{p}_D$），所以不会因 p_D 取值不准确而对抛板速度产生什么影响。

2. 在拐角附近的流动问题

在图 11.41 所示的拐角 A 处爆轰产物与空气接壤，流动比较复杂，而数值计算仅要求该点附近的流动解已知。根据决定此处流动的参量，可把该区流动看做为自模拟的，该区的流动分成三个区（见图 11.41）：Ⅰ 区为压缩空气均匀流；Ⅱ 区为爆轰产物均匀流；Ⅲ 区为中心稀疏简单波，介质为爆轰产物。

在 Ⅰ 区：

$$\left.\begin{aligned}
p_1 &= p_a + \frac{2}{\gamma+1}\rho_a(D^2\sin^2\phi_a - a_a^2) \\
\rho_1 &= \rho_a \Big/ \left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1}\,\frac{a_a^2}{D^2\sin^2\phi_a}\right] \\
u_1 &= D - \frac{2}{\gamma+1}\,\frac{D^2\sin^2\phi_a - a_a^2}{D} \\
v_1 &= \frac{2}{\gamma+1}\cot\phi_a \cdot \frac{D^2\sin^2\phi_a - a_a^2}{D} \\
a_a^2 &= \gamma\frac{p_a}{\rho_a}
\end{aligned}\right\} \tag{11.390}$$

式中，ϕ_a 为激波 $\overline{AA_0}$ 与 x 轴的夹角。

在 Ⅱ 区：

$$
\left.\begin{aligned}
&\beta_2=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\cot\alpha_2\right)+\alpha_2-\frac{\pi}{2}\\
&\tan\beta_2=\frac{v_2}{u_2}\\
&\cot\alpha_2=\sqrt{\frac{(k+1)(q_2^2-a_H^2)}{(k+1)a_H^2-(k-1)q_2^2}}\\
&\frac{q_2^2}{2}+\frac{kp_2}{(k-1)\rho_2}=\frac{k+1}{2(k-1)}a_H^2\\
&q_2^2=u_2^2+v_2^2\\
&\frac{p_2}{\rho_2^k}=\frac{p_H}{\rho_H^k}\\
&a_H^2=\frac{kp_H}{\rho_H}
\end{aligned}\right\}\tag{11.391}
$$

在分界线$\overline{AA_1}$上的条件

$$
\left.\begin{aligned}
&\tan\beta_2=\frac{v_2}{u_2}=\frac{v_1}{u_1}\\
&p_1=p_2
\end{aligned}\right\}\tag{11.392}
$$

将(11.390)、(11.391)、(11.392)式联立起来，便可求得区域Ⅰ和Ⅱ中的物理量；同时可求出激波$\overline{AA_0}$的倾角ϕ_a、区域Ⅱ中产物流动的马赫角α_2、分界线$\overline{AA_1}$与x轴的夹角β_2. 由于α_2、β_2已知，便可求得Ⅲ区与Ⅱ区的分界线$\overline{AA_2}$的倾角$\theta_2=\beta_2-\alpha_2$.

11.14.3 本简化模型包括了真空中二维抛板模型

本简化模型与真空中二维抛板模型不同之处，有两点：

① 抛板运动方程(11.382)中多了一个量p_D；

② 在Ⅲ区的边界$\overline{AA_2}$上，$p_2\neq0$，$\theta\neq\left(\frac{k+1}{k-1}-1\right)\frac{\pi}{2}$。

然而，如果令$\rho_a=0$，则该模型便自动化为真空中二维抛板的理论模型。这是因为据(11.384)第一式，当$\rho_a=0$，推出$p_a=0$，于是从(11.386)最后一式，得到$\overline{p}_D=p_0=0$，这样方程(11.382)就化成真空中抛板的运动方程(见(11.333)式)：

$$
-f''/[1+(f')^2]^{3/2}=\frac{p}{\rho_* h_* D^2}\tag{11.393}
$$

同时，当$\rho_a=0$时，从(11.390)式得出：$p_1=0,\rho_1=0$，根据(11.392)式便得到在$\overline{AA_1}$上$p_2=0$，而Ⅱ区为均匀流，所以在$\overline{AA_2}$上：$p_2=0$，又因$P_2=A\rho_2^k$，从而$kp_2/\rho_2=0$. 这样，由(11.391)式的第四式推出：$(k+1)a_H^2=(k-1)q_2^2$，利用它则从(11.391)的第三式推出：

$$
\alpha_2=0\tag{11.394}
$$

由上式，则从(11.391)的第一式，得出

$$
\beta_2=\left(\frac{k+1}{k-1}-1\right)\frac{\pi}{2}\tag{11.395}
$$

即有

$$
\theta_2=\beta_2-\alpha_2=\left(\frac{k+1}{k-1}-1\right)\frac{\pi}{2}\tag{11.396}
$$

式(11.394)、(11.395)、(11.396)以及式 $p_2=0$,正是真空中二维抛板在拐角 A 处的真空边界上的条件。

11.14.4 部分计算结果

按上述方法,我们做了计算。计算中采用 $D=5400\text{m/s}$, $k=3$, $a_a=340\text{m/s}$、$\gamma=1.4$, $\rho_a=1.293\text{kg/m}^3$。计算结果表明,就抛板的极限速度 v_{pm}^{*}而言,它同真空中抛板的极限速度 v_{pm}和按修正古尼公式计算的 v_g 相差无几,见表 11.14,尽管对空气的作用估计过高(β_M 的取值比真实的大),可是对抛板的极限速度只产生百分之几的影响。从而得出结论:如果只求抛板的极限速度,可以不考虑空气。

本简化模型既可计及空气的影响;又可转化为真空中二维抛板的理论模型,所以说它是个具有较普遍意义的二维抛板理论模型。

关于具体的数值计算,可以参考上一节。

表 11.14

R_b	空气中:v_{pm}^{*}/D	真空中 v_{pm}/D	修正的古尼公式:v_g/D	相对误差值:$(v_{pm}^{*}-v_{pm})/v_{pm}^{*}$
0.330	0.085	0.085	0.084	0.0%
0.857	0.172	0.175	0.174	−1.8%
1.318	0.225	0.230	0.230	−2.2%
1.714	0.258	0.264	0.267	−2.3%
2.505	0.309	0.316	0.321	−2.2%

11.15 二维抛板极限速度的相似性与修正的古尼公式

炸药驱动下二维抛板的极限速度是一个非常重要的物理量,要想准确地得到它,必须进行复杂的二维数值计算。而实际应用中,特别是在工程上,迫切要求有个简单、准确、普遍适用的计算公式。现存许多经验公式中,最常用的公式有

$$v_e=1.2D\frac{\sqrt{1+\frac{32}{27}R_b}-1}{\sqrt{1+\frac{32}{27}R_b}+1} \tag{11.397}$$

$$v_e=D\frac{\sqrt{1+\frac{32}{27}R_b}-1}{\sqrt{1+\frac{32}{27}R_b}+1} \tag{11.398}$$

式中,v_e 表示经验公式给出的抛板极限速度,R_b 为炸药与抛板的质量比,D 为爆速。然而这些公式都是一维抛掷公式或者是它们的修正,有相当大的局限性。当把它们用于二维问题时,其严重的缺陷在于:没有考虑爆轰产物绝热指数 k 的影响以及质量比 R_b 的限定范围。我们在整理二维抛板数值计算结果时发现,抛板的极限速度具有一定的相似性,并由此得到求二维抛板极限速度的修正古尼公式[14],[2]。

11.15.1 影响抛板极限速度的因素

为了说明爆轰产物的绝热指数对抛板极限速度的重大影响,先简析极限速度所依赖

的参量。

按特里柏斯的二维抛板模型，在随爆轰波阵面运动的坐标系 Oxy 中，见图 11.33，任一抛板微元的运动方程满足（见(11.333)式和(11.315)式）：

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big/\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}=p/(\rho_* h_* D^2)\\ &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)=\frac{v_*}{u_*}\\ &u_*^2+v_*^2=D^2\end{aligned}\right\} \tag{11.399}$$

式中，$y=f(x)$ 为板形曲线；u_* 和 v_* 分别为板元质点在坐标系 Oxy 中的 x 向和 y 向速度分量；ρ_* 为抛板的密度；h_* 为抛板的厚度；p 为爆轰产物对板的压力。

板元质点在不动坐标系中的速度 v_p 则为

$$v_p=\sqrt{(u_*-D)^2+v_*^2} \tag{11.400}$$

由方程(11.399)和(11.400)看出，v_p 依赖于 D、p、$M_*(=h_*\rho_*)$ 和 x；而 p 又依赖 D、M_*、x、y、产物绝热指数 k 以及炸药的密度 ρ_0 和厚度 $2h_0$，而 $y=f(x)$。所以 v_p 依赖于

$$v_p \parallel D、M_*、x、k、\rho_0、h_0$$

根据量纲分析中的 π 定理，则有

$$\frac{v_p}{D}=f_*(R_b、k、x)$$

而 $v_{pm}=\lim\limits_{x\to\infty}v_p$ 与 x 无关，所以

$$\frac{v_{pm}}{D}=f_*(R_b、k) \tag{11.401}$$

由上式得知，以 D 为尺度的无量纲极限速度 v_{pm}/D 只依赖于参量 R_b 和 k，在以下讨论中约定：v_{pm} 代表按特里柏斯模型计算的结果，即作为“精确”的极限速度。

在一些经验公式中都忽略 (v_{pm}/D) 依赖 k 值这一重大因素。数值计算结果表明经验公式(11.397)适用于 $k=2.7$ 左右的炸药；而公式(11.398)只适用于 $k=3$ 左右的炸药。为了说明 k 对 v_{pm} 的重大影响，我们把按特里柏斯模型计算的对应于不同 k 值的 v_{pm} 值列在表 11.15 中，从表中看出 (v_{pm}/D) 随 k 值变化非常显著，如在表中所取的 R_b 值范围内，对应 $k=2.5$ 的 (v_{pm}/D) 与对应 $k=3.0$ 的 (v_{pm}/D) 之相对差值达 23% 左右，如果 k 值取得更小，其相对差就更大了。所以在使用像(11.398)和(11.397)那样经验公式时必须注意炸药 k 的取值范围。

表 11.15

R_b	$k=2.5$		$k=3.0$		$k=3.5$	
	v_{pm}/D	η	v_{pm}/D	η	v_{pm}/D	η
1	0.2369	23.4%	0.1942	0.0%	0.1642	−15.4%
3	0.4314	23.7%	0.3488	0.0%	0.2928	−16.0%
6	0.5388	23.3%	0.4370	0.0%	0.3679	−15.8%
10	0.6042	23.1%	0.4893	0.0%	0.4126	−15.7%

表中：

$$\eta = \frac{v_{pm}(R_b,k) - v_{pm}(R_b,3)}{v_{pm}(R_b,3)}$$

使用经验公式要注意的另一问题是：R_b 的取值范围。因大多数的经验公式都是建立在一维抛掷的基础上，如本节开始所列的两个公式。要使得一维抛掷与二维抛掷类似，只有在 R_b 较小（重板）时才可能；当 R_b 较大时，如在 $R_b=10, k=3$ 的情况下按数值计算的 v_{pm} 与按经验公式(11.398)计算的 v_e 相差达 15%，如果 R_b 再大，其相对差就更大。图 11.43 所示的为 v_{pm} 随 R_b 和 k 的发展趋势。

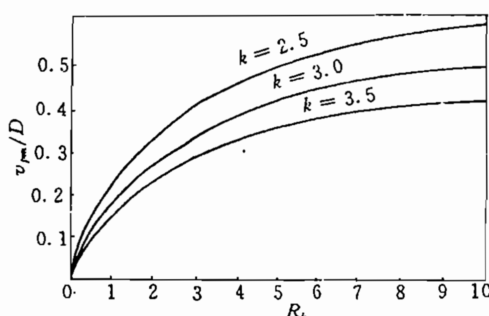


图 11.43　对于不同 k 值下的 R_b 与 v_{pm}/D 的关系曲线

11.15.2　抛板极限速度之间的相似关系

阿述兹等人在计算一维抛体的极限速度 v_a 时，发现无量纲量 $v_a/\sqrt{E_0}$ 对于 k 值变化是不敏感的[3]，其中

$$\sqrt{E_0} = \sqrt{\frac{D^2}{2(k^2-1)}} \tag{11.402}$$

我们受阿述兹思想的启发，在整理二维抛板极限速度 v_{pm} 的计算数据时亦发现这一特点。为了说明这种情况，我们将算得的 v_{pm} 均除以 $\sqrt{E_0}$ 列于表 11.16 中。

表中，μ 为在同一 R_b 值下，各 k 值所对应的 $v_{pm}/\sqrt{E_0}$ 值的算术平均值 $\overline{(v_{pm}/\sqrt{E_0})}$ 与某个 k 值所对应的 $v_{pm}/\sqrt{E_0}$ 的相对差值，即

$$\mu = \frac{\overline{(v_{pm}/\sqrt{E_0})} - (v_{pm}/\sqrt{E_0})}{\overline{(v_{pm}/\sqrt{E_0})}}$$

其中

$$\overline{(v_{pm}/\sqrt{E_0})} = \frac{1}{3}\left[(v_{pm}/\sqrt{E_0})|_{k=2.5} + (v_{pm}/\sqrt{E_0})|_{k=3.0} + (v_{pm}/\sqrt{E_0})|_{k=3.5}\right]$$

表 11.16

R_b	$k=2.5$		$k=3.0$		$k=3.5$	
	$v_{pm}/\sqrt{E_0}$	μ	$v_{pm}/\sqrt{E_0}$	μ	$v_{pm}/\sqrt{E_0}$	μ
1	0.7746	+0.28%	0.7768	−0.00%	0.7789	−0.27%
3	1.3979	−0.28%	1.3952	−0.09%	1.3889	+0.37%
6	1.7459	+0.02%	1.7480	−0.10%	1.7451	+0.07%
10	1.9520	+0.17%	1.9570	−0.09%	1.9570	−0.09%

从表 11.16 看出，在同一 R_b 值下不同 k 值所对应的 $v_{pm}/\sqrt{E_0}$ 几乎相等，即 $\mu\approx 0$，也就是说在同一 R_b 值下不同 k 所对应的 v_{pm} 之间具有一定的相似关系，其相似系数为 $\sqrt{E_0}$.

因此，根据上面的分析，可以把二维抛板的极限速度 v_{pm}写成“分离参量”形式，即相当于

$$v_{pm} \approx \sqrt{E_0} \cdot f_*(R_b) \tag{11.403}$$

式中的 $f_*(R_b)$为参量 R_b 的决定函数。

上述的相似性不管对理论计算，还是对实验测量都具有很大的意义。在求得一种炸药的 v_{pm}与 R_b 的关系后，对于其他炸药，只要 D 和 k 已知，则完全可利用相似系数$\sqrt{E_0}$变换而求得该炸药的 v_{pm}.

11.15.3 修正古尼公式的利用

因一般的经验公式都有局限性，要求得任何 R_b、k 值下的二维抛板的极限速度，势必要进行复杂的二维数值计算，可是唯独古尼公式的修正形式例外，修正的古尼公式（见(11.215)式）为

$$v_g = \sqrt{\frac{D^2}{2(k^2-1)}} \cdot \sqrt{\frac{6R_b^2}{R_b^2+5R_b+4}} \tag{11.404}$$

将修正的古尼公式用于一维抛掷，结果令人失望，见§11.8论述，可是若将它用于求二维抛板的极限速度（即把 v_g 当作抛板的极限速度），竟得到意想不到的结果。显然用(11.404)式来求抛板的极限速度符合(11.403)式的思想。

为了说明用(11.404)式求抛板极限速度较准确，现将按(11.404)式算出的 v_g 和按特里柏斯模型计算的 v_{pm}对比列在表中，v_g 与 v_{pm}不但在 R_b 较小时非常接近，见表11.17，而且在 R_b 较大时也如此，见表11.18和表11.19.

据以上论述，我们得出结论：修正的古尼公式可以代替二维数值计算来求抛板的极限速度。然而应当注意，绝不说二维数值计算可以避免，因除了极限速度外，抛板运动过程中其他物理量不是修正的古尼公式所能给出的。

表 11.17 对于质量比 R_b 较小的情形($k=3.0$)

R_b	0.262	0.330	0.525	0.857	1.054	1.318	1.714	2.00	2.241	2.505	2.637
v_{pm}/D	0.071	0.085	0.124	0.175	0.199	0.230	0.264	0.284	0.307	0.316	0.324
v_g/D	0.069	0.084	0.122	0.175	0.200	0.230	0.267	0.289	0.305	0.321	0.329
ε	2.82%	2.28%	2.60%	0.00%	−0.50%	−0.00%	−1.14%	−1.76%	0.65%	−1.58%	−1.54%

表 11.18 对于质量比 R_b 较大的情形

R_b	$k=2.5$			$k=3.0$			$k=3.5$		
	v_{pm}/D	v_g/D	ε	v_{pm}/D	v_g/D	ε	v_{pm}/D	v_g/D	ε
1	0.2369	0.2390	−0.3%	0.1940	0.1936	−0.3%	0.1642	0.1633	−0.6%
3	0.4314	0.4268	−0.7%	0.3488	0.3472	−0.5%	0.2928	0.2928	0.0%
6	0.5388	0.5421	0.6%	0.4370	0.4392	0.5%	0.3679	0.3703	0.6%
10	0.6042	0.6091	1.1%	0.4893	0.4935	0.9%	0.4126	0.4160	0.8%

表 11.19　对于质量比 R_b 更大的情形

R_b	k	v_{pm}/D	v_g/D	ε
13	3.0	0.5085	0.5160	1.5%
16	3.5	0.4421	0.4481	1.3%
50	2.5	0.7281	0.7202	−1.1%
100	2.5	0.7560	0.7376	−2.5%

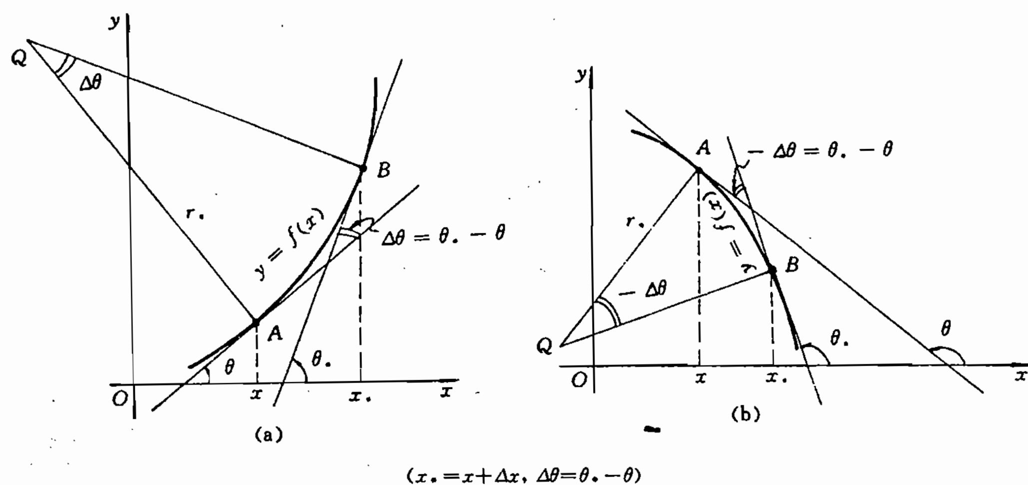
在以上诸表中：

$$\varepsilon = (v_{pm} - v_g)/v_{pm}$$

附录 11.1

平面曲线的曲率半径

设在(x,y)平面上有曲线 $y=f(x)$，如图所示。



$(x_* = x + \Delta x,\ \Delta\theta = \theta_* - \theta)$

附图 11.1

1. 在图示的 A 点有：

$$\tan\theta \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) = f'$$

在图示的 B 点有：

$$\tan\theta_* = \tan(\theta + \Delta\theta) \equiv \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_*} = f'(x_*) = f'(x + \Delta x)$$

由以上两式可推出

$$f'' = f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\tan(\theta + \Delta\theta) - \tan\theta}{\Delta x}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan\theta) = (1 + \tan^2\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = [1 + (f')^2]\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} \tag{1}$$

2. 当 $\Delta x \to \mathrm{d}x$ 时，则 $\Delta\theta \to \mathrm{d}\theta$，圆弧线$\overset{\frown}{AB}$为：

$$\overset{\frown}{AB} = \mathrm{d}S = r_* |\mathrm{d}\theta| \equiv \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{1 + (f')^2}\mathrm{d}x \tag{2}$$

其中，$\mathrm{d}S$—为弧长，r_*—为曲率半径，$\mathrm{d}x > 0$.

3. 结果

由(1)式和(2)式，则推出弧长随角度变化的关系式：

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}S} = \frac{f''}{[1 + (f')^2]^{3/2}} \tag{3}$$

由(1)式和(2)式可推出曲率半径 r_* 与 f 的关系：

①当 $f'' > 0$(附图 11.1(a)所示)，则 $\mathrm{d}\theta > 0$，于是

$$\frac{1}{r_*} = \frac{f''}{[1 + (f')^2]^{3/2}} \tag{4}$$

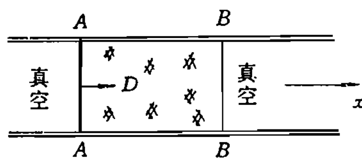
②当 $f'' < 0$(附图 11.1(b)所示)，则 $\mathrm{d}\theta < 0$，于是

$$\frac{1}{r_*} = -\frac{f''}{[1 + (f')^2]^{3/2}} \tag{5}$$

习题

11.1　在一个真空管中间有一段装药 $AABB$，爆轰从 AA 面起爆向右传播。请分析、确定爆轰产物在两个自由面上的飞散速度，特别是在 BB 面上。

如若爆轰是瞬时的，在 AA 和 BB 面上的产物飞散速度？



题图 11.1

11.2　已知平面二维定常流动的运动方程和连续性方程为

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \\ \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}) = -\dfrac{1}{\rho}\mathrm{grad}p \end{cases}$$

推导出(不用现成公式)用平面极坐标(r,θ)描述的如下形式的这两个方程。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}(\rho u r) + \dfrac{\partial}{\partial \theta}(\rho v) = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{v}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} - \dfrac{v^2}{r} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ u\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{v}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} + \dfrac{uv}{r} + \dfrac{1}{\rho r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{v} = u\hat{r}_0 + v\hat{\theta}_0$，$\hat{r}_0$ 和 $\hat{\theta}_0$ 分别为径向和角向单位矢量。

11.3　绝热指数 $k=3$，按瞬时爆轰的一维抛体有两种公式：

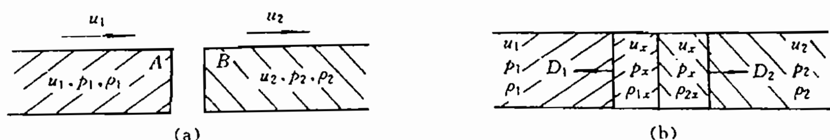
第一种是 §7.29 中给了的精确解(7.475)式；另一种是修正的古尼公式(11.215)式。

请计算在不同质量比 R 下，所给出的两种极限速度值。R 取 0.5，1，3，6，9。



题图 11.3

11.4 如下图所示的两个杆发生高速地共轴撞击($u_1>u_2$)，试确定在撞击面上的压力。冲击压缩规律，分别使用式(11.219)和式(11.221)。



(a) (b)

题图 11.4

11.5 ①什么是稳定爆轰，什么是瞬时爆轰？②什么是自模拟运动？强点爆炸的提法。

参考文献

[1] 鲍姆 Φ A 著等．众智译．爆炸物理学．北京：科学出版社，1963

[2]邵丙璜，张凯．爆炸焊接原理及其工程应用．大连：大连工学院出版社，1987

[3] Aziz A K，etal. The Physics of Fluids，4.3，1961，380

[4] Carnegie Institute of Technology Rept. CIT-ORD-37，1952

[5] 朱兆祥等．应用数学和力学 1.3，1980，275

[6] Gurney R W. BRL Report 405. 1943

[7] 北京工业学院八系．爆炸及其作用．北京：国防工业出版社，1979

[8] 邵丙璜等．苏联第二届爆炸加工会议文集．新西伯利亚，1981

[9] 吕洪生，蒋伯诚．二维平板抛掷中的泰勒公式的理论证明．爆炸与冲击，1986

[10] Дерибас А А. Физика Упрочения И Сварки Взрывом. Издавателвство《Наука》. Новисибирск，1972

[11] Hill R，Pack D C. Proc. of Ryal soc. set. A 191，1947 524

[12] 吕洪生．在滑移爆轰波作用下二维金属平板抛掷的理论计算．国防科技大学学报，1982(1)

[13] 吕洪生．一种简化的空气中二维抛板模型．国防科技大学学报，1990(1)

[14] 吕洪生．二维抛板极限速度的相似性与古尼公式的采用．国防科技大学学报，1990(1)

[15] 张凯等．爆轰驱动和爆轰不定常增长会议文集．昆明：1985. 284

[16] 薛鸿陆．爆炸动力学讲义．国防科技大学，1982

[17] 杜珣．气体动力学讲义．北京大学

[18] Коробейников В П. Течения Тоцецного Взрыва. Физматгиз，1961

[19] Taylor G I. Proceeding of the Royal Society. 1950